

Chapitre 06 : Equilibre des sections droites en béton armé soumises à La flexion simple

6.1. Dimensionnement des sections en flexion simple à L'E.L.U :

6.1.1. Définition :

En béton armé on distingue l'action du moment fléchissant qui conduit au dimensionnement des aciers longitudinaux et l'action de l'effort tranchant qui concerne le dimensionnement des aciers transversaux (cadres, épingles ou étriers). Ces deux calculs sont menés séparément.

Les éléments d'une structure soumis à la flexion simple sont principalement les poutres, qu'elles soient isostatiques ou continues. Pour une poutre isostatique, le calcul des sollicitations Mz et Vy est simple et il est conduit en utilisant les méthodes de la résistance de matériaux (RDM). Pour une poutre continue, l'hyperstaticité rend les calculs plus compliqués et le BAEL propose deux méthodes qui permettent d'évaluer les sollicitations dans les poutres continues en béton armé.

Une poutre sera sollicitée en flexion simple lorsqu'elle sera soumise à l'action de force disposée symétriquement par rapport au plan moyen. La réduction de cette force au centre de gravité de la section se décompose en moment fléchissant et un effort tranchant.

6.1.2. Etat limite ultime de résistance pour une Section rectangulaire :

6.1.2.1. La section ne comporte que des armatures tendues : (section simplement armée)

Pour tous les calculs, on utilise les notations de la figure (6-1), où :

b et h sont la largeur et la hauteur de la section de béton.

A_s est la section d'acier tendu, dont le centre de gravité est positionné à d de la fibre la plus comprimée.

y_u est la position de l'axe neutre par rapport à la fibre la plus comprimée du coffrage.

σ_s est la valeur de la contrainte de calcul des aciers, limitée à f_{su} .

f_{bu} contrainte de calcul du béton.

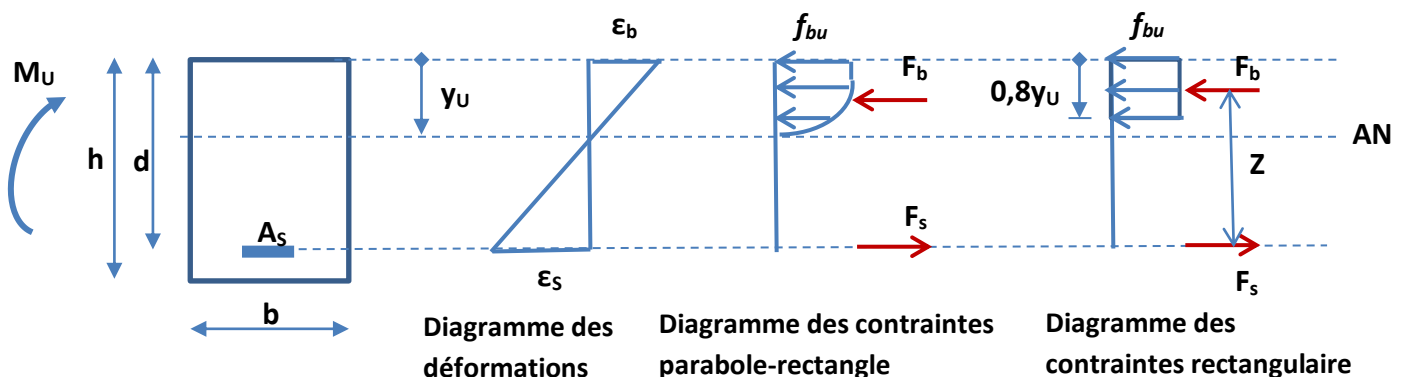


Figure (6-1) : section rectangulaire sollicitée en flexion simple à l'ELU.

Equations de l'équilibre :

L'équilibre de la section vis à vis de l'effort normal et du moment fléchissant conduit aux équations suivantes :

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F_b - F_s = 0 \rightarrow f_{bu} \cdot 0,8\gamma_U \cdot b - A_s \cdot \sigma_s = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma M_{/A_s} = 0 \rightarrow M_U - F_b \cdot Z = 0 \rightarrow M_U - f_{bu} \cdot 0,8\gamma_U \cdot b \cdot (d - 0,4\gamma_U) = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_{/CDG \text{ du bloc contraintes du béton}} = 0 \rightarrow M_U - F_s \cdot Z = 0 \rightarrow M_U - A_s \cdot \sigma_s \cdot (d - 0,4\gamma_U) = 0 \quad (3)$$

De l'équation (3) $\rightarrow A_s = \frac{M_U}{\sigma_s \cdot Z}$

On pose : $\alpha_u = \frac{y_u}{d}$ et $\beta = \frac{Z}{d} = 1 - 0,4\alpha_u$

D'où : $A_s = \frac{M_U}{\beta \cdot d \cdot \sigma_s}$

Calcul de la profondeur relative de l'A.N. (α_u) :

De l'équation (2) $\rightarrow M_U - f_{bu} \cdot 0,8 \alpha_u \cdot d \cdot b \cdot (d - 0,4 \alpha_u \cdot d) = 0$

En la divisant sur bd^2f_{bu} , on aura :

$$\frac{M_U}{bd^2f_{bu}} - \frac{f_{bu} \cdot 0,8 \alpha_u \cdot b \cdot d^2 (1 - 0,4 \alpha_u)}{bd^2f_{bu}} = 0$$

On pose $\mu_U = \frac{M_U}{bd^2f_{bu}}$ (moment réduit)

$\rightarrow \mu_u = 0,8 \alpha_u \cdot (1 - 0,4 \alpha_u)$

La résolution de cette équation du 2^{ème} degré où l'inconnue est la profondeur relative de l'A.N, α_u

nous donne : $\alpha_u = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu_u})$

Calcul de la contrainte dans les aciers tendus (σ_s) :

La contrainte σ_s est en fonction de son allongement ϵ_s .

La règle des 3 pivots se fixe comme objectif d'utiliser les matériaux à leurs maximum. Le diagramme de déformation correspondant sera le diagramme qui passe par les pivots A et B.

Le théorème des triangles semblables nous donne, dans ce cas, pour un allongement de l'acier de 10 ‰ et un raccourcissement du béton de 3,5 ‰.

D'où : $\alpha_{AB} = \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{bc} + \epsilon_{st}} = \frac{3,5 \text{ ‰}}{3,5 \text{ ‰} + 10 \text{ ‰}} = 0,2593$

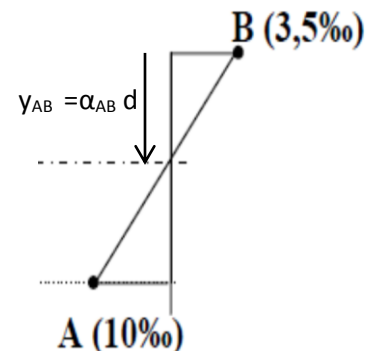
1. Si, $0 < \alpha \leq 0,2593$, nous sommes dans le sous-domaine **1b**

et le diagramme des déformations passe par le pivot **A**,

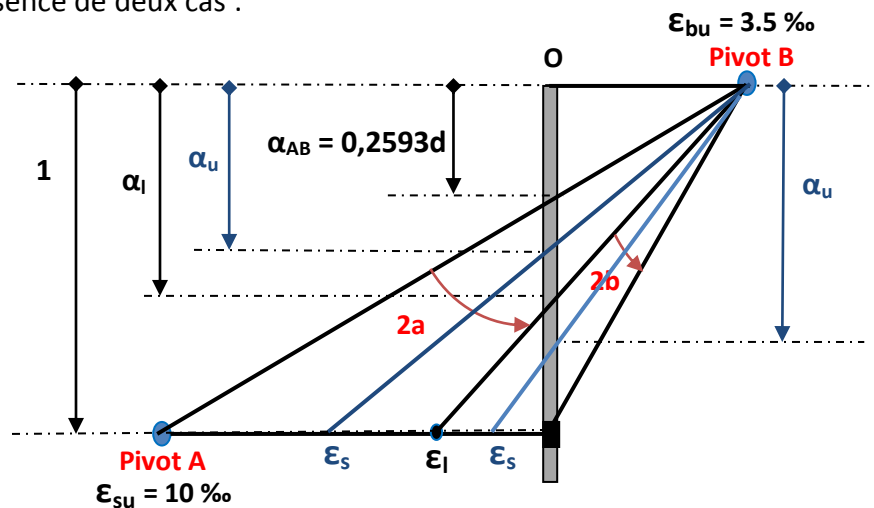
donc $\epsilon_s = 10 \text{ ‰} \rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$ (type I)

$\alpha = 0,2593 \Rightarrow \mu = 0,8 \times 0,2593 (1 - 0,4 \times 0,2593) = 0,1859$

Soit $\mu = 0,186$



2. Si : $0,2593 < \alpha < 1$ ($0,186 < \mu \leq 0,480$), nous sommes dans les sous- domaines **2a** et **2b** et le diagramme des déformations passe par le point **B** et le raccourcissement du béton de la fibre extrême sera $\varepsilon_b = 3.5\text{‰}$. On est en présence de deux cas :



Si $\varepsilon_s \geq \varepsilon_l$ (sous-domaine 2a) :

→ $\alpha_u \leq \alpha_l$ ($\mu_u \leq \mu_l$) avec ;

$$\alpha_l = \frac{3,5\text{‰}}{3,5\text{‰} + \varepsilon_l} \text{ et } \varepsilon_l = \frac{f_e}{\gamma_s E_s} \text{ (type I) et } \mu_l = 0,8 \alpha_l (1 - 0,4 \alpha_l)$$

La solution d'une section simplement armée est correcte puisque les matériaux (béton-acier) sont exploités d'une manière optimale (poutres sousarmées) :

Les fibres les plus comprimées du béton se déforment à 3,5 ‰ et les aciers tendus se plastifient.

Donc : $\varepsilon_s \geq \varepsilon_l \rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$ (type I)

Si $\varepsilon_s < \varepsilon_l$ (sous-domaine 2b) :

→ $\alpha_u > \alpha_l$ ($\mu_u > \mu_l$) ;

Les aciers travaillent dans le domaine élastique, ils sont sous exploités (poutres surarmées). Il faut rejeter dans ce cas la section simplement armée.

6. 1.2.2. La section comporte des armatures tendues et comprimées : (section doublement armée)

Si $\mu_u > \mu_l \rightarrow \varepsilon_s < \varepsilon_l$; la section d'armature est surdimensionnée, c'est pourquoi :

$\varepsilon_s \nearrow \rightarrow$ diminuer la section d'armature et augmenter son allongement ;

→ diminuer la profondeur de l'A.N : $\alpha_u \searrow$

→ diminution de la partie comprimée du béton → la force de compression dans le béton va diminuer :

$F_b \searrow$.

On peut augmenter l'effort de compression résistant en introduisant dans la partie comprimée du béton des armatures comprimées.

Dans ces conditions, on voit qu'il y a intérêt, d'un point de vue économique, à ce que ϵ_s soit au moins l'allongement limite élastique ϵ_l qui correspondra selon le diagramme de calcul ($\sigma - \epsilon$) de l'acier à la contrainte $\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$ (type I).

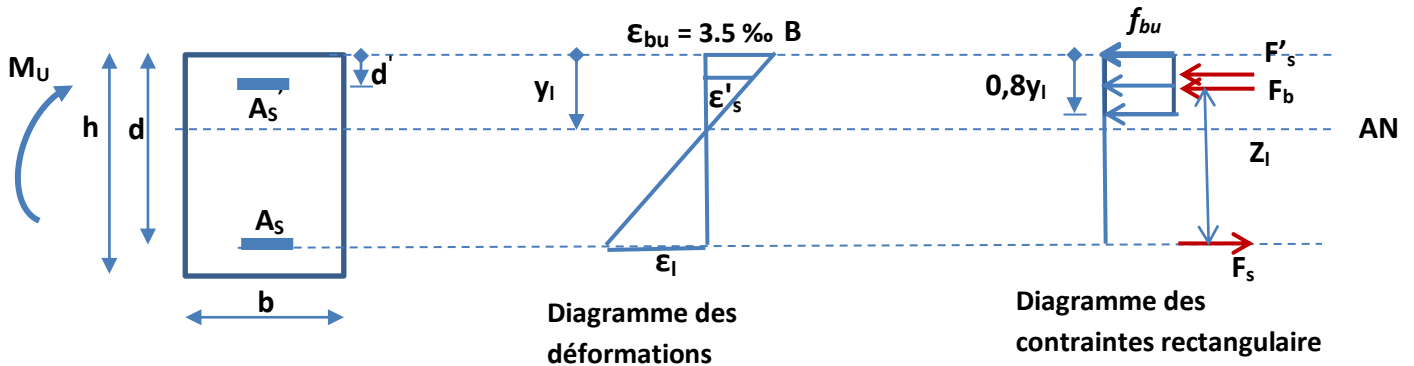


Figure (6-2) : section rectangulaire doublement armée sollicitée en flexion simple à l'ELU.

Equations de l'équilibre :

L'équilibre de la section vis à vis de l'effort normal et du moment fléchissant conduit aux à deux équations suivantes :

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F_b + F'_s - F_s = 0 \rightarrow f_{bu} \cdot 0,8\alpha_l \cdot b + A'_s \cdot \sigma'_s - A_s \cdot \sigma_s = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\Sigma M_{/A_s} = 0 \rightarrow M_U - F_b \cdot Z_l - F'_s \cdot (d - d') = 0 \rightarrow M_U - f_{bu} \cdot 0,8\alpha_l \cdot b \cdot (d - 0,4\alpha_l) - A'_s \cdot \sigma'_s \cdot (d - d') = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$(2) \rightarrow M_U - f_{bu} \cdot 0,8\alpha_l \cdot b \cdot d^2(1 - 0,4\alpha_l) - A'_s \cdot \sigma'_s \cdot (d - d') = 0$$

En la divisant sur bd^2f_{bu} , on aura :

$$\frac{M_U}{bd^2f_{bu}} - \frac{f_{bu} \cdot 0,8\alpha_l \cdot b \cdot d^2(1 - 0,4\alpha_l)}{bd^2f_{bu}} - \frac{A'_s \cdot \sigma'_s \cdot (d - d')}{bd^2f_{bu}} = 0$$

$$\rightarrow \mu_u - \mu_l = \frac{A'_s \cdot \sigma'_s \cdot (d - d')}{bd^2f_{bu}}$$

Donc ; la quantité d'armature comprimée sera égale à :

$$\rightarrow A'_s = \frac{(\mu_u - \mu_l)bd^2f_{bu}}{(d - d')\sigma'_s} = \frac{M_u - M_l}{(d - d')\sigma'_s}$$

Où M_l est le moment résistant du béton comprimé seul obtenu lorsque l'allongement des armatures est égal à ϵ_l (allongement élastique limite). Le moment résistant s'écrit : $M_l = \mu_l \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bu}$

$$\text{De l'équation (1)} \rightarrow A_s = \frac{f_{bu} \cdot 0,8\alpha_l \cdot b \cdot d + A'_s \cdot \sigma'_s}{\sigma_s} = \frac{f_{bu} \cdot 0,8\alpha_l \cdot b \cdot d^2(1 - 0,4\alpha_l)}{d(1 - 0,4\alpha_l)\sigma_s} + \frac{M_u - M_l}{(d - d')\sigma_s}$$

Donc ; la quantité d'armature tendue sera égale à :

$$\rightarrow A_s = \frac{M_l}{\beta_l d \sigma_s} + \frac{M_u - M_l}{(d - d')\sigma_s}$$

Avec ; $\beta_l = 1 - 0,4\alpha_l$

$$\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} \text{ (type I)}$$

Calcul de la contrainte dans les aciers comprimés (σ'_s) :

La contrainte σ'_s est en fonction de son raccourcissement ϵ'_s . D'après le théorème des triangles semblables (théorème de Thalès) et en utilisant la figure (6-2) :

$$\epsilon'_s = \frac{3,5\text{‰}(\alpha_l - \frac{d'}{d})}{\alpha_l}$$

$$\text{Si } \epsilon'_s \geq \epsilon_l \rightarrow \sigma'_s = \frac{f_e}{\gamma_s} \text{ (type I)}$$

$$\text{Si } \epsilon'_s < \epsilon_l \rightarrow \sigma'_s = E_s \cdot \epsilon'_s$$

6.1.2.3. Condition de Non – Fragilité :

Il faudrait que la section d'armature de calcul assure la condition : $A_s \geq A_{smin}$

$$\text{Avec : } A_{smin} = 0,23bd \frac{f_{t28}}{f_e}$$

6.1.3. Etat Limite Ultime de Résistance pour une Section en T :

6.1.3.1. Fonctionnement des sections en T :

La section d'une poutre peut être appréciée comme rectangulaire ou en T. En effet cette dernière est solidaire généralement d'un plancher (hourdis) qui contribue aux alentours de la poutre à sa résistance, par conséquent il est évident que concevoir une poutre à section en T est plus économique que à considérer comme rectangulaire.

Dans l'étude des sections en T, nous serons amenés à distinguer deux cas suivant que la zone comprimée, de hauteur égale à $0.8y$, se trouve située uniquement dans la table (figure 6-3.a), ou s'étend aussi dans la nervure (figure 6-3.b).

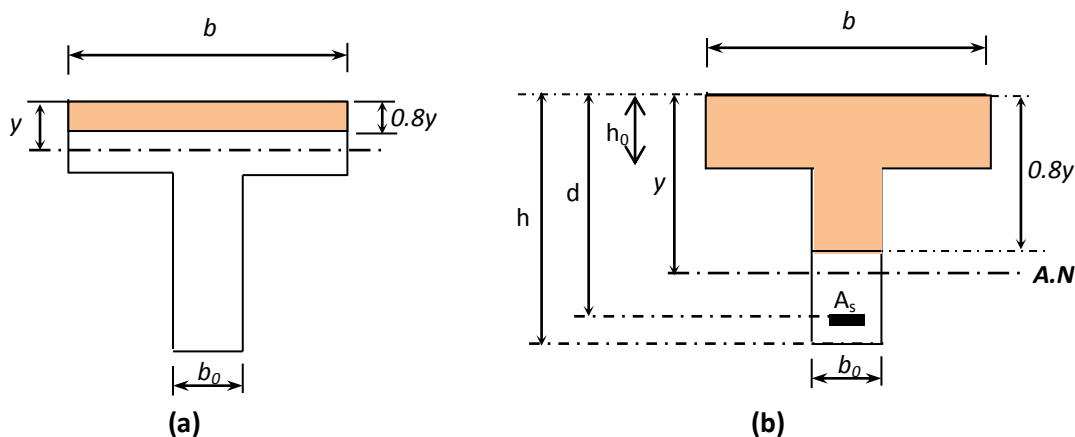


Figure (6-3)

Pour tous les calculs, on utilise les notations de la figure (4-3), où :

b_0 : largeur de la nervure

b : largeur de la table

h_0 : épaisseur de la table

d : hauteur utile de la section en T

h : hauteur de la section en T.

Dans le premier cas (figure 6-3.a) la section en T sera calculée comme une section rectangulaire de largeur b et de hauteur utile d , puisque le béton tendu n'intervient pas dans les calculs de résistance.

6-1-3-2. La section ne comporte que des armatures tendues : (section simplement armée)

Cherchons la condition qui doit être réalisée pour que la zone comprimée n'intéresse que la table.

Considérons, pour cela, que la section représentée sur la (figure 6-4) est soumise à un moment M_T et supposons que pour cette valeur du moment, la hauteur de la zone comprimée soit égale à h_0 .

Nous avons alors :

$$\Sigma M_{/A_s} = 0 \rightarrow M_T - F_b \cdot (d - h_0/2) = 0 \rightarrow M_T = f_{bu} \cdot b \cdot h_0 \cdot (d - h_0/2)$$

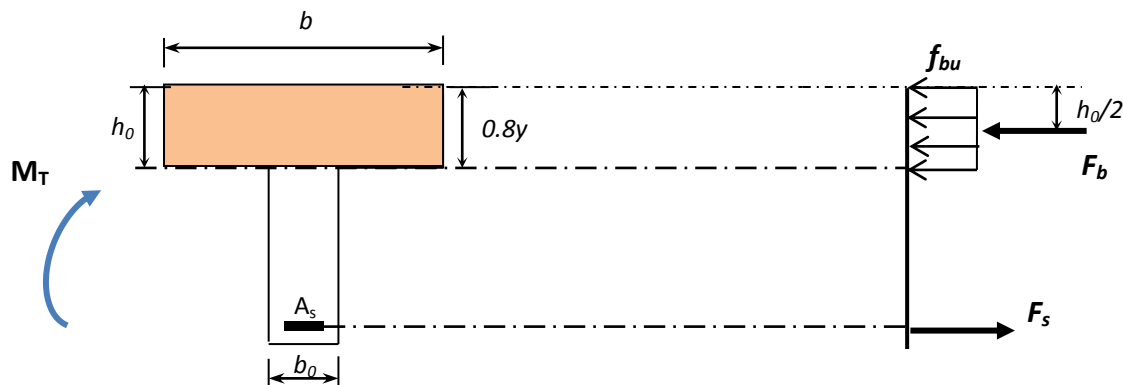
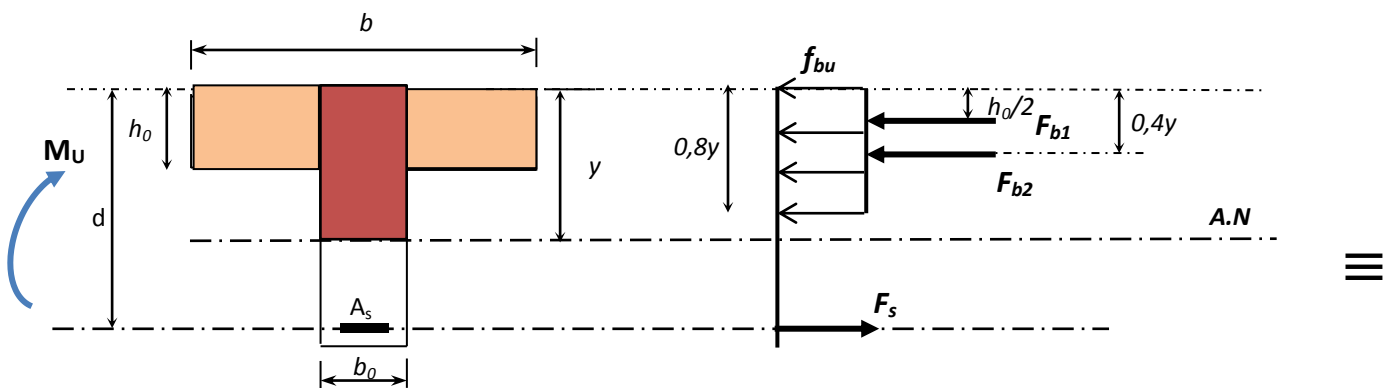
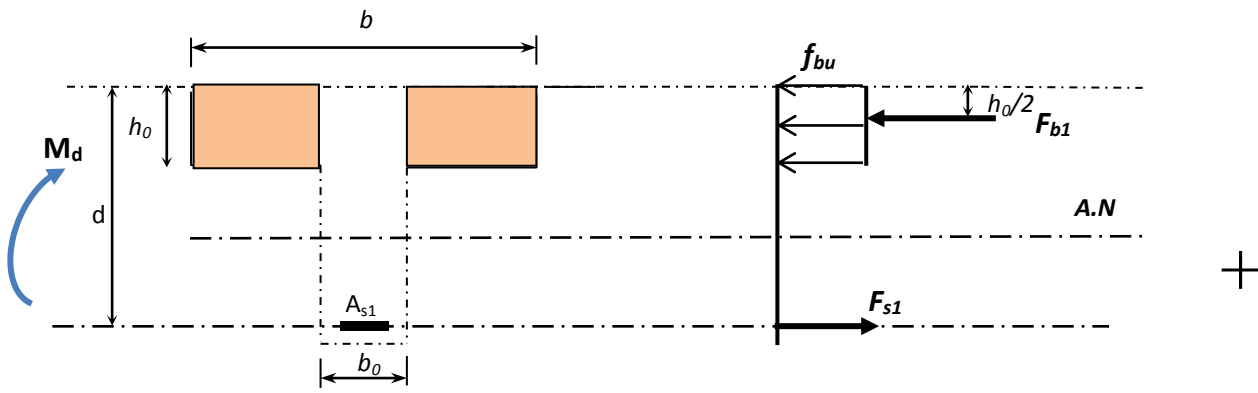


Figure (6-4)

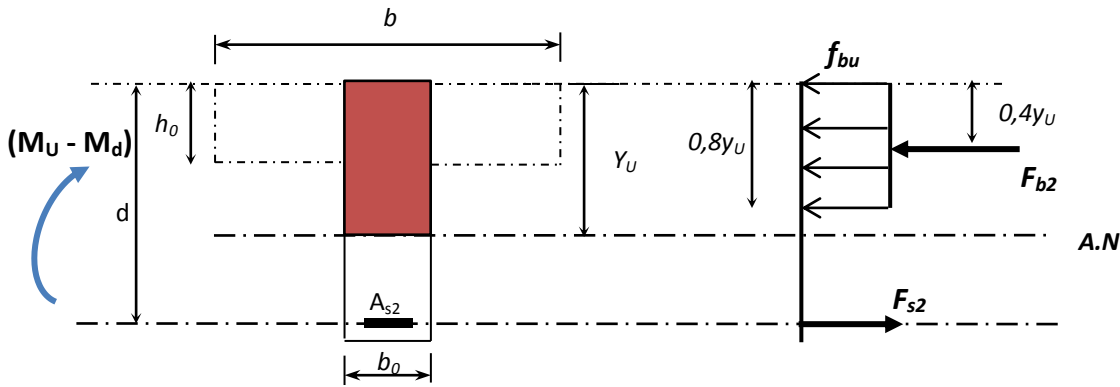
1^{er} cas : Si $M_u \leq M_T \Rightarrow$ L'AN est dans la table et la section en T est à calculer comme une section rectangulaire ($b \times h$) et de hauteur utile d . Les armatures seront alors déterminées à l'aide des formules précédentes.

2^{ème} cas : Si $M_u > M_T \Rightarrow$ L'AN est dans la nervure et on décompose la section en T de la manière suivante :





Section fictive N°1



Section fictive N°2

Figure (6-5)

Les armatures seront alors déterminées à l'aide des équations d'équilibre comme suit :

Equations de l'équilibre :

Section fictive N°1

$$\sum M_{/A_{s1}} = 0 \rightarrow M_d - F_{b1} \cdot Z_1 = 0 \rightarrow M_d = f_{bu} \cdot h_0 \cdot (b - b_0) \cdot (d - h_0/2) = 0$$

Md : Moment équilibré par les débords

$$\sum M_{/CDG} \text{ du bloc contraintes du béton} = 0 \rightarrow M_d - F_{s1} \cdot Z_1 = 0 \rightarrow M_d - A_{s1} \cdot \sigma_s \cdot (d - h_0/2) = 0$$

$$\text{D'où : } A_{s1} = \frac{M_d}{\sigma_s \cdot (d - \frac{h_0}{2})}$$

Section fictive N°2

$$\sum M_{/A_{s2}} = 0 \rightarrow (M_U - M_d) - F_{b2} \cdot Z_2 = 0 \rightarrow (M_U - M_d) - f_{bu} \cdot 0,8y_U \cdot b_0 \cdot (d - 0,4y_U) = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_{/CDG} \text{ du bloc contraintes du béton} = 0 \rightarrow (M_U - M_d) - F_{s2} \cdot Z_2 = 0 \rightarrow (M_U - M_d) - A_{s2} \cdot \sigma_s \cdot (d - 0,4y_U) = 0 \quad (2)$$

$$\text{De l'équation (2)} \rightarrow A_{s2} = \frac{(M_U - M_d)}{\sigma_s \cdot Z_2}$$

$$\text{D'où : } A_{s2} = \frac{(M_U - M_d)}{\beta \cdot d \cdot \sigma_s}$$

Mn = Mu - Md : Moment équilibré par la nervure

Calcul de la profondeur relative de l'A.N. (α_u) :

De l'équation (1) $\rightarrow M_n - f_{bu} \cdot 0,8 \alpha_u \cdot d \cdot b_0 \cdot (d - 0,4 \alpha_u \cdot d) = 0$

En la divisant sur $b_0 d^2 f_{bu}$, on aura :

$$\frac{M_n}{b_0 d^2 f_{bu}} - \frac{f_{bu} \cdot 0,8 \alpha_u \cdot b_0 \cdot d^2 (1 - 0,4 \alpha_u)}{b_0 d^2 f_{bu}} = 0$$

On pose $\mu_n = \frac{M_n}{b_0 d^2 f_{bu}}$ (moment réduit)

$$\rightarrow \mu_n = 0,8 \alpha_u \cdot (1 - 0,4 \alpha_u)$$

La résolution de cette équation du 2^{ème} degré où l'inconnue est la profondeur relative de l'A.N, α_u

nous donne : $\alpha_u = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu_n})$

$$\text{Si } \mu_n < \mu_l \rightarrow A_{s2} = \frac{M_u - M_d}{\beta_u d \cdot \sigma_s}$$

Donc la quantité nécessaire d'armature sera $A_s = A_{s1} + A_{s2}$

$$A_s = \frac{M_d}{\left(d - \frac{h_0}{2}\right) \cdot \sigma_s} + \frac{M_u - M_d}{\beta_u d \cdot \sigma_s}$$

6-1-3-3. La section comporte des armatures tendues et comprimées : (section doublement armée)

Si $\mu_n > \mu_l \rightarrow$ La section en T sera armée par des armatures comprimées et des armatures tendues.

On prend : $M_l = \mu_l \times b_0 \times d^2 \times f_{bu}$

$$A'_s = \frac{M_u - M_d - M_l}{(d - d') \sigma'_s}$$

$$A_s = \frac{M_d}{\left(d - \frac{h_0}{2}\right) \sigma_s} + \frac{M_l}{\beta_l d \sigma_s} + \frac{M_u - M_l}{(d - d') \sigma_s} \quad \text{avec } \beta_l = (1 - 0,4 \alpha_l)$$

$$\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} \text{ (type I)}$$

$$\text{et } \varepsilon'_s = \frac{3,5\%_0 \left(\alpha_l - \frac{d'}{d}\right)}{\alpha_l}$$

$$\text{Si } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_l \rightarrow \sigma'_s = \frac{f_e}{\gamma_s} \text{ (type I)}$$

$$\text{Si } \varepsilon'_s < \varepsilon_l \rightarrow \sigma'_s = E_s \cdot \varepsilon'_s$$

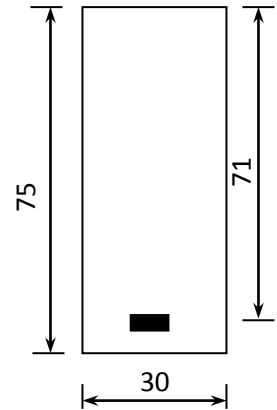
Applications numériques :

Application 01:

Soit à déterminer les armatures de la section rectangulaires représentée sur la figure suivante et soumise à un moment $M_u = 420 \text{ kN.m}$.

Les armatures sont en acier Fe E 400,.

Pour le béton $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$.



Application 02:

Soit une section (25×50) sollicitée par un moment de flexion

$M_u = 0,153 \text{ MN.m}$, avec $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et FeE400.

Application 03:

Soit à déterminer les armatures de la section en T représentée sur la figure ci-contre et soumise à un moment $M=330 \text{ kN.m}$.

Les armatures sont en acier Fe E400, $\gamma_s = 1.15$, et on a pour le béton

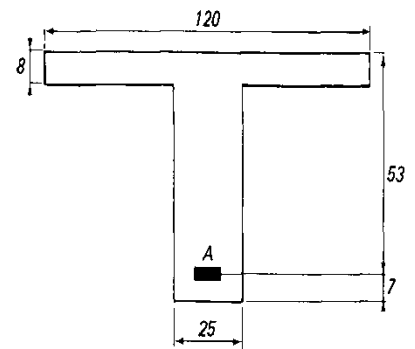
$$f_{c28} = 25 \text{ MPa} \quad \gamma_b = 1.5$$

Application 04:

Soit à déterminer les armatures de la section en T, représentée sur la figure ci-dessus et soumise à un moment

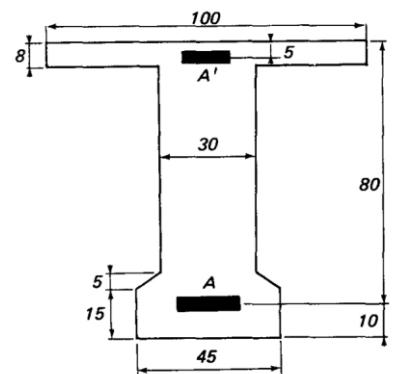
$M = 720 \text{ kN.m}$. Les armatures sont en acier Fe E 500, $\gamma_s = 1.15$, $\left(\frac{f_e}{\gamma_s} = 435 \text{ MPa} \right)$ et on a pour le béton

$$\bar{\sigma}_b = 14.2 \text{ MPa} .$$



Application 05 :

Soit à déterminer les armatures de la section en T représentée sur la figure suivante et soumise à un moment $M = 1\,750 \text{ kNm}$. Les armatures sont en acier Fe E 400, $\gamma_s = 1.15$, et on a pour le béton $\sigma_b = 14.2 \text{ MPa}$.



6-2- Dimensionnement des sections en flexion simple à L'E.L.S :

6-2-1- Etat limite de service pour une Section rectangulaire :

Nous allons voir toutes les vérifications qui s'imposent aux E.L.S. vis à vis de la durabilité et la bonne exploitation de la structure. Il faut s'assurer que les contraintes dans les matériaux ne dépassent pas les contraintes admissibles :

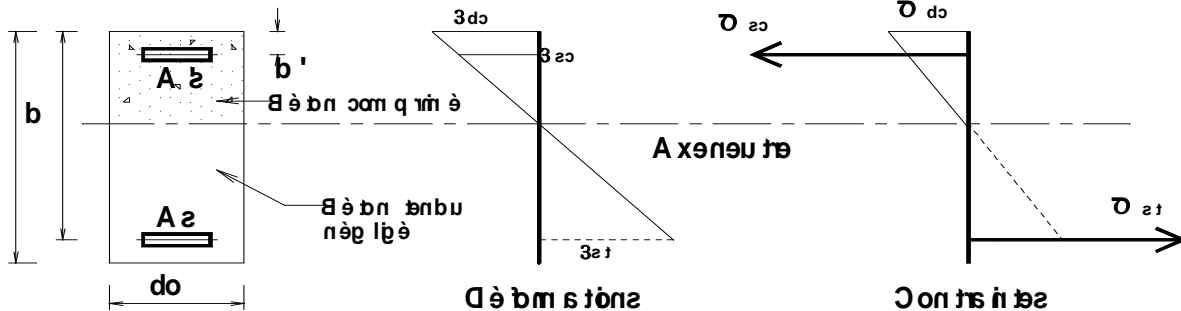
$$\sigma_{bc} \leq 0,6f_{cj} \text{ et } \sigma_s \leq \overline{\sigma}_s$$

Principe de calcul des contraintes :

Dans la réalité, le béton armé est un matériau hétérogène. Pour pouvoir utiliser les résultats de la RDM, nous allons "homogénéiser" la section en remplaçant la section d'acier A_s ou A'_s par une section de béton dite équivalente $n.A_s$ ou $n.A'_s$.

Soit une section droite d'une poutre sollicitée en flexion simple:

SECTION RECTANGULAIRE



Au centre de gravité des aciers comprimés, la déformation de l'acier est la même que la déformation du béton du fait de l'adhérence. Donc on peut écrire $\varepsilon_s = \varepsilon_{bc}$

D'après la loi de Hooke

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} = \varepsilon_{bc} = \frac{\sigma_{bc}}{E_b} \Leftrightarrow \sigma_s = \sigma_{bc} \frac{E_s}{E_b}$$

Si l'on pose

$$n = \frac{E_s}{E_b} \Rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\sigma_s}{n} \Leftrightarrow \sigma_s = n \cdot \sigma_{bc}$$

n est appelé coefficient d'équivalence et a pour valeur 15, ce qui signifie qu'une section d'acier "travaille" 15 fois plus que la même section de béton.

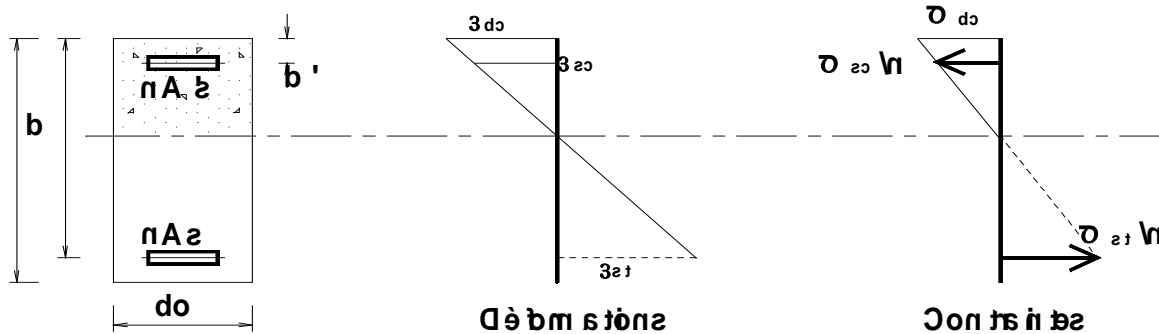
L'effort normal dans les armatures est donc :

$$\begin{cases} N_{sc} = A'_s \cdot \sigma_{sc} = A'_s \cdot n \cdot \sigma_{bc} & \text{dans les aciers comprimés} \\ N_{st} = A_s \cdot \sigma_{st} = A_s \cdot n \cdot \sigma_{bc} & \text{dans les aciers tendus} \end{cases}$$

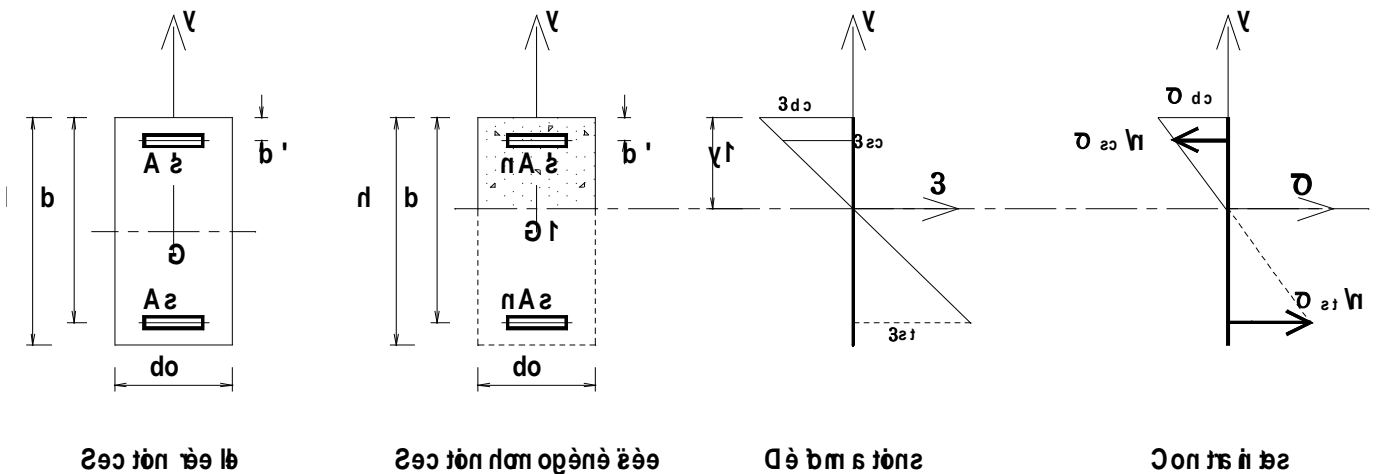
La section d'acier A_s ou A'_s est donc "équivalente" à une section de béton fictif nA_s ou nA'_s .

Suite à ce raisonnement on peut considérer une section dite "homogénéisée" de béton seul avec les diagrammes de déformations et de contraintes suivants:

ES ENE GOMH NOTCES



Grâce à cette "homogénéisation" nous allons pouvoir considérer la section de béton armé comme une section homogène de béton et appliquer les lois de la RDM.



G_1 est le centre de gravité de la section homogénéisée. L'axe horizontal passant par G_1 est donc la fibre neutre de la section homogénéisée. Avec $n = 15$ nous aurons donc :

σ_{bc} : Contrainte de la fibre la plus comprimée du béton.

$\sigma_{sc}/15$: Contrainte de compression des armatures comprimées (cas de section doublement armée).

$\sigma_{st}/15$: Contrainte de traction des armatures tendues.

Pour déterminer σ_{bc} , σ_{sc} , σ_{st} il faut :

a/ déterminer y_s (position de la fibre neutre).

b/ déterminer le moment quadratique de la section homogénéisée (I_h).

1- Position de la fibre neutre :

Pour déterminer y_s , il suffit d'écrire que le moment statique de la section homogénéisée par rapport à l'axe neutre est égal à zéro.

$$\iint_{Sh} y \cdot dS = \frac{b \cdot y_s^2}{2} + n \cdot A'_s (y_s - d') - n \cdot A_s (d - y_s) = 0$$

d'où :

$$b \times y_s^2 + 30 \cdot A'_s \times (y_s - d') - 30 \cdot A_s \times (d - y_s) = 0$$

2- Moment quadratique (I_h) :

$$I_h = I_{b/AN} + I_{A_s/AN} + I_{A'_s/AN}$$

avec : $I_{b/AN} = \frac{b \cdot y_s^3}{3}$

$$I_{A_s/AN} = n \cdot A_s (d - y_s)^2$$

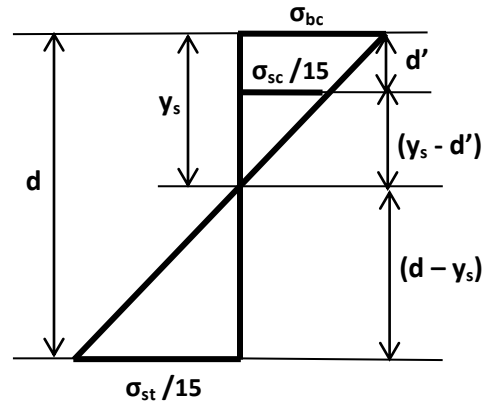
$$I_{A'_s/AN} = n \cdot A'_s (y_s - d')^2$$

$$\Rightarrow I_h = \frac{b \cdot y_s^3}{3} + n \cdot A_s (d - y_s)^2 + n \cdot A'_s (y_s - d')^2$$

3- Vérifications des contraintes :

Maintenant que l'on connaît la position de la fibre neutre y_s et l'inertie de la section homogénéisée, on peut appliquer la formule de Navier pour la flexion et vérifier les contraintes :

1. Pour la contrainte dans le béton :
$$\sigma_{bc} = \frac{M_{ser}}{I_h} \cdot y_s \leq \overline{\sigma_{bc}}$$



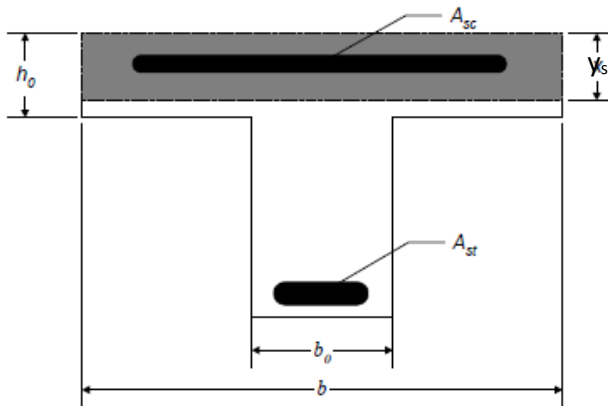
2. Pour la contrainte dans les aciers comprimés :
$$\sigma_{sc} = 15 \frac{M_{ser}}{I_h} \cdot (y_s - d') \leq \overline{\sigma_s}$$

3. Pour la contrainte dans les aciers tendus :
$$\sigma_{st} = 15 \frac{M_{ser}}{I_h} \cdot (d - y_s) \leq \overline{\sigma_s}$$

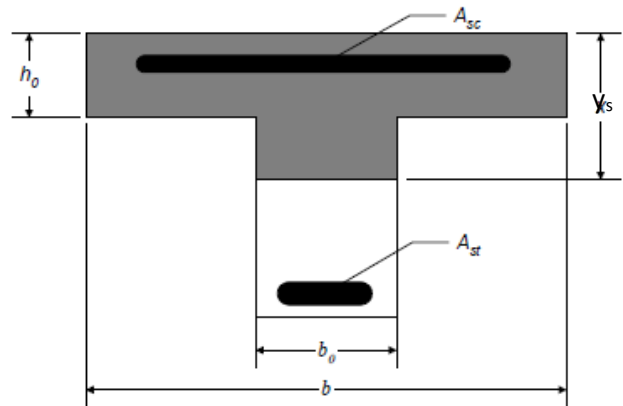
6-2-2- Etat limite de service pour une Section en T :

Le principe est le même que pour le cas d'une section rectangulaire. Les deux inconnues fondamentales qui doivent être déterminées pour la vérification sont y_s et I . Deux cas se présentent :

Cas 1 : axe neutre dans la table de compression



Cas 2 : axe neutre dans la nervure



Pour savoir où se situera l'axe neutre y_s , il est nécessaire d'effectuer un premier calcul en supposant que l'AN est dans la table, l'équilibre des moments statiques donnera :

$$b \times y_s^2 + 30 \cdot A_{sc}' \times (y_s - d') - 30 \cdot A_{st} \times (d - y_s) = 0 \quad \text{et en faisant la résolution de cette équation :}$$

- Si $y_s \leq h_0$, l'axe neutre est dans la table de compression (**cas 1**) les calculs sont identiques au cas d'une section rectangulaire (les équations ne changent pas).
- Si par contre $y_s > h_0$, l'axe neutre est dans la nervure (**cas 2**) :

→ l'équation pour déterminer la position de l'AN, y_s devient:

$$b_0 \times y_s^2 + \left[2(b - b_0) \times h_0 + 30(A_{sc}' + A_{st}') \right] \times y_s - (b - b_0)h_0^2 - 30(A_{sc}'d' + A_{st}'d) = 0$$

→ l'équation pour déterminer le moment quadratique I devient:

$$I = \frac{b \times y_s^3}{3} - \frac{(b - b_0)(y_s - h_0)^3}{3} + 15A'_{sc}(y_s - d')^2 + 15A_{st}(d - y_s)^2$$

$$\sigma_{bc} = K * y_s$$

$$\sigma_{sc} = 15 K * (y_s - d')$$

$$\sigma_{st} = 15 K * (d - y_s)$$

Avec: $K = M_{ser} / I$

Application :

Vérifiez l'état limite service pour une section (25 × 50) sollicitée par un moment de flexion à l'E.L.S

$M_{ser} = 0,2 \text{ MN.m.}$ avec $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et FeE400 ; $d' = 5 \text{ cm}$;

$A_{st} = 6T25 = 29,45 \text{ cm}^2$; $A_{sc} = 3T12 = 3,39 \text{ cm}^2$

Fissuration préjudiciable.

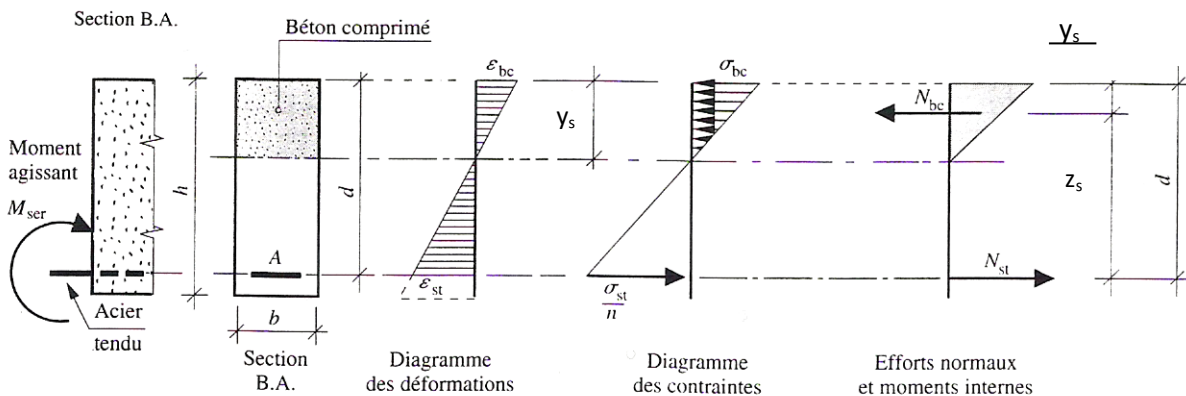
6-2-3- Principe de calcul des armatures à l'E.L.S. :

On a calculé, pour l'E.L.S, les contraintes dans une section pour laquelle les armatures ont été déterminées lors des calculs à l'E.L.U. Si les contraintes obtenues sont supérieures aux contraintes limites, il faut déterminer les nouvelles valeurs des armatures.

6-2-3-1- Cas de la section rectangulaire

Comme pour les E.L.U. nous distinguerons deux cas, suivant que la section peut être armée uniquement par des armatures tendues, ou qu'il est nécessaire de prévoir des armatures tendues et des armatures comprimées.

a) Condition de compression du béton vérifiée, la condition de fissuration non vérifiée



Avec :

N_{bc} : effort normal de compression du béton

N_{st} : effort normal de traction de l'acier A_s

$z_s = d - \frac{y_s}{3}$, bras de levier des efforts de compression du béton par rapport au CDG des aciers.

Equations d'équilibre (statique) :

Equilibre des efforts normaux :

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_{bc} = N_{st} \rightarrow b y_s \frac{\sigma_{bc}}{2} = A_s \bar{\sigma}_s \quad (1)$$

Equilibre des moments par rapport au CDG des aciers tendus :

$$\Sigma M(F) = 0 \rightarrow M_{ser} = N_{bc} \times z_s = N_{st} \times z_s$$

$$\rightarrow M_{ser} = b y_s \frac{\sigma_{bc}}{2} (d - y_s/3) = A_s \bar{\sigma}_s (d - y_s/3) \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow A_s = \frac{M_{ser}}{\bar{\sigma}_s (d - y_s/3)}$$

Equation de compatibilité :

Le théorème de Thalès sur les triangles semblables, appliqué au diagramme des contraintes donne :

$$\frac{\sigma_{bc}}{y_s} = \frac{\frac{\overline{\sigma}_s/n}{d - y_s}}{\frac{\overline{\sigma}_s/n}{d - y_s}} \rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\overline{\sigma}_s/n}{(d - y_s)} y_s \quad (3)$$

En remplaçant les valeurs de A_s et σ_{bc} dans l'équation (1) avec $\alpha_s = \frac{y_s}{d}$, on obtient une équation du 3^{ème} degré où l'inconnue est la profondeur de l'AN, α_s :

$$\overline{\sigma}_s \alpha_s^3 - 3 \overline{\sigma}_s \alpha_s^2 - (6n M_{ser}/bd^2) \alpha_s + (6n M_{ser}/bd^2) = 0$$

La résolution de cette équation est complexe, une technique simplifiée permet d'aboutir à la solution pour $0 \leq \alpha_s \leq 1$:

On calcule $\lambda = 1 + (30 M_{ser}/(bd^2 \overline{\sigma}_s))$ puis $\cos \varphi = \lambda^{-3/2}$ d'où φ en degré ;

On trouve $\alpha_s = 1 + 2\sqrt{\lambda} \cdot \cos (240^\circ + \varphi/3)$

On peut aussi utiliser le diagramme fourni par le code de calcul qui donne directement la valeur de α_s .

ayant obtenu α_s , on calcule $\sigma_{bc} = \frac{\overline{\sigma}_s/n}{(1 - \alpha_s)} \alpha_s \leq 0,6 f_{c28}$

Puis on obtient $A_s = \frac{M_{ser}}{\overline{\sigma}_s d(1 - \alpha_s/3)}$

b) Condition de compression du béton n'est pas vérifiée

On choisit de faire travailler les matériaux, béton et acier, à leur maximum. Pour cela, on pose donc :

1. $\sigma_{st} = \overline{\sigma}_{st}$ contrainte admissible de l'acier,
2. $\sigma_{bc} = \overline{\sigma}_{bc}$ contrainte admissible du béton.

On obtient donc les équations suivantes :

$$\text{La position de l'axe neutre : } \Rightarrow \overline{\alpha}_s = \frac{\overline{y}_s}{d} = \frac{15\overline{\sigma}_{bc}}{15\overline{\sigma}_{bc} + \overline{\sigma}_{st}}$$

Le moment résistant béton, M_{rb} , qui est le moment que peut reprendre le béton comprimé seul :

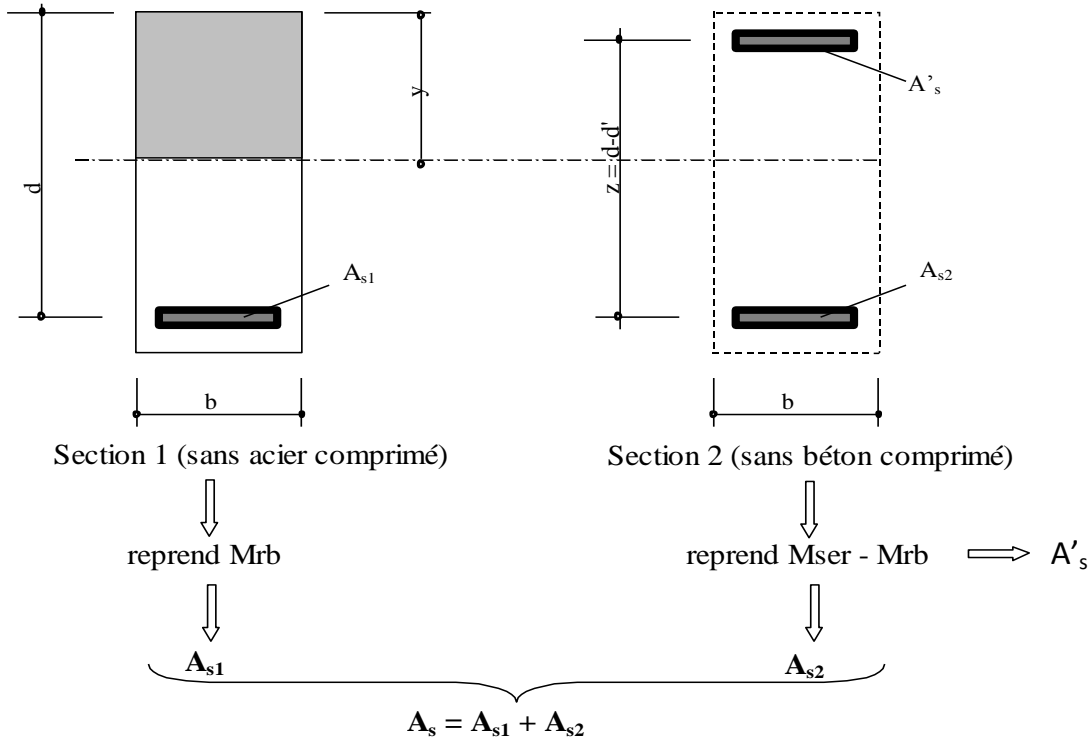
$$\Rightarrow M_{rb} = b \cdot \overline{y}_s \cdot \frac{\overline{\sigma}_{bc}}{2} \left(d - \frac{\overline{y}_s}{3} \right)$$

Calcul de la section d'acier :

Si : $M_{ser} \geq M_{rb} \Rightarrow$ Calcul des aciers tendus et comprimés

Le béton comprimé seul ne suffit pas pour reprendre l'effort de compression. On aura donc besoin d'aciers comprimés qui vont reprendre la différence $(M_{ser} - M_{rb})$

Pour simplifier les calculs, on décompose la section initiale en 2 sections fictives :



1. Etude de la section fictive 1, sans aciers comprimés :

Idem cas (a), sauf que cette section reprend M_{rb} et non M_{ser} : $A_{s1} = \frac{M_{rb}}{\sigma_{st} d(1 - \alpha_s/3)}$

2. Etude de la section fictive 2, sans béton :

1. Calcul de A'_s :

L'équilibre des moments par rapport au CDG des aciers tendus donne :

$$M_{ser} - M_{rb} = A'_s \cdot \sigma_{sc} \cdot (d - d') \quad \boxed{A'_s = \frac{M_{ser} - M_{rb}}{(d - d') \cdot \sigma_{sc}}}$$

La valeur de σ_{sc} est obtenue à l'aide des triangles semblables dans le diagramme des contraintes :

$$\frac{\bar{\sigma}_{bc}}{y_s} = \frac{\sigma_{sc}/n}{y_s - d'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{sc} = \frac{15\bar{\sigma}_{bc} \cdot (y_s - d')}{y_s}}$$

2. Calcul de A_{s2} :

L'équilibre des moments par rapport au CDG des aciers comprimés donne :

$$M_{ser} - M_{rb} = A_{s2} \cdot \bar{\sigma}_{st} \cdot (d - d') \quad \boxed{A_{s2} = \frac{M_{ser} - M_{rb}}{(d - d') \cdot \bar{\sigma}_{st}}}$$

Et la section totale d'armature tendue aura l'expression :

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = \frac{M_{rb}}{\sigma_{st} d(1 - \alpha_s/3)} + \frac{M_{ser} - M_{rb}}{(d - d') \bar{\sigma}_{st}}$$

6-2-3-2- Cas de la section en T

Les calculs sont basés sur un principe identique mais peuvent s'avérer beaucoup plus long et compliqués compte tenu de la présence de la table de compression.

Seule une méthode approchée pour les sections en T sans armatures comprimées est détaillée. Les sections en T avec armatures comprimées ne seront pas traitées puisqu'elles sont souvent dimensionnées pour ne pas nécessiter d'armatures comprimées.

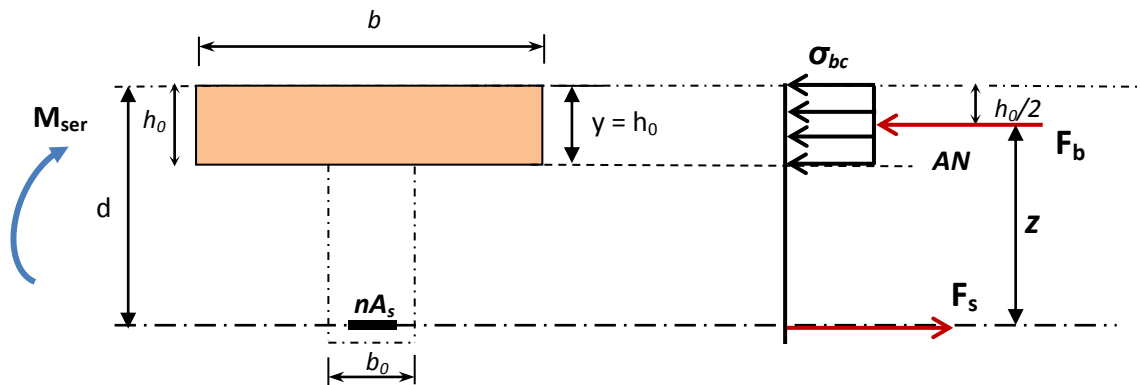
Méthode de calcul approchée : (sans armatures comprimées)

$$\text{On a toujours : } A_s = \frac{M_{ser}}{\sigma_s \cdot z}$$

La seule inconnue dans cette formule est le bras de levier z .

- Hypothèses complémentaires :

- Toute la table et seulement la table de compression est comprimée.
- La répartition des contraintes est uniforme.



$$F_b = bh_0\sigma_{bc}$$

$$F_s = A_s\bar{\sigma}_s$$

Il vient alors : $z = d - h_0/2$