Chapitre 4 : Torsion simple

4.1 Définition :

Une poutre est sollicitée à la torsion simple si elle est soumise à deux couples de moments opposés portés par la ligne moyenne.

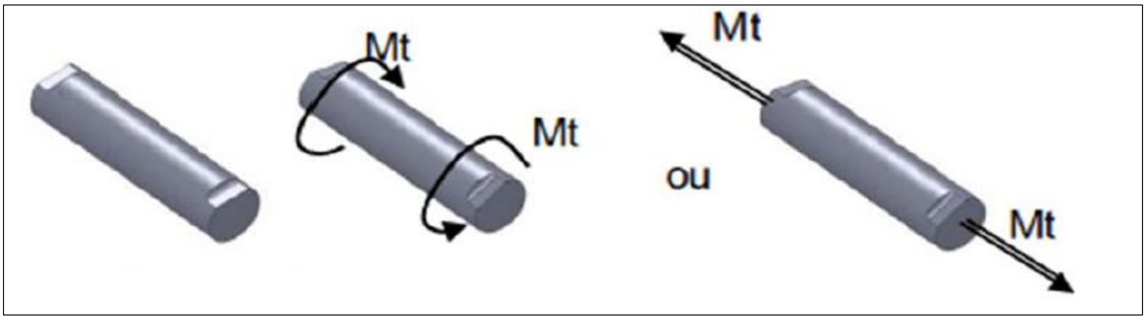


Figure 4.1. *Moments des actions extérieurs appliqués à la poutre*

- La poutre est supposée à section circulaire constante et de poids négligé.
- Le torseur efforts de cohésion à la section droite (S) de centre de surface G est défini par :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

4.2 Essai de torsion simple :

- **Principe :**

Une éprouvette cylindrique de révolution est encastrée à son extrémité (S1) de centre de gravité G1. On applique à l'extrémité droite sur la section (S2) de centre de gravité G2 une action mécanique modélisée en G2 par un torseur « couple » : $\{\tau\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_{G_2} \end{Bmatrix}_{G_2}$

En faisant croître $\vec{M}_{G_2} = M_{G_2}.\vec{x}$, on mesure les déformations de la poutre.

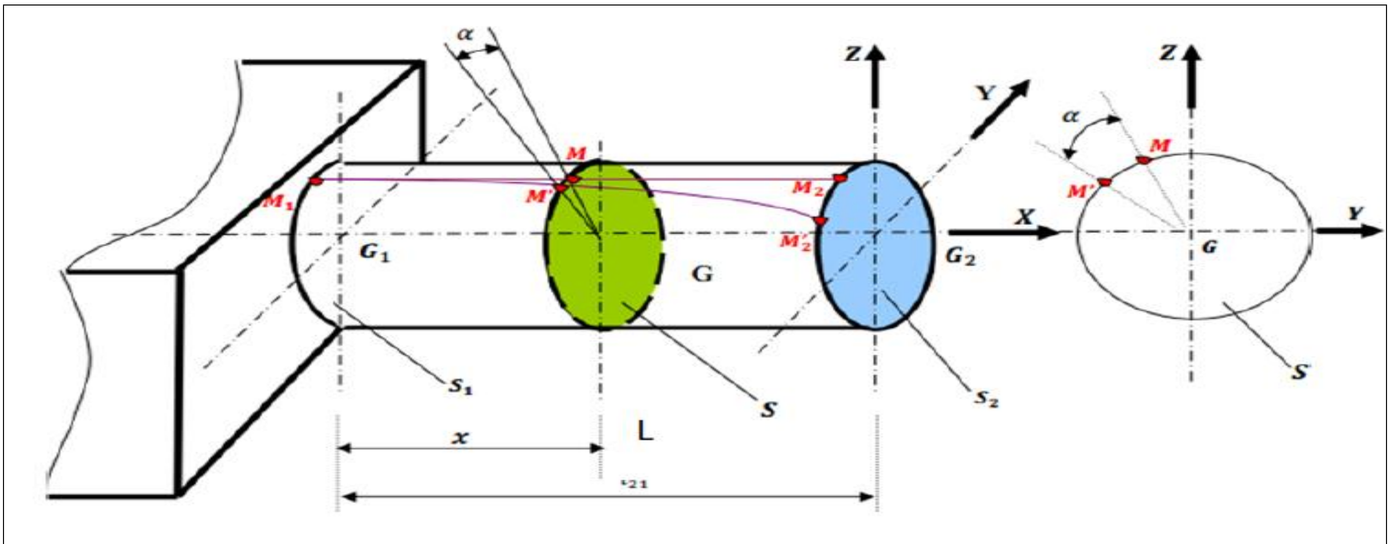
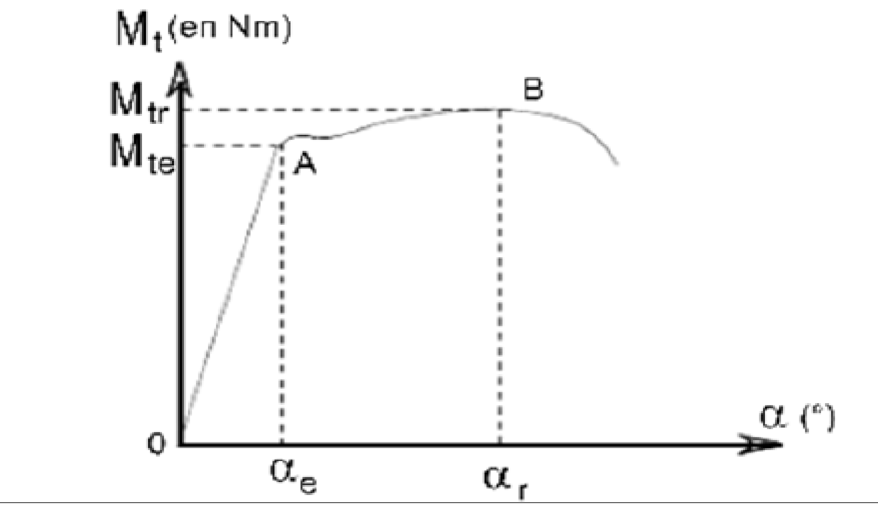


Figure 4.2 *: Illustration de l'essai de torsion simple.*

- **Résultats :**

Le déplacement d'une section droite (S) est uniquement une rotation d'un angle α autour de son axe, et cette rotation est proportionnelle à sa distance x par rapport à (S1).
On obtient une courbe illustrée à la Figure 4.3 semblable à celle de l'essai de traction :

Figure 4.3 : courbe *Mt=f(α)*



Elle comprend une zone de **déformations élastiques** où l'angle de torsion α est proportionnel au moment de torsion. A partir du point A les déformations croissent rapidement jusqu'à avoir rupture de l'éprouvette.

4.3. Etude des déformations :

- L'essai montre que toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe et que la distance relative entre deux sections reste sensiblement constante. Toutes les fibres se déforment donc suivant une hélice, sauf la ligne moyenne qui reste droite.

- On constate que le rapport $\boxed{\theta = \frac{\alpha}{x}}$ reste toujours constant. Ce rapport est appelé **angle unitaire** de torsion [rad /mm].
  α= Angle de rotation de la section S en rad.
  x = Distance séparant S à la section de référence S_0 en mm.

4.4. Étude des contraintes :

- On considère un petit élément de longueur Δx d'une fibre : Après déformation, le point M2 (Figure 4.2) situé à une distance du point G vient en M2', la génératrice M1M2 subit alors une déviation γ.
  la distance relative entre deux sections reste constante au cours de la déformation, donc l'allongement Δx = 0, alors on peut écrire que la déformation longitudinale $\boldsymbol{\varepsilon_x=0}$, on admet donc que la composante normale nulle.

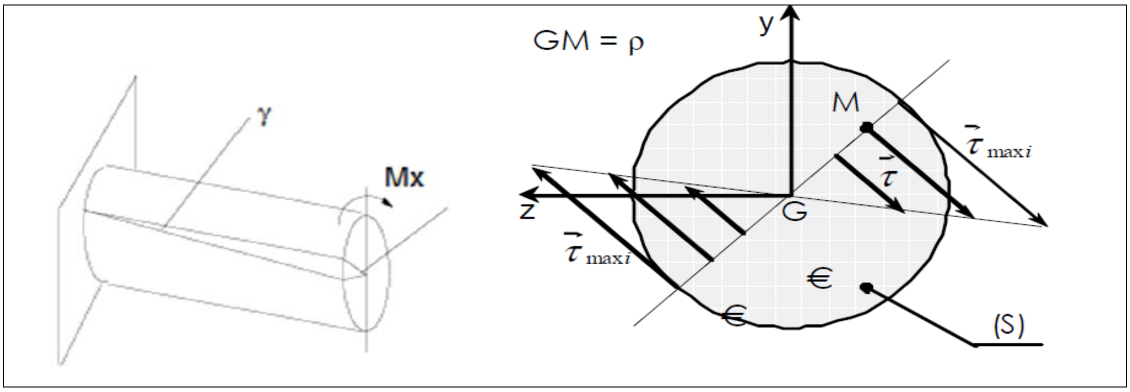


Figure 4.4 : Répartition des contraintes au niveau de la section.

- La loi de Hooke pour les contraintes tangentielles s'exprime donc par : $\tau = G.\ \gamma$

Où **G** est **le module d'élasticité transversale** ou module de Coulomb.

Comme l'angle γ est petit : l'arc ***M2M2' = αρ = γ x***, on aura $\gamma = \dfrac{\alpha.\rho}{x} = \theta.\rho$

La contrainte tangentielle s'écrit : $\tau = G.\ \theta.\rho$

Avec :

τ: Contrainte tangentielle de torsion (en MPa)
ρ: Distance du point M à la ligne neutre ou axe de la pièce qui ne subit aucun effort (en mm)
θ: Angle unitaire (en rad/ mm)
G : Module d'élasticité transversal ou module de coulomb (en MPa)

- **Remarque :**

τ_{Max} est atteinte pour les points M périphériques de la surface du solide tels que ρ= R (Rayon)

4.5. Relation entre contrainte et moment de torsion :

En un point M de la section, Le vecteur contrainte s'écrit : $\vec{C}(M,\vec{x}) = \tau_{(M)}\vec{t} = G\theta r\vec{t}$

Le moment de torsion est suivant l'axe (0,x) s'écrit : $\vec{M}_t = M_t\vec{x}$

D'autre part :

$$\vec{M}_t = \int_S \vec{GM} \wedge \vec{C}(M,\vec{x})dS = \int_S r\vec{x}_1 \wedge G\theta r\vec{t}\,dS = G\theta\int_S r^2 dS\vec{x} \Rightarrow M_t = G\theta\int_S r^2 dS$$

$\int_S r^2 dS$: est par définition le moment quadratique polaire de la surface S par rapport à son centre de gravité G. Il est noté I_G qui dépend de la forme et des dimensions de cette section.

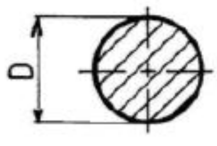
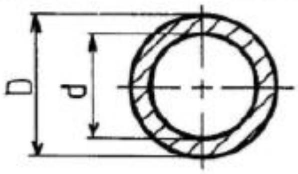
Sections	Caractéristiques
	$I_o = \dfrac{\pi D^4}{32}$ $\dfrac{I_o}{R} = \dfrac{\pi D^3}{16}$
	$I_o = \dfrac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right)$ $\dfrac{I_o}{R} = \dfrac{\pi D^3}{16} - \dfrac{\pi d^3}{16}$

Figure 4.5 : *Moment quadratique polaire en fonction de la section.*

La relation entre le moment et la déformation (équation de déformation) est: $Mt = G\ \theta\ I_{Gz}$

Il en découle $\boxed{\tau_{(M)} = \dfrac{M_t}{I_G} r \text{ ou } \tau_{(M)} = \dfrac{M_t}{\dfrac{I_G}{r}}}$

La contrainte maximale de torsion est obtenue pour r=R : $\boxed{\tau_{max} = \dfrac{M_t}{I_G} R}$

Mt: [N mm]; θ[rad/mm]; G[Mpa] et I_G: [mm^4]

4.6. Condition de résistance:

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale τ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique au glissement τ_p .

On a :

$$\boxed{\tau_p = \frac{\tau_e}{s}}$$

S : est un coefficient de sécurité.

La condition de résistance traduit simplement le fait que la contrainte réelle ne doit pas dépasser le seuil précédent, soit :

$$\boxed{\tau_{réelle} = \frac{Mt}{\left(\frac{I_o}{\rho_{maxi}}\right)} < \tau_p}$$

la contrainte τ_{max} doit rester inférieure à la valeur de la contrainte pratique au glissement Rpg, en adoptant un coefficient de sécurité S tel que Rpg = Re/S , où S dépend de l'application.

D'où la condition de résistance d'une pièce en torsion : $\boxed{\tau_{max} \leq R_{pg} \Rightarrow \frac{M_t}{I_G} R \leq R_{pg}}$

4.7. Condition de déformation (rigidité) :

Le calcul des dimensions des barres de torsion se fait plus par une condition de déformation qu'une condition de résistance. En effet pour assurer une transmission rigide et éviter les vibrations, l'angle de torsion unitaire θ ne doit pas dépasser pendant le service, une valeur limite $\boldsymbol{\theta_{lim}}$.

D'où la condition de rigidité d'une pièce en torsion :

$$\frac{M_t}{GI_G} \leq \theta_{\lim}$$

4.8. Exemple

Une poutre en acier de longueur L=1m est sollicité en torsion par un couple M=1500 Nm.

Sous l'action de ce couple, on désire que l'angle unitaire de torsion reste inférieur à une valeur limite α_L=0.25 °/m et que la contrainte de cisaillement soit inférieure à 120 N/mm2.

On prendra G=8.104 N/mm2 et ρ=7800 kg/m3.

a) Calculer le diamètre admissible D1 de la poutre.

b) On suppose que la poutre est un tube de diamètre extérieur De=90 mm. Quel doit-être le diamètre intérieur Di ?

c) Quelle économie de masse a-t-on réalisée ?