Chapitre 4

Transformée de Laplace

Introduction

La TF que nous avons vu au chapitre 2, est limitée aux signaux qui vérifiés certaines conditions. Par exemple le signal $x(t) = e^{at}u(t) \quad (a > 0)$ n'a pas de TF puisque l'intégrale ne converge pas. La transformée de Laplace (TP) permit d'élargir la transformation à une plus grande classe de signaux.

Transformée de Laplace bilatérale

Nous avons vu que la TF d'un signal $x(t)$ est donnée par

$$X(j2\pi f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

La TF du signal $x(t)e^{-\sigma t}$ est

$$X(\sigma + j2\pi f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j2\pi f)t}dt$$

Posons $s = \sigma + j2\pi f$, alors nous avons

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

L'équation ( ) est la définition de la TL bilatérale. Le nombre complexe est appelé fréquence complexe.

Pour définir la TL inverse, on remarque que,

$$x(t)e^{-\sigma t} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j2\pi f)e^{j2\pi ft}df$$

Alors

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j2\pi f)e^{\sigma t}e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(s)e^{st}df$$

Remarquons aussi que $ds = j2\pi df$, on obtient

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(s)e^{st}ds}$$

<u>Exemple</u>: Soit le signal $x(t) = e^{-at}u(t)$.

La TL est:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}$$

Transformée de Laplace unilatérale

$$X(s) = \int_{0}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

<u>Exemples</u>:

Soit alors $X(s) = \int_{0}^{+\infty} u(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}$

Soit $x(t) = \delta(t)$, alors $X(s) = \int_{0}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1$.

Soit $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, $(2\pi f_0 = \omega_0)$, alors

$$X(s)=\int_0^{+\infty}\cos(\omega_0 t)e^{-st}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[e^{j\omega_0 t}e^{-st}+e^{-j\omega_0 t}e^{-st}\right]dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[e^{-(s-j\omega_0)t}+e^{-(s+j\omega_0)t}\right]dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{-(s-j\omega_0)}+\frac{-1}{-(s+j\omega_0)}\right]=\frac{s}{s^2+\omega_0}$$

Soit $x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{4t}u(t)$, alors

$$X(s)=\int_0^{+\infty}\left(e^{-2t}+e^{4t}\right)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s+2)t}dt+\int_0^{+\infty}e^{-(s-4)t}dt$$
$$=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s-4}=\frac{2s-2}{(s+2)(s-4)}$$

Propriétés

Linéarité

La TL est linéaire:

$$\boxed{ax_1(t)+bx_2(t)\xrightarrow{TL}aX_1(s)+bX_2(s)}$$

Décalage

Si $x(t)\xrightarrow{TL}X(s)$ alors

$$\boxed{x(t-t_0)\xrightarrow{TL}X(s)e^{-st_0}}$$

On peut démontrer cette propriété par un simple changement de variable.

<u>Exemple</u>: Si $x(t)=u(t)-u(t-2)$, alors $X(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-2s}=\frac{1}{s}\left(1-e^{-2s}\right)$

Dilatation du temps

Si $x(t)\xrightarrow{TL}X(s)$ alors

$$\boxed{x(at)\xrightarrow{TL}\frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)}$$

<u>Exemple</u>: Si $x(t)=2t, t\geq 0$ alors $X(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{(s/2)^2}=\frac{2}{s^2}$

Convolution

La convolution dans le temps correspondre au produit dans le domaine fréquentiel:

$$\boxed{x_1(t)*x_2(t)\xrightarrow{TL}X_1(s)X_2(s)}$$

<u>Exemple</u>: soit à calculer la réponse du système $h(t)=(e^{-2t}+e^{-t})u(t)$ pour l'entrée $x(t)=e^{-2t}u(t)+\delta(t)$ alors, nous avons

$y(t)=h(t)*x(t)$

et

$Y(s)=H(s)X(s)$

Avec

$$H(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+1}=\frac{2s+3}{(s+2)(s+1)}$$

$X(s) = \frac{1}{s+2} + 1 = \frac{3+s}{s+2}$

Enfin,

$Y(s) = H(s).X(s) = \frac{(2s+3)(s+3)}{(s+2)^2(s+1)}$

Dérivation dans le temps

$$\mathrm{TL}[\dot{x}] = \int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = sX(s) - x(0)$$

$$\mathrm{TL}[\ddot{x}] = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathrm{TL}[\dddot{x}] = s^3X(s) - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \ddot{x}(0)$$

<u>Exemple</u>: Soit $x(t) = \cos t$. Nous avons ,

$$\mathrm{TL}[\cos t] = \mathrm{TL}\left[\frac{d \sin t}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = s\frac{1}{s^2+1} - \sin(0) = \frac{s}{s^2+1}$$

<u>Généralisation:</u>

$$\boxed{\mathrm{TL}[x^{(m)}] = s^mX(s) - s^{m-1}x(0) - s^{m-2}\dot{x}(0) - s^{m-3}\ddot{x}(0) - .. - sx^{(m-2)}(0) - x^{(m-1)}(0)}$$

Dérivation en fréquence

Soit $x(t) \xrightarrow{TL} X(s)$, alors

$$\boxed{\mathrm{TL}\left[tx(t)\right] = -\frac{dX(s)}{ds}}$$

<u>Exemple</u>: Soit $x(t) = tu(t)$. Nous avons , alors

$$\mathrm{TL}\left[tu(t)\right] = -\frac{dU(s)}{ds} = -\left(\frac{-1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

Intégration

$$\mathrm{TL}\left[\int_0^t x(v)\,dv\right] = \int_0^{+\infty}\int_0^t x(v)e^{-st}dvdt = \frac{-1}{s}e^{-st}\int_0^t x(v)dv\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$
$$= \frac{1}{s}X(s) - \frac{1}{s}\int_0^t x(v)dv\Big|_{t=0}$$

Pour les systèmes causaux, le deuxième terme est nul, soit

$$\mathrm{TL}\left[\int x(v)\,dv\right] = \frac{1}{s}X(s)$$

<u>Exemple</u>: $\sin(\omega_0 t) = \omega_0 \int \cos(\omega_0 v)dv$. Utilisons la formule ( ),

$$\mathrm{TL}\left[\int \cos(\omega_0 t)\right] = \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+\omega_0^2} - \frac{1}{s}(0) = \frac{1}{s^2+\omega_0^2}$$

Alors

$$\mathrm{TL}\left[\sin(\omega_0 t)\right] = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

Théorèmes des valeurs initiale et finale

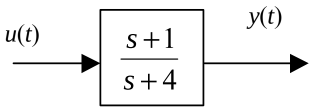
La valeur initiale du signal $x(t)$ est donnée par:

$$\boxed{x(0) = \lim_{s \to +\infty} sX(s)}$$

et la valeur finale est donnée par:

$$\boxed{x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s)}$$

<u>Exemple</u>: soit à calculer les valeurs initiale et finale de la réponse du système à un échelon.



$$Y(s) = U(s)H(s) = \frac{1}{s}\frac{s+1}{s+4}$$

Alors la valeur initiale de la sortie est:

$$y(0) = \lim_{s \to \infty} sY(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{s+1}{s+4} = 1$$

et la valeur finale est:

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s+1}{s+4} = \frac{1}{4}$$

Décalage de fréquence

Si $x(t) \overset{TL}{\rightarrow} X(s)$ alors

$$\boxed{x(t)e^{at} \overset{TL}{\rightarrow} X(s+a)}$$

<u>Exemple</u>: Soit $x(t) = e^{at}\cos(\omega_0 t)$, connaissons la TL du cosinus, nous aurons

$$X(s) = \frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

Transformée de Laplace inverse

Pour recouvrir le signal dans le temps, on n'utilise, généralement, pas l'intégrale ( ). Pour cela on utilise la décomposition en fraction rationnelles, et la table des TL pour retrouver la correspondance avec le temps.

Soit la TL donnée par :

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

En utilisant les racines $s_1, s_2, \ldots, s_n$, on peut écrire le dénominateur comme:

$$D(s) = (s - s_1)(s - s_2)..(s - s_n)$$

Alors, si les racines sont toutes distinctes, ( ) peut être décomposé comme

$$X(s) = \frac{A_1}{(s - s_1)} + \frac{A_2}{(s - s_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(s - s_n)}$$

Les cœfficients de la décomposition sont calculé suivant la formule

$$A_i = \lim_{s \to s_i}(s - s_i)X(s)$$

Exemple: Soit la TL

$$X(s)=\frac{10}{s^2+10s+16}=\frac{10}{(s+2)(s+8)}.$$

Pour décomposer $X(s)$ on l'écrit sous la forme suivante

$$X(s)=\frac{10}{(s+2)(s+8)}=\frac{A_1}{(s+2)}+\frac{A_2}{(s+8)}$$

Alors nous avons

$$A_1=\lim_{s\to-2}(s+2)\frac{10}{(s+2)(s+8)}=\lim_{s\to-2}\frac{10}{(s+8)}=5/3$$

et

$$A_2=\lim_{s\to-8}(s+8)\frac{10}{(s+2)(s+8)}=\lim_{s\to-8}\frac{10}{(s+2)}=-5/3$$

D'où

$$X(s)=\frac{5}{3}\left[\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+8}\right]$$

En utilisant la table des TL, on retrouve

$$x(t)=\frac{5}{3}\left[e^{-2t}u(t)+e^{-8t}u(t)\right]$$

Exemple: Soit la TL $X(s)=\dfrac{10s}{(s+2)^2(s+8)}$.

La décomposition est la suivante:

$$X(s)=\frac{A_1}{(s+2)}+\frac{A_2}{(s+2)^2}+\frac{A_3}{(s+8)}$$

Alors nous avons

$$A_3=\lim_{s\to-8}(s+8)\frac{10s}{(s+2)^2(s+8)}=\lim_{s\to-8}\frac{10s}{(s+2)^2}=-20/9$$

$$A_2=\lim_{s\to-2}(s+2)^2\frac{10s}{(s+2)^2(s+8)}=\lim_{s\to-2}\frac{10s}{(s+8)}=-10/3$$

et

$$A_1=\lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left[(s+2)^2\frac{10s}{(s+2)^2(s+8)}\right]=\lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left[\frac{10s}{(s+8)}\right]$$
$$=\lim_{s\to-2}\frac{10(s+8)-10s}{(s+8)^2}=\lim_{s\to-2}\frac{80}{(s+8)^2}=20/9$$

D'où

$$X(s)=\frac{20}{9}\left[\frac{1}{(s+2)}-\frac{3}{2}\frac{1}{(s+2)^2}-\frac{1}{(s+8)}\right]$$

En utilisant les tables des TL, on retrouve

$$x(t)=\frac{20}{9}\left[e^{-2t}u(t)-\frac{3}{2}te^{-2t}u(t)-e^{-8t}u(t)\right]$$

En général, si nous avons

$$X(s) = \frac{1}{(s-s_0)^k}$$

avec $k = 2, 3, \ldots$, alors la décomposition est la suivante

$$X(s) = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{(s-s_0)^i}$$

et les cœfficients A_i donnés par

$$A_i = \frac{1}{(k-i)!} \lim_{s \to s_0} \frac{d^{k-i}}{ds^{k-i}} \left[(s-s_0)^k X(s) \right]$$

<u>Exemple</u>: Soit $X(s) = \frac{2s^2+6s+6}{(s+2)(s^2+2s+2)}$. Les racines du dénominateur sont, -2, $1+j$ et $1-j$. Comme ces racines sont distinctes on peut utiliser la décomposition pour calculer les cœfficients. Mais on préfère une autre méthode sans passer par les complexes. On peut écrire $X(s)$ comme:

$$X(s) = \frac{A_1}{(s+2)} + \frac{A_2 s + A_3}{(s^2+2s+2)}$$

Alors nous avons

$$A_1 = \lim_{s \to -2} [(s+2)X(s)] = 1$$

Plusieurs techniques existent pour calculer les deux autres coefficients, parmi lesquelles, on peut remplacer s avec une valeur donnée.

$$X(0) = \frac{1}{2} + \frac{A_3}{2} = 3/2$$

Ce qui donne $A_3 = 2$. Pour calculer A_2 on multiplie $X(s)$ par s et on fait tendre $s \to \infty$, soit

$$\lim_{s \to \infty} sX(s) = 1 + A_2 = 2$$

D'où $A_2 = 1$, donc

$$X(s) = \frac{1}{(s+2)} + \frac{s+2}{(s^2+2s+2)}$$

Pour revenir dans le temps, remarquons que lorsque nous avons des racines complexes ça implique que dans le temps nous avons des sinusoïdes ou des sinusoïdes amorties.

Pour cela on écrit $(s^2+2s+2) = (s+1)^2 + 1$. Donc le deuxième terme peut être écrit comme

$$\frac{s+2}{(s^2+2s+2)} = \frac{s+2}{(s+1)^2+1} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

D'où

$$X(s) = \frac{1}{(s+2)} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

D'après la table des TL nous avons

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(t)u(t) + e^{-t}\sin(t)u(t)$$

Analyse des systèmes LTI

Fonction de Transfert

Exemple: Soit le système donnée par:

$$\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+10y(t)=3x(t)$$

avec les conditions initiales suivantes: $y(0)=1, \dot{y}(0)=2$ et $\ddot{y}(0)=-2$.

Prenons la TL,

$$\left[s^3Y(s)-s^2y(0)-s\,\dot{y}(0)-\ddot{y}(0)\right]+2\left[s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)\right]-5\left[sY(s)-y(0)\right]+10Y(s)=3X(s)$$

Soit

$$\left[s^3+2s^2-5s\right]Y(s)-\left[s^2+4s-5+10\right]=3X(s)$$

Enfin,

$$Y(s)=\frac{s^2+4s-5}{s^3+2s^2-5s+10}+\frac{3}{s^3+2s^2-5s+10}X(s)$$

Le rapport

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{3}{s^3+2s^2-5s+10}$$

est appelée fonction de transfert du système, dont on doit noter les points suivants:

1) La fonction de transfert est indépendante de l'entrée, c'est une caractéristique du système lui même.
2) Pour des conditions initiales nulles $H(s)=Y(s)/X(s)$.
3) Pour un systèmes LTI c'est une fonction rationnelle de s.
4) Les racines du polynôme $N(s)$ sont appelées les zéros de la fonction de transfert et les racines du polynôme $D(s)$ sont appelées pôles de la fonction de transfert.

Réponse impulsionnelle

La TL inverse $h(t)$ de $H(s)$ est la réponse impulsionnelle du système. Puisque pour $x(t)=\delta(t)$ alors $X(s)=1$, d'où $Y(s)=H(s)$.

Exemple: Soit le système donné par :

$$\ddot{y}-3\dot{y}+2y=\dot{x}+2x$$

Prenant la TL, avec toutes les conditions initiales nulles:

$$\left[s^2-3s+2\right]Y(s)=[s+2]X(s)$$

et la fonction de transfert est:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+2}{s^2-3s+2}$$

Pour calculer la réponse impulsionnelle, on décompose $H(s)$ en fractions rationnelles, soit:

$$H(s)=\frac{4}{s-2}-\frac{3}{s-1}$$

et en prenant la TL inverse:

$$h(t)=\left[4e^{2t}-3e^{t}\right]u(t)$$

Réponse indicielle

La réponse du système à un échelon est donnée par

$$Y(s) = \frac{1}{s} H(s)$$

Ce qui donne l'intégrale de la réponse impulsionnelle.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(v) dv$$

Soit pour l'exemple précédent:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{s+2}{s^2 - 3s + 2} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s-2} - \frac{3}{s-1}$$

Soit

$$y(t) = \left[1 + 2e^{2t} - 3e^{t}\right] u(t)$$