

Chapitre 3: Modélisation et commande vectorielle du moteur asynchrone

I. Modélisation de la machine asynchrone

I.1 Introduction

Le moteur asynchrone MAS (induction motor / asynchronous motor en Anglais) étant la machine électrique la plus utilisée dans l'industrie et dans la vie domestique à cause de ces avantages par rapport aux autres variantes de machines électriques, dont on cite :

- Possède une large plage de variation de vitesse.
- Robustesse mécanique par nature surtout pour la machine à rotor à cage.
- Coût faible.
- Maintenance quasi-inexistante.
- Pas de limitation des domaines d'application.

Traditionnellement, le modèle du moteur à induction utilisé dans la plupart des entraînements à vitesse variable, sous concept de la commande vectorielle, étant à paramètres constants (inductances et résistances des différents enroulements sont constantes) pour des raisons de simplicité. Parmi les hypothèses de simplification faites, on cite :

- Le circuit magnétique de la machine n'est pas saturé
- L'effet de peau et les harmoniques d'encoches sont négligés.
- Les pertes fer et les pertes supplémentaires ne sont pas prises en considération.
- Le régime homopolaire n'est pas considéré (le neutre n'est pas relié).

Ces hypothèses signifient entre autres que :

- Les flux sont additifs,
- Les inductances propres sont constantes,
- Il y a une variation sinusoïdale des inductances mutuelles entre les enroulements statoriques et rotoriques en fonction de l'angle électrique de leurs axes magnétiques θ .

I.2 Modèle du moteur asynchrone triphasé dans le système d'axes réel (*abc*)

Le stator de la MAS considérée comporte un enroulement triphasé (trois phases identiques, à p paires de pôles, leurs axes distant entre eux d'un angle électrique de $2\pi/3$. Les 3 phases statoriques sont parcourues par un système triphasé de tensions sinusoïdales de fréquence f_s et d'amplitude constante.

Quant au rotor, il peut être de deux manières :

- **Rotor bobiné** (*Wound rotor*)

Un enroulement triphasé identique à celui du stator (connecté en étoile/triangle). Ces 3 phases sont mises en court-circuit au régime permanent par le biais d'un système balais-bagues. Notons que cet enroulement est accessible pour la mesure des courants rotoriques.

- **Rotor à cage** (*Squirrel cage*)

Constitué de conducteurs (en Aluminium/Cuivre) et court-circuités aux extrémités par des anneaux conductrices ayant la forme ainsi d'une cage. Les courants rotoriques ne sont plus accessibles pour la mesure.

La figure 1 illustre la représentation des enroulements de la MAS par 3 enroulements au stator notés S_a, S_b, S_c et au rotor par R_a, R_b, R_c . La position de la première phase du rotor R_a est repérée par rapport à la première phase du stator S_a par un angle électrique noté θ . Les enroulements du rotor sont en court-circuit.

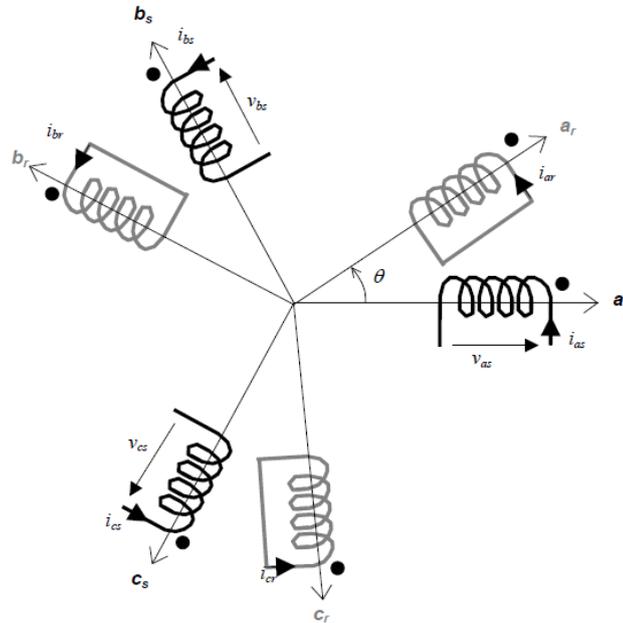


Fig. 1 : Représentation des enroulements de la MAS triphasée au stator et au rotor.

Par application de la loi d'Ohm généralisée aux enroulements de la machine :

$$v = R i + \frac{d\varphi}{dt} \quad (1)$$

On en déduit pour l'ensemble des 3 phases statoriques de même résistance R_s , la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{sc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{sa} \\ \varphi_{sb} \\ \varphi_{sc} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ou sous forme condensée:

$$v_{sabc} = R_s i_{sabc} + \frac{d\varphi_{sabc}}{dt} \quad (3)$$

De même pour les enroulements rotoriques ayant une résistance R_r :

$$\begin{bmatrix} v_{ra} \\ v_{rb} \\ v_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{ra} \\ \varphi_{rb} \\ \varphi_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ car le rotor est en court-circuit.}$$

Ou sous forme condensée par:

$$v_{rabc} = R_r i_{rabc} + \frac{d\varphi_{rabc}}{dt} = 0 \quad (4)$$

$\varphi_{sabc}, \varphi_{rabc}$: les flux des 3 phases du stator et du rotor respectivement

i_{sabc}, i_{rabc} : les courants des 3 phases du stator et du rotor respectivement

v_{sabc}, v_{rabc} : les tensions des 3 phases du stator et du rotor respectivement

La relation donnant la matrice des flux de la machine $[\varphi]$ en fonction de celle des inductances $[m_{sr}]$ et celle des courants $[i]$ est :

$$[\varphi] = [m_{sr}][i] \quad (5)$$

Chaque phase du stator /du rotor est embrassé par six variantes de flux produits par les différents courants parcourant ces phases. En effet, pour la phase a du stator, on pourra écrire :

$$\varphi_{sa} = \underbrace{l_s i_{sa}}_{\text{flux propre}} + \underbrace{M_s i_{sb} + M_s i_{sc}}_{\text{interaction stator-stator}} + \underbrace{M_1 i_{ra} + M_3 i_{rb} + M_2 i_{rc}}_{\text{interaction rotor-stator}} \quad (6)$$

l_s, l_r : inductances propres du stator et du rotor respectivement.

R_s, R_r : résistances des phases du stator et du rotor respectivement.

M_s : mutuelle inductance entre 2 phases du stator, de valeur constante.

M_r : mutuelle inductance entre 2 phases du rotor, de valeur constante.

Soit pour les deux enroulements de la machine :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{sa} \\ \varphi_{sb} \\ \varphi_{sc} \\ \varphi_{ra} \\ \varphi_{rb} \\ \varphi_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_s & M_s & M_s & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ M_s & l_s & M_s & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ M_s & M_s & l_s & m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{11} & m_{21} & m_{31} & l_r & M_r & M_r \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & M_r & l_r & M_r \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & M_r & M_r & l_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \\ i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Que l'on peut mettre sous la forme de 4 sous matrices:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{sabc} \\ \varphi_{rabc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_s] & [M_{sr}] \\ [M_{rs}] & [L_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sabc} \\ i_{rabc} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[L_s] = \begin{bmatrix} l_s & M_s & M_s \\ M_s & l_s & M_s \\ M_s & M_s & l_s \end{bmatrix}, [L_r] = \begin{bmatrix} l_r & M_r & M_r \\ M_r & l_r & M_r \\ M_r & M_r & l_r \end{bmatrix}$$

Assumons que la loi de variation des inductances mutuelles stator-rotor d'une machine multipolaire (ayant p paire de pôles) m_{sr} en fonction de la position du rotor (θ) s'écrit par :

$$m_{sr} = M_{sr} \cos \left[p\theta + (r - s) \frac{2\pi}{3} \right] \quad (9)$$

M_{sr} : valeur maximale de l'inductance mutuelle entre une phase statorique et une phase rotorique obtenue lorsque leurs axes sont alignés.

r : rang de la phase du rotor, $r = 1,2,3$

s : rang de la phase du stator, $s = 1,2,3$

p : nombre de paire de pole de la machine.

$$[M_{sr}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}, \quad [M_{rs}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (10)$$

En utilisant l'équation (9), les éléments de la matrice inductance mutuelle stator-rotor notée $[M_{sr}]$ sont donnés par :

$$[M_{sr}] = [M_{rs}]^t = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos(p\theta) & \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(p\theta) & \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos(p\theta) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Remarques :

- Les éléments de la matrice des inductances sont fonction de la position du rotor (θ), donc dépendants du temps.
- La matrice des inductances présente un grand nombre de paramètres électromagnétiques.

$$[v_{sabc}] = [R_s][i_{sabc}] + \left(\frac{d}{dt}\right) \{ [L_s][i_{sabc}] + [M_{sr}][i_{rabc}] \} \quad (12)$$

$$[v_{rabc}] = [0] = [R_r][i_{rabc}] + \left(\frac{d}{dt}\right) \{ [M_{sr}]^t[i_{sabc}] + [L_r][i_{rabc}] \} \quad (13)$$

On remarque que les équations du modèle triphasé (12) et (13) sont complexes à manipuler, présentant des non linéarités avec grandes interactions. Il est donc très difficile de l'utiliser pour la commande. Pour ces raisons, on doit utiliser la transformation des axes par des matrices de passages (matrice de Park, matrice de Concordia et de Clarke).

L.3 Transformation de Park appliquée à la machine asynchrone

Le modèle triphasé présenté est un système multi-variable, non linéaire et fortement couplé, d'où la complexité d'en tirer des stratégies de commande simples, Pour remédier à cet handicap, Park a proposé une matrice de passage $[P]$ du modèle du système triphasé réel (abc) au système diphasé d'axes ($d-q$) perpendiculaire ($\vec{O\bar{d}}, \vec{O\bar{q}}$) = $\frac{\pi}{2}$. L'axe $\vec{O\bar{d}}$ est repéré par rapport à l'axe de référence

\vec{Oa} par l'angle électrique $\psi = (\vec{Oa}, \vec{Od})$. Un tel passage a pour conséquence d'avoir un modèle plus simple à utiliser.

D'une manière générale pour n'importe quel enroulement (du stator ou du rotor), en reprenons l'équation de la loi d'Ohm généralisée, on pourra écrire :

$$[v_{abc}] = [R][i_{abc}] + \left(\frac{d}{dt}\right)[\varphi_{abc}] \quad (14)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

En multipliant les 2 termes par la matrice de Park $[P]$:

$$\underbrace{[P][v_{abc}]}_{[v_{dqo}]} = [R] \underbrace{[P][i_{abc}]}_{[i_{dqo}]} + [P] \left(\frac{d[\varphi_{abc}]}{dt}\right) \quad (15)$$

Sachant que :

$$[x_{dqo}] = [P][x_{abc}], [x_{abc}] = [P]^{-1}[x_{dqo}] \quad (16)$$

$[x]$: peut être un flux, un courant ou une tension.

$$[P(\psi)] = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} \cos\psi & \cos\left(\psi - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin\psi & -\sin\left(\psi - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[P] \left(\frac{d[\varphi_{abc}]}{dt}\right) = \frac{d\{[P][\varphi_{abc}]\}}{dt} - \frac{d[P]}{dt}[\varphi_{abc}] = \frac{d[\varphi_{dqo}]}{dt} + [P] \frac{d[P]^{-1}}{dt}[\varphi_{dqo}]$$

Or,

$$[P] \frac{d[P]^{-1}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\psi}{dt}$$

Finalement, on obtient le modèle diphasé (pour le stator que pour le rotor) dans le nouveau système d'axe $d-q$:

$$\begin{cases} v_d = r i_d + \frac{d\varphi_d}{dt} - \varphi_q \frac{d\psi}{dt} \\ v_q = r i_q + \frac{d\varphi_q}{dt} + \varphi_d \frac{d\psi}{dt} \\ v_o = r i_o + \frac{d\varphi_o}{dt} \end{cases} \quad (18)$$

Remarques :

- La matrice de Park $[P(\psi)]$ est orthogonale, donc $[P(\psi)]^{-1} = [P(\psi)]^t$ ou $[P(\psi)]^t[P(\psi)] = [I]$.
- Le principe de l'invariance de la puissance est conservé entre les deux systèmes d'axes (abc) et $(d-q)$.

$$[P(\psi)]^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\psi - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\psi - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

- Lorsque l'angle $\psi = 0$, la transformation de Park n'est que la transformation de Concordia notée $[C]=[P(0)]$ et les axes $d-q$ sont habituellement désignés par le système d'axes $\alpha-\beta$. Concordia a proposé de substituer le modèle à trois phases (abc) par le modèle à deux phases ($\alpha-\beta$) ayant deux bobines décalées entre elles de $\pi/2$ de sorte que les forces magnétomotrices ($f.m.m$) et la puissance instantanée soient conservées entre les deux systèmes, (voir figure2). Ainsi on pourra associer aux composantes triphasées (x_a, x_b, x_c) le vecteur \bar{x} (flux, courant ou tension) dans le référentiel fixe d'axes (α,β) lié au stator telles que :

$$\bar{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_a + x_b e^{j\frac{2\pi}{3}} + x_c e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right) = x_\alpha + jx_\beta \quad (20)$$

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

[C]:matrice de Concordia

$$[x_{\alpha\beta 0}] = [C][x_{abc}], [x_{abc}] = [C]^{-1}[x_{\alpha\beta 0}], [C]^{-1}=[C]^t \quad (22)$$

La transformation de Concordia est orthogonale ($[C]^{-1}=[C]^t$), elle conserve la puissance mais pas les amplitudes des grandeurs de la machine. Autre transformation similaire à celle de Concordia peu intéressante dite de Mlle. Clarke qui conserve les amplitudes mais pas les puissances ni le couple.

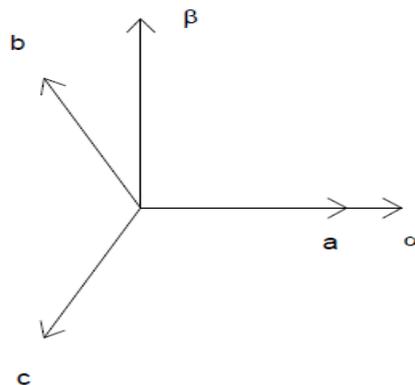


Fig.2 : Transformation de Concordia entre les axes abc et $\alpha\beta$.

- En réalité la matrice de Park n'est que le produit de la matrice de Concordia et d'une matrice de rotation des axes $R(\psi)$ orthogonale aussi telle que :

$$[P(\psi)] = [R(\psi)][C], [R(\psi)] = [P(\psi)][C]^{-1} \quad (23)$$

$$[R(\psi)] = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ \sin\psi & -\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$[x_{dqo}] = [R(\psi)][x_{\alpha\beta o}], [x_{\alpha\beta o}] = [R(\psi)]^{-1}[x_{dqo}], [R(\psi)]^{-1} = [R(\psi)]^t \quad (25)$$

Il s'agit maintenant de deux transformations de Park pour le stator et pour le rotor :

- Lorsque $\psi = \theta_s$, la matrice de Park pour les grandeurs du stator est notée $P(\theta_s)$ avec θ_s l'angle électrique $(\overrightarrow{Osa}, \overrightarrow{Od}) = \theta_s$.
- $\psi = \theta_r$, la matrice de Park pour les grandeurs du rotor est notée $P(\theta_r)$ avec θ_r l'angle électrique $(\overrightarrow{Ora}, \overrightarrow{Od}) = \theta_r$.

Les angles θ_s, θ_r sont reliés par la relation suivante:

$$\theta_s - \theta_r = \theta \quad (26)$$

Reprenons les équations des flux au stator:

$$[\varphi_{sdqo}] = [P(\theta_s)][\varphi_{sabc}] \quad (27)$$

$$[\varphi_{sdqo}] = [P(\theta_s)]\{[L_s][i_{sabc}] + [M_{sr}][i_{rabc}]\} \quad (28)$$

$$[\varphi_{sdqo}] = [P(\theta_s)][L_s][P(\theta_s)]^{-1}[i_{sdqo}] + [P(\theta_s)][M_{sr}][P(\theta_r)]^{-1}[i_{rdqo}] \quad (29)$$

Les équations des flux au rotor:

$$[\varphi_{rdqo}] = [P(\theta_r)][\varphi_{rabc}] \quad (30)$$

$$[\varphi_{rdqo}] = [P(\theta_r)]\{[L_r][i_{rabc}] + [M_{sr}][i_{sabc}]\} \quad (31)$$

$$[\varphi_{rdqo}] = [P(\theta_r)][M_{rs}][P(\theta_s)]^{-1}[i_{sdqo}] + [P(\theta_r)][L_r][P(\theta_r)]^{-1}[i_{rdqo}] \quad (32)$$

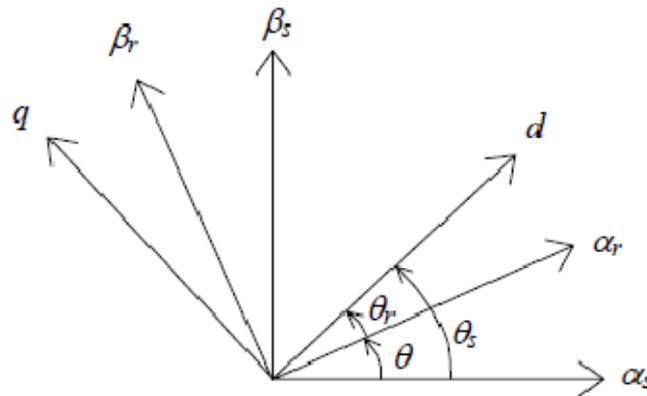


Fig.3 : Transformation de Park.

Tout calcul fait, les nouveaux flux de la machine dans le nouveau système d'axes d - q sont donné par :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{sd} \\ \varphi_{sq} \\ \varphi_{so} \\ \varphi_{rd} \\ \varphi_{rq} \\ \varphi_{ro} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_s - M_s & 0 & 0 & 3M_{sr}/2 & 0 & 0 \\ 0 & l_s - M_s & 0 & 0 & 3M_{sr}/2 & 0 \\ 0 & 0 & l_s + 2M_s & 0 & 0 & 0 \\ 3M_{sr}/2 & 0 & 0 & l_r - M_r & 0 & 0 \\ 0 & 3M_{sr}/2 & 0 & 0 & l_r - M_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_r + 2M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{so} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \\ i_{ro} \end{bmatrix} \quad (33)$$

On constate que :

- Les coefficients de la matrice des inductances sont indépendants du temps a cause de la transformation de Park.
- Le nombre de paramètres électromagnétiques est réduit à 5 uniquement qui sont :

$$\begin{aligned} L_s &= l_s - M_s && : \text{inductance cyclique statorique} \\ L_r &= l_r - M_r && : \text{inductance cyclique rotorique} \\ M &= 3M_{sr}/2 && : \text{inductance mutuelle cyclique entre stator-rotor} \\ L_{os} &= l_s + 2M_s && : \text{inductance homopolaire statorique} \\ L_{or} &= l_r + 2M_r && : \text{inductance homopolaire rotorique.} \end{aligned}$$

Pour un système triphasé équilibré, les composantes homopolaire sont nulles et dans ce cas on a :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{sd} \\ \varphi_{sq} \\ \varphi_{rd} \\ \varphi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M & 0 \\ 0 & L_s & 0 & M \\ M & 0 & L_r & 0 \\ 0 & M & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (34)$$

- Equations des tensions au stator et au rotor

$$\begin{cases} v_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d\varphi_{sd}}{dt} - \frac{d\theta_s}{dt} \varphi_{sq} \\ v_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d\varphi_{sq}}{dt} + \frac{d\theta_s}{dt} \varphi_{sd} \\ v_{rd} = 0 = R_r i_{rd} + \frac{d\varphi_{rd}}{dt} - \frac{d\theta_r}{dt} \varphi_{rq} \\ v_{rq} = 0 = R_r i_{rq} + \frac{d\varphi_{rq}}{dt} + \frac{d\theta_r}{dt} \varphi_{rd} \end{cases} \quad (35)$$

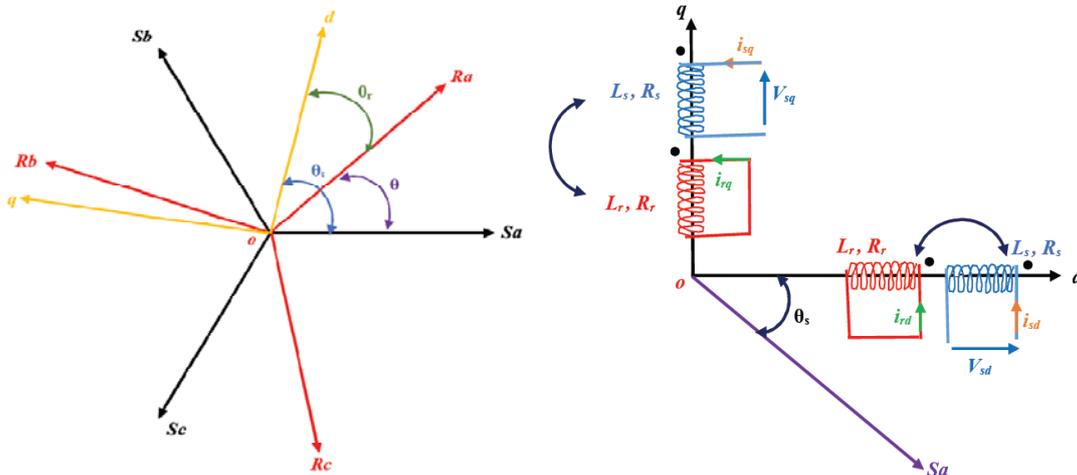


Fig.4 : Transformation entre les différents systèmes d'axes.

I.4 Choix du référentiel

Il existe plusieurs possibilités pour le choix de l'orientation du repère d'axes $d-q$ selon les objectifs de l'application :

- axes tournant à la vitesse du rotor (fixe par rapport au rotor, $\theta_r = 0$), pour l'étude des grandeurs statoriques.
- axes liés au stator ($\theta_s = 0$), pour l'étude des grandeurs rotoriques.
- Axes liés au champ tournant, pour la commande qui est notre cas.

Remarque

Les grandeurs de la MAS (*courants, flux, tensions,..*) apparaissent sous **forme continue dans le système d'axes lié au champ tournant**. Il en est facile d'appliquer l'asservissement linéaire pour la régulation de ces grandeurs. Ceci montre l'importance du choix du système d'axes lié au champ tournant pour la commande.

Si on désigne par :

- $\omega_s = \frac{d\theta_s}{dt}$: la vitesse angulaire des axes $d-q$ dans le repère statorique (S, abc)
- $\omega_r = \frac{d\theta_r}{dt}$: la vitesse angulaire des axes $d-q$ dans le repère rotorique (R, abc)

La pulsation ω différence des 2 vitesses angulaires est donnée par :

$$\omega = \omega_s - \omega_r = \frac{d\theta}{dt} = p\Omega \quad (36)$$

Ω : la vitesse mécanique angulaire du rotor.

Le glissement de vitesse angulaire est défini par

$$\omega_r = \omega_s - \omega \quad (37)$$

I.5 Modèle de la MAS dans le système d'axes lié au champ tournant

$$\begin{cases} \frac{d\theta_s}{dt} = \omega_s \\ \frac{d\theta_r}{dt} = \omega_r \\ \omega_r = \omega_s - p\Omega \end{cases} \quad (38)$$

- Equations électriques

$$\begin{cases} v_{sd} = R_s i_{sd} + \frac{d\varphi_{sd}}{dt} - \omega_s \varphi_{sq} \\ v_{sq} = R_s i_{sq} + \frac{d\varphi_{sq}}{dt} + \omega_s \varphi_{sd} \\ v_{rd} = 0 = R_r i_{rd} + \frac{d\varphi_{rd}}{dt} - \omega_r \varphi_{rq} \\ v_{rq} = 0 = R_r i_{rq} + \frac{d\varphi_{rq}}{dt} + \omega_r \varphi_{rd} \end{cases} \quad (39)$$

- Equation magnétiques

$$\begin{bmatrix} \varphi_{sd} \\ \varphi_{sq} \\ \varphi_{rd} \\ \varphi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M & 0 \\ 0 & L_s & 0 & M \\ M & 0 & L_r & 0 \\ 0 & M & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (40)$$

- Equations mécaniques

Expression du couple électromagnétique

Le couple électromagnétique est un vecteur résultant du produit vectoriel d'un vecteur flux et un vecteur courant. Sous forme scalaire, il peut être exprimé de plusieurs manières suivant les variables d'état choisis.

$$C_e = p[\varphi_{sd} i_{sq} - \varphi_{sq} i_{sd}], \quad \vec{C}_e = (3/2)p[\vec{\varphi}_s \wedge \vec{I}_s] \quad (41)$$

$$C_e = p(M/L_r)[\varphi_{rd} i_{sq} - \varphi_{rq} i_{sd}], \quad \vec{C}_e = (3/2)p(M/L_r)p[\vec{\varphi}_r \wedge \vec{I}_s] \quad (42)$$

Equation du mouvement :

$$\underbrace{J \frac{d\Omega}{dt}}_{\text{couple dynamique}} = C_e - \underbrace{C_r}_{\text{couple de charge}} - \underbrace{f\Omega}_{\text{couple de frottement}} \quad (43)$$

J : Moment d'inertie de toutes les parties tournantes par rapport à l'arbre moteur

C_r : Couple de charge (résistant)

f : Coefficient de frottement visqueux.

I.6 Modélisation en modèle d'état

La représentation d'état de la machine à induction dépend des variables d'état choisis et qui sont fonctions des objectifs liés à la commande et à l'observation. Le plus souvent, ces variables d'états choisis sont la vitesse dont on veut contrôler l'évolution, le courant statorique puisque il est mesurable, et le flux rotorique estimable dont on cherche à assurer la régulation de sa norme. :

$$X = [i_s \ \phi_r \ \Omega]$$

Pour le modèle d'alimentation en tension de la machine (onduleur de tension), l'équation d'état s'écrit:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU, \quad X = [i_{sd} \ i_{sq} \ \phi_{rd} \ \phi_{rq} \ \Omega]^T, \quad U = [V_{sd} \ V_{sq}]^T \\ \begin{cases} \frac{di_{sd}}{dt} &= -\frac{1}{\sigma L_s} \left(R_s + \frac{R_r M^2}{L_r^2} \right) i_{sd} + \omega_s i_{sq} + \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{R_r M}{L_r^2} \right) \phi_{rd} + \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{M}{L_r} \right) \omega \phi_{rq} + \frac{v_{sd}}{\sigma L_s} \\ \frac{di_{sq}}{dt} &= -\omega_s i_{sd} - \frac{1}{\sigma L_s} \left(R_s + \frac{R_r M^2}{L_r^2} \right) i_{sq} - \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{M}{L_r} \right) \omega \phi_{rd} + \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{R_r M}{L_r^2} \right) \phi_{rq} + \frac{v_{sq}}{\sigma L_s} \\ \frac{d\psi_{rd}}{dt} &= \left(\frac{R_r M}{L_r} \right) i_{sd} - \left(\frac{R_r}{L_r} \right) \phi_{rd} + \omega_r \phi_{rq} \\ \frac{d\psi_{rq}}{dt} &= \left(\frac{R_r M}{L_r} \right) i_{sq} - \omega_r \phi_{rd} - \left(\frac{R_r}{L_r} \right) \phi_{rq} \end{cases} \end{aligned} \quad (44)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

sous forme matricielle
:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma L_s} \left(R_s + \frac{R_r M^2}{L_r^2} \right) & \omega_s & \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{R_r M}{L_r^2} \right) & \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{M}{L_r} \right) \omega \\ -\omega_s & -\frac{1}{\sigma L_s} \left(R_s + \frac{R_r M^2}{L_r^2} \right) & -\frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{M}{L_r} \right) \omega & +\frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{R_r M}{L_r^2} \right) \\ \left(\frac{R_r M}{L_r} \right) & 0 & -\left(\frac{R_r}{L_r} \right) & \omega_r \\ 0 & \left(\frac{R_r M}{L_r} \right) & -\omega_r & -\left(\frac{R_r}{L_r} \right) \end{bmatrix} \quad (45)$$

I.7 Résultats de simulation lors d'une alimentation directe (sans convertisseur).

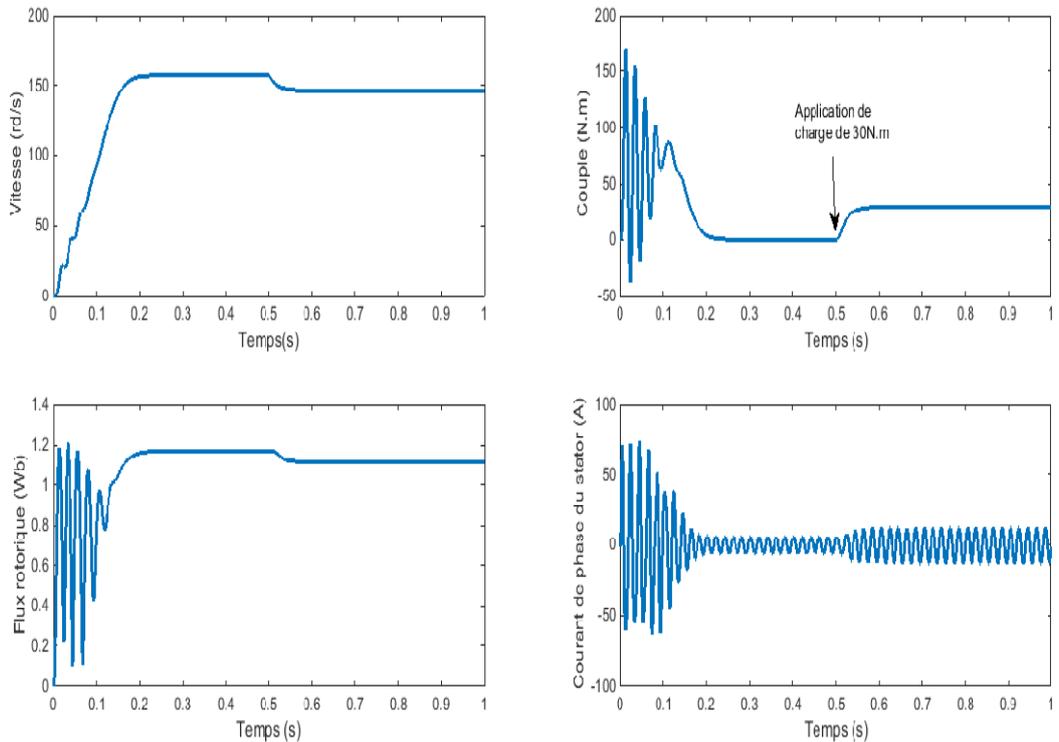


Fig.5: Evolution des paramètres de la MAS.

Afin d'illustrer le démarrage sans charge (à vide) sans protection de la MAS, puis en charge, les figures suivantes donnent un aperçu de l'évolution de certains paramètres de la machine comme la vitesse, le couple, le flux rotorique et le courant d'une phase statorique. Une charge de 30 N.m est appliquée à $t=0.5s$ causant une atténuation de la vitesse à cause du manque de sa régulation. Notons la forte demande en courant au démarrage (parfois jusqu'à 8-10 fois le courant nominal de la machine) Ce pic de courant montre la nécessité de la boucle fermée et donc de la commande.

II. Commande vectorielle de la MAS (Vector Control/Field Oriented Control FOC)

Malgré sa simplicité en implantation, la commande scalaire (commande en V/f) de la MAS souffre d'un inconvénient majeur qu'est la dynamique lente de ces grandeurs. Ceci est dû au modèle du régime permanent de la machine étant donné du contrôle des grandeurs en amplitude uniquement.

En 1972, Blaschke a proposé une nouvelle théorie de commande pour les machines à courant alternatif dite par flux orienté (Field Oriented Control FOC) ou simplement commande vectorielle (Vector Control VC). Cette théorie permet d'assimiler la MAS à une machine à courant continu MCC où le découplage couple-flux est naturel. Cependant, elle n'a pu être implantée et popularisée qu'avec les avancées en électronique numérique (de part son besoin aux calculateurs puissants pour effectuer les transformées de Park, intégrations, régulations, ...).

Le souci principal dans n'importe quelle commande reste la maîtrise de l'évolution des courants, image du couple, surtout aux régimes transitoires (responsables N°1 de la défaillance des machines électriques). Une fois maîtrisé par des boucles de régulation internes, une boucle externe pour la vitesse est rajoutée, parfois pour la position (en robotique), conférant ainsi une structure de commande en cascade pour la machine.

II.1 Principe de la commande FOC

Dans la machine à courant continu MCC, il existe un découplage naturel entre le couple et le flux donné par :

$$C_{e-mcc} = k_t I_a I_f \quad (46)$$

k_t : constante du couple

I_f : courant d'excitation responsable du flux.

I_a : courant d'induit responsable du couple.

En reprenant l'expression scalaire du couple de la MAS (en fonction du flux rotorique et courant statorique) par :

$$C_{e-MAS} = p(M/L_r) [\varphi_{rd} i_{sq} - \varphi_{rq} i_{sd}] \quad (47)$$

Il est clair que si la composante quadrature du flux rotorique est nulle, $\varphi_{rq} = 0$, une similitude pour le couple peut être obtenue entre la MCC et la MAS comme illustré par la figure 6.

$$C_{e-MAS} = \underbrace{p(M/L_r)}_{K_t} \varphi_{rd} i_{sq} \quad (48)$$

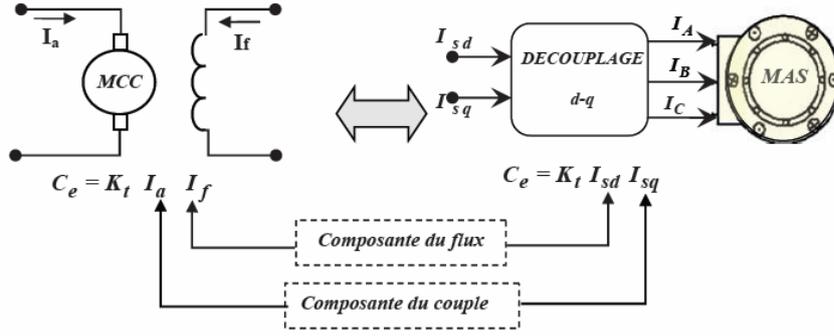


Fig.6 : Analogie du découplage couple-flux entre la MCC et la MAS.

Cette supposition fait l'objet du principe de la commande FOC pour la MAS en faisant coïncider l'axe direct d avec la direction désirée de la totalité du flux rotorique comme illustré par la figure 7.

$$\begin{cases} \varphi_{rq} = 0 \\ \varphi_{rd} = \varphi_r \end{cases}, \quad C = \underbrace{p(M/L_r)}_{K_c} \varphi_{rd} i_{sq} \quad (49)$$

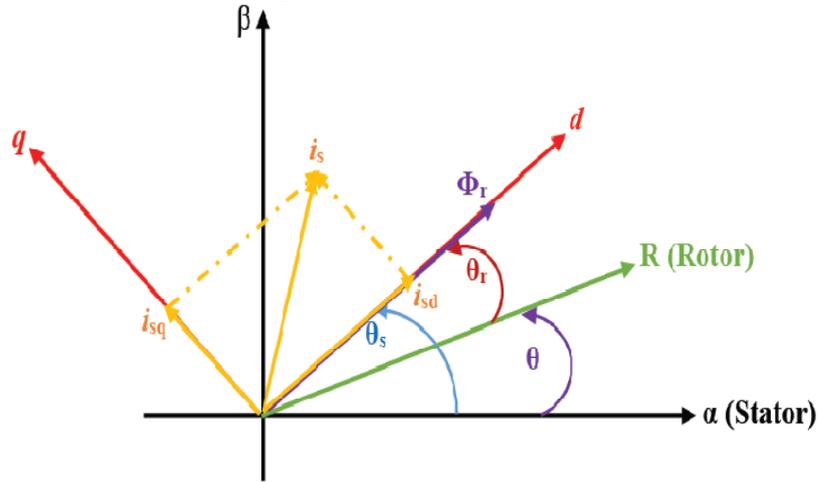


Fig.7 : Orientation du flux rotorique selon la direction désirée d .

Les équations des tensions rotoriques (39) deviennent après application du principe de la CV :

$$\begin{cases} v_{rd} = R_r i_{rd} + \frac{d\varphi_{rd}}{dt} = 0 \\ v_{rq} = R_r i_{rq} + \omega_r \varphi_{rd} = 0 \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} \varphi_{sd} = L_s i_{sd} + M i_{rd} \\ \varphi_{sq} = L_s i_{sq} + M i_{rq} \\ \varphi_{rd} = L_r i_{rd} + M i_{sd} \\ \varphi_{rq} = L_r i_{rq} + M i_{sq} \end{cases} \quad (51)$$

En choisissant les courants du stator (mesurables) et les flux rotoriques (estimables) comme variables d'état, les flux statoriques s'expriment par:

$$\begin{cases} \varphi_{sd} = \sigma L_s i_{sd} + \frac{M}{L_r} \varphi_{rd} \\ \varphi_{sq} = \sigma L_s i_{sq} \end{cases} \quad (52)$$

Le flux rotorique est alors *estimé* par la dynamique suivante :

$$T_r \frac{d\varphi_{rd}}{dt} + \varphi_{rd} = M i_{sd} \quad (53)$$

$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}$ coefficient de dispersion de Blondel.

$T_r = \frac{L_r}{R_r}$: constante de temps rotorique.

La pulsation de glissement est alors donnée par :

$$\omega_r = \frac{M i_{sq}}{T_r \varphi_{rd}} \quad (54)$$

La pulsation statorique est:

$$\omega_s = p\Omega + \frac{M i_{sq}}{T_r \varphi_{rd}} \quad (55)$$

Enfin la position θ_s (qui repère l'axe d) est exprimée par :

$$\theta_s = \int \omega_s dt \quad (56)$$

Le modèle de la MAS sous concept de la commande vectorielle ($\varphi_{rq} = 0, \varphi_{rd} = \varphi_r$) est finalement donné par :

$$\begin{cases} \frac{di_{sd}}{dt} = -\frac{1}{\sigma L_s} \left(R_s + \frac{R_r M^2}{L_r^2} \right) i_{sd} + \omega_s i_{sq} + \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{R_r M}{L_r^2} \right) \varphi_{rd} + \frac{v_{sd}}{\sigma L_s} \\ \frac{di_{sq}}{dt} = -\omega_s i_{sd} - \frac{1}{\sigma L_s} \left(R_s + \frac{R_r M^2}{L_r^2} \right) i_{sq} - \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{M}{L_r} \right) \omega \varphi_{rd} + \frac{v_{sq}}{\sigma L_s} \\ \frac{d\psi_{rd}}{dt} = \left(\frac{R_r M}{L_r} \right) i_{sd} - \left(\frac{R_r}{L_r} \right) \varphi_{rd} \\ J \frac{d\Omega}{dt} = C_e - C_r - f\Omega \end{cases} \quad (57)$$

On remarque que les tensions v_{sd}, v_{sq} dépendent à la fois des courants des deux axes i_{sd}, i_{sq} qui influent sur le couple et le flux. Il est donc indispensable de procéder au découplage des termes couplés.

II.2 Découplage par compensation

Il s'agit d'abord de réaliser un découplage selon les axes d - q (ne considérer que les termes du même axe) permettant ainsi un calcul simple des régulateurs, ensuite compenser les termes négligés.

$$\begin{cases} v_{sd} = R_s i_{sd} + \sigma L_s \frac{di_{sd}}{dt} + \frac{M}{L_r} \frac{d\varphi_{rd}}{dt} - \omega_s \sigma L_s i_{sq} \\ v_{sq} = R_s i_{sq} + \sigma L_s \frac{di_{sq}}{dt} + \omega_s \frac{M}{L_r} \varphi_{rd} + \omega_s \sigma L_s i_{sd} \end{cases} \quad (58)$$

En introduisant l'opérateur de Laplace ($\frac{d}{dt} \triangleq S$) pour les équations des tensions statorique et assumons une dynamique lente du flux ($\frac{d\varphi_{rd}}{dt} = 0$):

$$\begin{cases} v_{sd} = (R_s + \sigma L_s S)i_{sd} - \omega_s \sigma L_s i_{sq} \\ v_{sq} = (R_s + \sigma L_s S)i_{sq} + \underbrace{\omega_s \frac{M}{L_r} \varphi_{rd} + \omega_s \sigma L_s i_{sd}}_{\text{termes à compenser}} \end{cases} \quad (59)$$

Les nouvelles variables de commandes (v_{sd}^*, v_{sq}^*) sont alors:

$$\begin{cases} v_{sd}^* = (R_s + \sigma L_s S)i_{sd} = v_{sd} + \omega_s \sigma L_s i_{sq} = v_{sd} + e_{sd} \\ v_{sq}^* = (R_s + \sigma L_s S)i_{sq} = v_{sq} - (\omega_s \frac{M}{L_r} \varphi_{rd} + \omega_s \sigma L_s i_{sd}) = v_{sq} - e_{sq} \end{cases} \quad (60)$$

Les actions sur les axes d, q sont découplés comme illustrés par la figure 8 suivante :

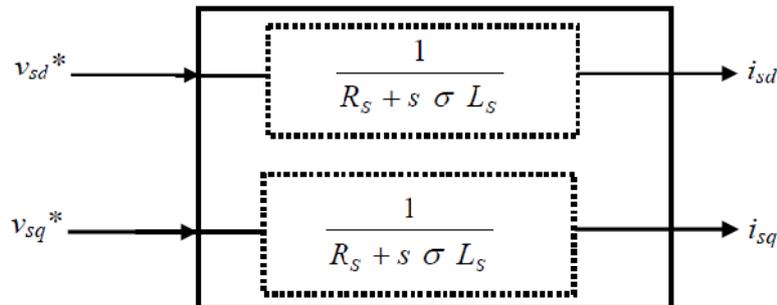


Fig.8 : Les nouvelles commandes obtenues.

La reconstruction des tensions (v_{sd}, v_{sq}) à partir des tensions (v_{sd}^*, v_{sq}^*) est donnée par le schéma de la figure 9 suivant:

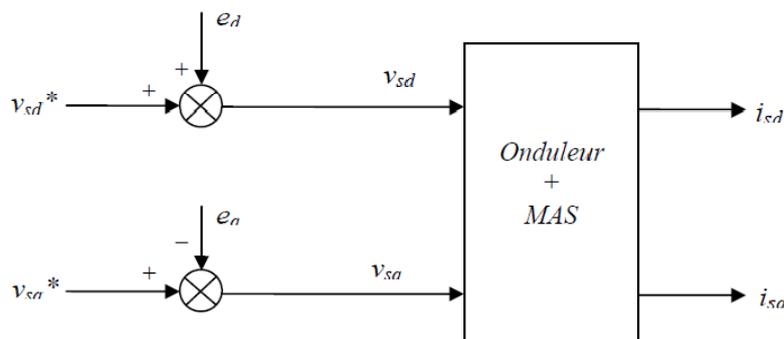


Fig.9 : Reconstitution des tensions (v_{sd}, v_{sq})

II.3 Structures de la commande

Il existe essentiellement deux (2) méthodes : directe et indirecte. Les deux méthodes utilisent une fonction non linéaire pour synthétiser le flux rotorique de référence mais la méthode directe utilise en plus une boucle de régulation

supplémentaire pour le flux rotorique (contre-réaction). La fonction non linéaire donnant la norme du flux rotorique est :

$$\varphi_r^* = \begin{cases} \varphi_{rn} & \text{si } |\Omega| < \Omega_n \\ \frac{\Omega_n}{|\Omega|} \varphi_{rn} & \text{si } |\Omega| > \Omega_n \end{cases} \quad (61)$$

φ_r^* : flux rotorique de référence
 Ω_n : vitesse mécanique du rotor
 φ_{rn} : flux rotorique nominal.

La structure de commande indirecte est donnée par la figure 10. Elle utilise une boucle externe (régulateur Proportionnel Intégral PI) pour la vitesse et deux boucles internes pour les courants (i_{sd}, i_{sq}) utilisant aussi deux régulateurs PI.

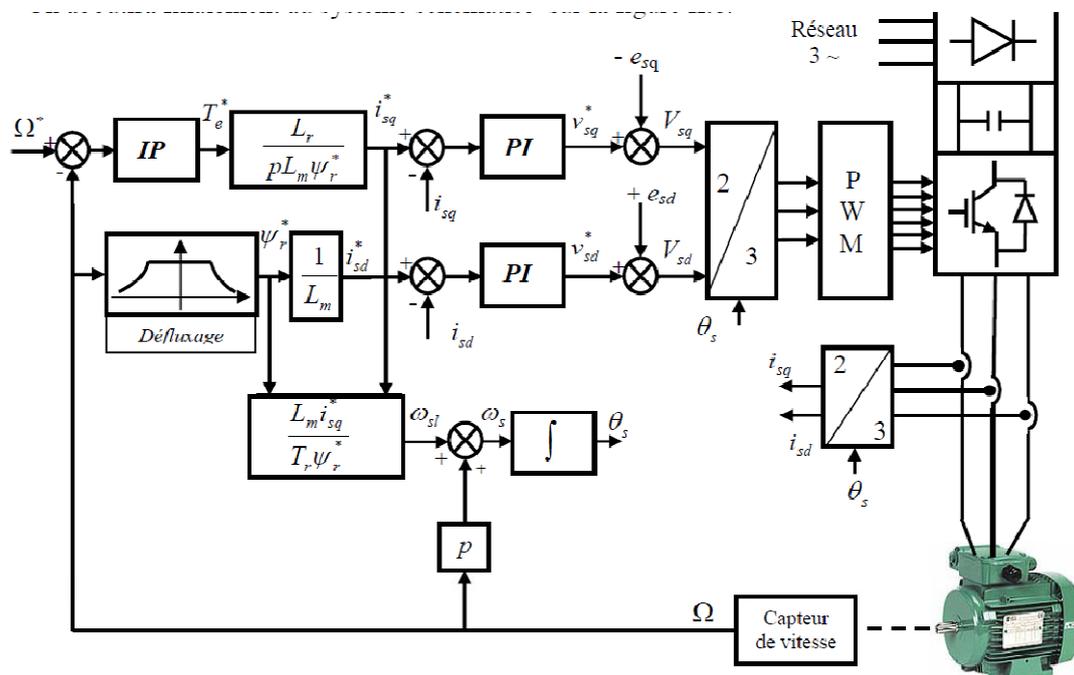


Fig.10 : Structure de commande indirecte de la MAS (IFOC : Indirect FOC)

II.4 Calcul des régulateurs

- *Régulateur de vitesse*

La boucle de régulation externe de la vitesse est donnée par la figure 11. La variable de commande est le couple C_e (parfois noté T_e , T_L couple résistant).

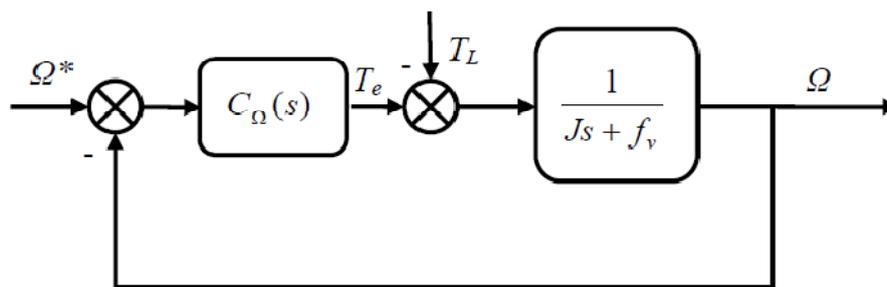


Fig.11 : Boucle de régulation de la vitesse

La fonction de transfert du régulateur PI de la vitesse est

$$C_{\Omega}(S) = K_p + \frac{K_i}{S} \quad (62)$$

La FTBO(S) est (la perturbation T_L est considérée nulle lors du calcul de la commande) :

$$\left(K_p + \frac{K_i}{S}\right) \frac{1}{(JS+f)} \quad (63)$$

En boucle fermée, la FTBF(S) est :

$$\frac{\Omega}{\Omega^*} = \frac{\frac{K_p}{K_i}S+1}{\left(\frac{J}{K_i}\right)S^2 + \left(\frac{K_p+f}{K_i}\right)S+1} \triangleq \frac{1}{\left(\frac{1}{\omega_n^2}\right)S^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)S+1} \quad (64)$$

Que l'on compare à la forme canonique standard du système du second ordre (puisque on connaît la réponse indicielle de ce système) par :

$$\begin{cases} \frac{J}{K_i} = \frac{1}{\omega_n^2} \\ \frac{K_p+f}{K_i} = \frac{2\zeta}{\omega_n} \end{cases} \quad (65)$$

En choisissant un coefficient d'amortissement ζ selon le tableau suivant et le temps de réponse on aura les valeurs du K_p et K_i comme suit :

$$\begin{cases} K_i = J \omega_n^2 \\ K_p = \frac{2\zeta K_i}{\omega_n} - f \end{cases} \quad (66)$$

ζ	$\omega_n t_{rep} (5\%)$
0.4	7.7
0.5	5.3
0.6	5.2
0.7	3
1	4.75

- **Régulateur de courant**

La boucle de régulation interne du courant i_{sd} est donnée par la figure 12. La variable de commande est la tension v_{sd}^* . La procédure est la même pour l'autre composante i_{sq} .

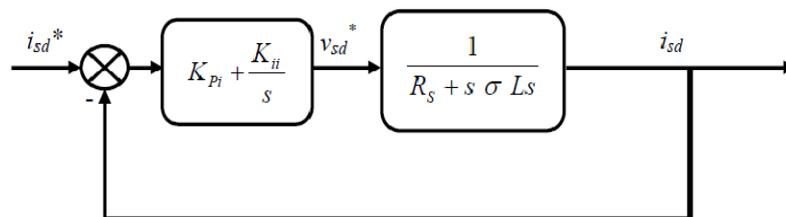


Fig.12 : Boucle de régulation du courant i_{sd} .

En utilisant la technique de compensation pole-zéro, on calcule d'abord la FTBO(S) :

$$K_p \left(S + \frac{K_i}{K_p} \right) \frac{1}{S} \frac{\frac{1}{\sigma L_s}}{\left(\frac{R_s}{\sigma L_s} + S \right)} \quad (67)$$

En compensant le zéro du régulateur par le pole du système :

$$\frac{K_i}{K_p} = \frac{R_s}{\sigma L_s} \quad (68)$$

La FTBO(S) devient :

$$\frac{K_p}{S} \frac{1}{\sigma L_s} \quad (69)$$

En boucle fermée, la FTBF(S) devient un système du premier ordre:

$$\frac{\frac{K_p}{S} \frac{1}{\sigma L_s}}{1 + \frac{K_p}{S} \frac{1}{\sigma L_s}} \triangleq \frac{1}{\frac{\sigma L_s}{K_p} S + 1} = \frac{1}{\tau S + 1} \quad (70)$$

$$\tau = \frac{\sigma L_s}{K_p} \quad (71)$$

En choisissant une valeur pour τ , les paramètres du régulateur se calcule comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_p = \frac{\sigma L_s}{\tau} \\ K_i = \frac{R_s}{\sigma L_s} K_p \end{array} \right. \quad (72)$$

Remarque

D'autres méthodes peuvent être utilisées pour le dimensionnement du régulateur PI comme la méthode de l'optimum symétrique..

II.5 Résultats de simulation de la commande FOC

Les figures suivantes (figure 13) montrent l'évolution des paramètres essentiels dans la commande FOC de la MAS fonctionnant en mode 4 quadrants : comme la vitesse, le couple, les courants statorique (i_{sd} , i_{sq}), le courant de phase statorique i_a , les flux rotoriques (φ_{rd} , φ_{rq} , φ_r) ainsi que les courants rotoriques (i_{rd} , i_{rq}). On remarque le rôle important de la commande (régulateurs de vitesse, et des courants) pour l'obtention de bonnes performances statiques et dynamiques. Ainsi la limitation des courants et du couple pendant les changements brusques de la vitesse.

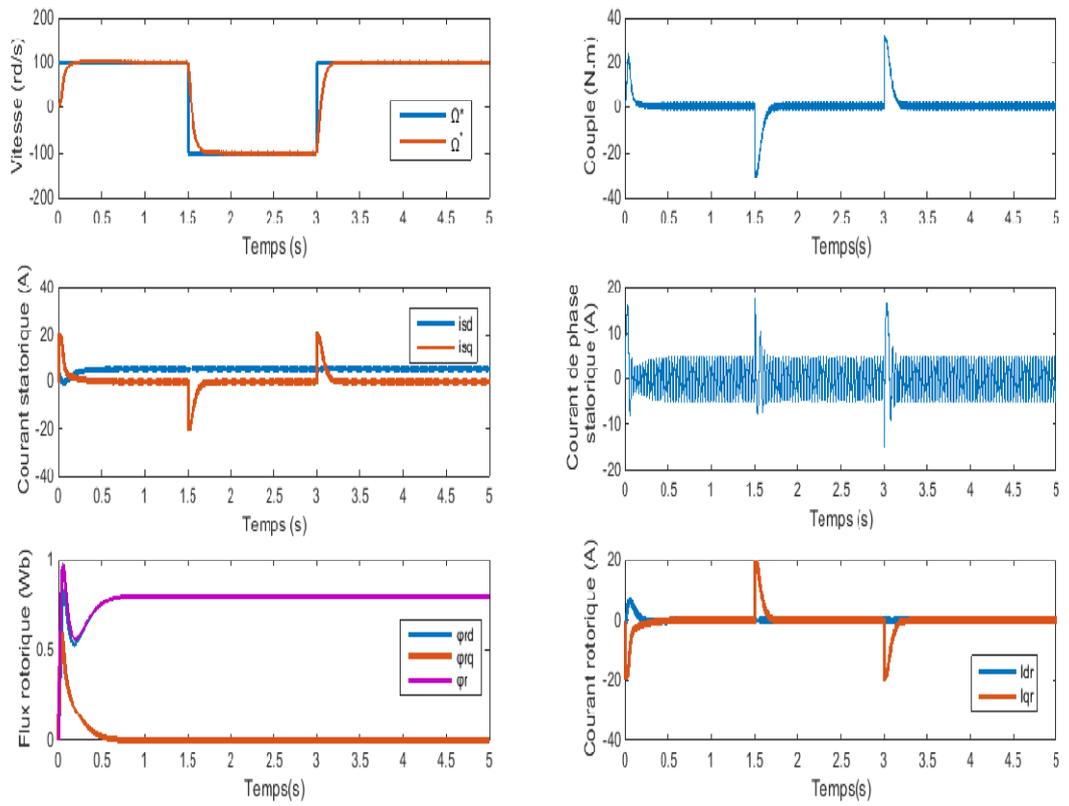


Fig.13 : Résultats de simulation de la commande vectorielle FOC

Enseignant K. Barra