Chapitre 3 : Convection forcée externe

I. INTRODUCTION

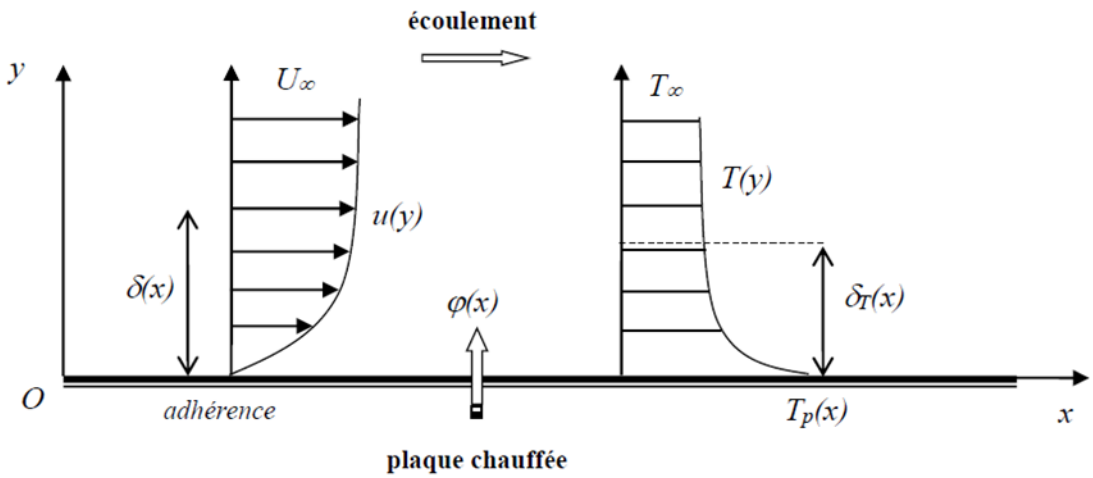
Le mode de **transfert convectif** fait intervenir deux mécanismes simultanés de transport :

- le transport d'énergie dû au mouvement moléculaire aléatoire (**diffusion**)
- le transport d'énergie dû au mouvement macroscopique du fluide (**convection**)

Nous allons introduire, en nous appuyant sur un exemple simple, les notions fondamentales de couche limite dynamique, de couche limite thermique et de coefficient d'échange convectif.

Exemple : fluide en écoulement le long d'une paroi solide chauffée (ou refroidie)

Le fluide agit comme convoyeur d'énergie qu'il soutire à une paroi solide chauffée (ou qu'il cède à une paroi refroidie).



<u>Notion de couche limite :</u> c'est une région de l'espace au sein de laquelle sont observés les gradients de température (couche limite thermique) ou les gradients de vitesse (couche limite dynamique). C'est donc dans ces régions que se produisent les échanges de chaleur et de quantité de mouvement. Le développement de la couche limite dynamique est dû au phénomène de diffusion de quantité de mouvement par frottement visqueux. Le développement de la couche limite thermique est dû au phénomène de diffusion d'enthalpie.

On notera que la notion de température étant directement liée à l'agitation des molécules qui composent la matière (on parle d'agitation thermique), plus l'agitation (l'énergie cinétique) est importante, plus la température est élevée. Ainsi le transfert de chaleur d'une région chaude vers une autre plus froide correspond à un transfert d'énergie cinétique lors des chocs entre les molécules. Par ailleurs, la viscosité d'un fluide correspond à une dissipation d'énergie liée au transfert de quantité de mouvement lors de ces mêmes chocs intermoléculaires. On voit donc que les phénomènes de transfert de chaleur et de quantité de mouvement sont intimement liés.

On notera :

- δ l'épaisseur de la ***couche limite dynamique :*** $\delta(x) \uparrow$ avec *x*.

- δ_T l'épaisseur de la ***couche limite thermique :*** $\delta_T(x) \uparrow$ avec *x*.

$$\left.\begin{matrix} \delta > \delta_T \\ \delta = \delta_T \\ \delta < \delta_T \end{matrix}\right\} \text{ en fonction des caractéristiques du fluide.}$$

<u>**Rq : ***</u> au voisinage de la paroi, compte tenu des faibles vitesses, le phénomène de diffusion (de quantité de mouvement ou de chaleur) est dominant.

* la paroi peut être chauffée (ou refroidie) soit :

- à température uniforme (T_p ne dépend pas de x)
- à flux uniforme ($T_p = T_p(x)$)

- **Question :** comment l'écart de température $T_p - T_\infty$ et l'intensité de l'écoulement, U_∞, gouvernent le transfert de chaleur entre la paroi et le fluide en mouvement ?

c.a.d. quelle est la relation qui relie le flux de chaleur local à *T_p -T_∞* et *U_∞* ?

On cherche donc une relation : $\varphi(x) = f(T_p - T_\infty, U_\infty)$

L'approche traditionnelle consiste à écrire que la densité de flux de chaleur échangée est proportionnelle à l'écart de température qui lui a donné naissance :

$$\varphi(x) = h(x)\big(T_p(x) - T_\infty\big) \qquad \text{loi de Newton}$$

où *h* caractérise les échanges thermiques entre un solide et un fluide en mouvement. C'est une **grandeur locale**, **positive**. *h* est appelé ***coefficient d'échange convectif***, en ($W.m^{-2}.K^{-1}$).

<u>**Rq : ***</u> si le système étudié est le fluide en mouvement, par convention, $\varphi(x) > 0$ si le fluide reçoit une quantité de chaleur en provenance de l'extérieur et $\varphi(x) < 0$ si le fluide cède une quantité de chaleur à l'extérieur. La relation ci-dessus vérifie bien cette convention.

* Dans le cas où $U_\infty = 0$ en conduction, la température varie linéairement entre T_p et T_∞ sur une épaisseur δ_T et φ suit la loi de Fourier $\varphi = -\lambda \frac{dT}{dy} = \lambda \frac{T_p - T_\infty}{\delta_T}$ d'où $h = \lambda/\delta_T$

- Ainsi le problème posé se ramène à **déterminer le coefficient d'échange *h*** et en particulier à déterminer la manière dont *h* est influencé par les caractéristiques de l'écoulement.

En effet, *h* est une grandeur qui dépend d'un nombre important de paramètres (nature de l'écoulement, propriétés du fluide, géométrie…). Il est donc difficile de lui donner des valeurs a priori. On peut éventuellement donner des ordres de grandeurs, par exemple si on regarde comment ***h*** varie en fonction de la nature de l'écoulement (données en $W/(m^2K)$) :

<u>- convection forcée :</u> gaz $h \approx 100$, liquide $h \approx 10^3$ à 10^5. Application : échangeurs, refroidissement des circuits électroniques…

<u>- convection naturelle :</u> gaz $h \approx 10$, liquide $h \approx 10^2$. Application : thermique de l'habitat, météorologie, mouvements dans le manteau terrestre, courants océaniques…

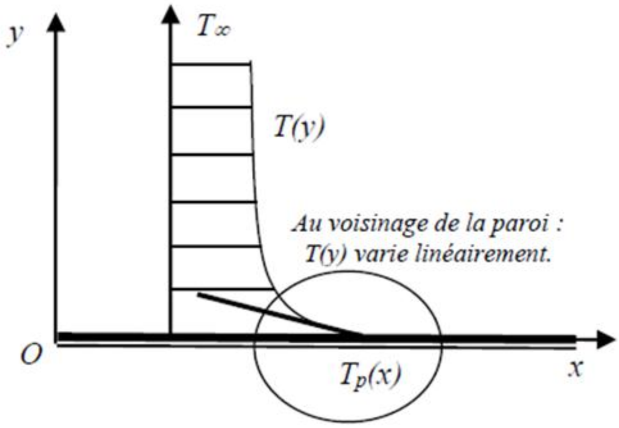
- **Comment déterminer h ?**

Au voisinage immédiat de la paroi, compte tenu des faibles vitesses ($u \approx 0$ pour $0 \leq y < 0^+$), le transfert de chaleur (et de quantité de mouvement) se produit essentiellement par diffusion.

Le flux de chaleur obéit donc à la loi de Fourier au voisinage immédiat de la paroi en un *x* donné :

$$\varphi_0(x) = -\vec{\varphi}_0.\vec{n} = -\vec{\varphi}_0.\vec{e}_y = -\lambda\vec{\nabla}T\Big|_0.\vec{e}_y$$

$$\varphi_0(x) = -\lambda\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\bigg)_{y=0^+}$$



Par ailleurs, en écrivant la loi de Newton : $\varphi(x) = h(x)\big(T_p(x) - T_\infty\big)$, on peut obtenir une expression du coefficient d'échange :

$$h(x) = -\frac{\lambda}{T_p - T_\infty}\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\bigg)_{y=0^+}$$

Pour calculer *h(x)*, on doit donc d'abord déterminer le terme $\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\Big)_{y=0^+}$, qui lui-même dépend du champ de vitesse au voisinage de la paroi. On a donc besoin non seulement de connaître la *distribution de température* au voisinage de la paroi, mais également la *distribution de vitesse*.

Rq : si on considère le cas extrême du fluide au repos (diffusion), pour lequel on sait que le profil de température sera linéaire dans l'épaisseur δ_T, on voit que sa pente est plus faible que la pente attachée au profil convectif au voisinage de la paroi. $h(x)$ sera donc plus faible et le transfert de chaleur moins important : le transfert de chaleur par conduction est moins efficace que la transfert de chaleur par convection.

Cette étude passe donc par **l'analyse des différentes couches limites**, basée sur l'écriture des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Ceci permettra d'accéder à la connaissance de $u(x,y)$ et de $T(x,y)$ au voisinage de la paroi en *x* donné et donc d'accéder :

- au frottement pariétal (contrainte visqueuse) : $\tau_0(x) = \mu\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Big)_{y=0^+}$

- au coefficient d'échange : $h(x) = \frac{-\lambda}{\Delta T}\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\Big)_{y=0^+}$

Cette étude permettra également d'accéder aux épaisseurs de couche limite $\delta(x)$ et $\delta_T(x)$

Dans cette partie de cours de convection, on s'intéressera à la convection forcée **externe** (écoulement le long d'une plaque plane)

II. Equations de conservations

Hypothèses : - fluide incompressible, newtonien

- propriétés physiques du fluide constantes

On notera $\vec{V}$ le champ de vitesse, *p* le champ de pression et *T* le champ de température.

- ***Conservation de la masse*** ou équation de continuité :

$$div\,\vec{V} = 0$$

- ***Conservation de la quantité de mouvement :***

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \overline{\overline{grad}}\vec{V}.\vec{V}\right) = -\vec{\nabla}p + \mu\vec{\nabla}^2\vec{V} + \vec{f}_v$$

Où : ρ et μ sont respectivement la masse volumique (kg/m^3) et la viscosité dynamique (kg/m.s) du fluide. $\vec{f}$ représente les forces de volume (pesanteur…)

- ***Conservation de l'énergie :***

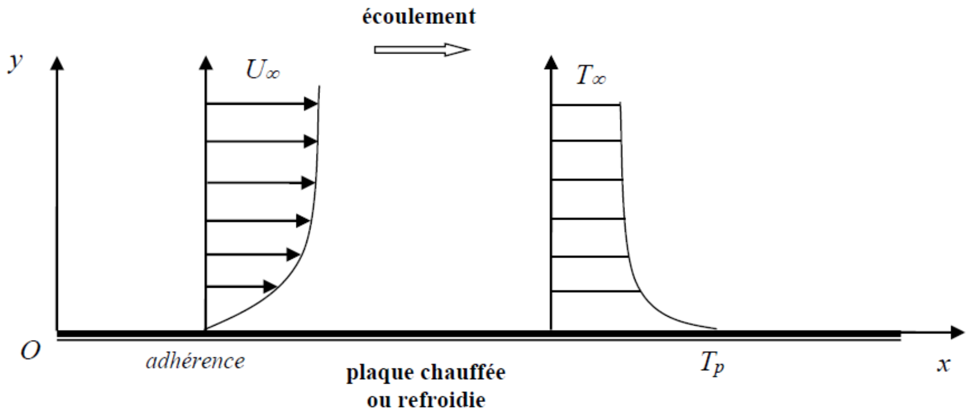
$$\rho c_p\frac{dT}{dt} = \rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla}T.\vec{V}\right) = \lambda\nabla^2 T + \sigma + \mu\Phi$$

Où c_p et λ sont respectivement la *chaleur spécifique* (*J/kg/K*) et la *conductivité thermique* (*W/m/K*) du fluide.

σ : représente une source de chaleur interne (réaction chimique, nucléaire …).

$\mu\Phi$: représente un terme lié à l'échauffement du fluide par frottement visqueux.

On considère une plaque plane chauffée, immobile, placée dans un écoulement dont la vitesse et la température loin de la plaque sont uniformes et constantes au cours du temps.



On supposera l'écoulement laminaire, stationnaire et plan (dans le plan (*x*, *y*)).

On néglige les forces de volume et on supposera qu'il n'y a pas de source interne de chaleur.

Le champ de vitesse est : $\vec{V} = u(x,y)\vec{e}_x + v(x,y)\vec{e}_y$

On projette les trois équations de conservation précédentes sur la base $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$:

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Où $\nu = \mu/\rho$ est la *viscosité cinématique* du fluide (*m²/s*) (diffusivité de quantité de mouvement).

Conservation de l'énergie :

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \frac{\mu}{\rho c_p}\Phi(x,y)$$

Avec : $\Phi(x,y) = 2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$

Où $\alpha = \lambda/\rho c_p$ est la diffusivité thermique du fluide (*m²/s*).

En convection forcée, les équations du mouvement ne font pas apparaître la température. On pourra ainsi calculer le champ de vitesse indépendamment du champ de température. En revanche, le champ de vitesse apparaît dans l'équation de l'énergie via le terme de convection. Il est donc nécessaire de connaître le champ de vitesse pour calculer le champ de température.

III. Hypothèses de couche limite – Analyse d'ordre de grandeur

Les équations de couche limite sont obtenues à partir des équations de conservation complètes. Cette théorie, développée par L. Prandtl (1875-1953), consiste, à partir d'analyses d'ordre de grandeur, à ne garder que les termes prépondérants dans les équations de conservation.

- L'analyse d'ordre de grandeur repose sur le fait qu'en *première approximation*, on considère *les profils* de vitesse et de température *linéaires* dans les couches limites.

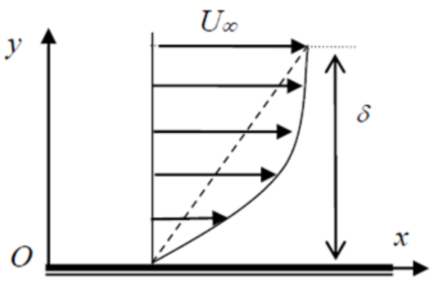
III.1 Etude du problème dynamique

III.1.a Equation de couche limite

Soit $\delta = \delta(x)$ **l'épaisseur de la couche limite dynamique** à une position *x* le long de la paroi.

Hypothèse de couche limite : $\delta(x) << x$

Cette hypothèse n'est donc pas valable près du bord d'attaque de la plaque.



Dans la couche limite dynamique, la vitesse varie de U_∞ loin de la paroi à 0 à la paroi :

$$\begin{cases} u(x, y = \delta) = U_\infty \\ u(x, y = 0) = 0 \end{cases}$$

L'analyse d'ordre de grandeur donne, en x donné :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{U_\infty}{\delta} \text{ (Profil linéaire de } u\text{)}$$

- Sous l'hypothèse de couche limite, on a : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Ainsi, la dissipation visqueuse se produit essentiellement à travers la couche limite.

- L'équation de continuité entraine : $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\partial v}{\partial y}$. L'analyse d'ordre de grandeur de ces deux termes donne : $\frac{U_\infty}{x} \approx \frac{v}{\delta} \implies v \approx \frac{\delta}{x} U_\infty \implies v$ est un ordre de grandeur plus petit que u.
- On peut montrer que $\frac{\partial p}{\partial y}$ est négligeable dans l'épaisseur de la couche limite dynamique (**la pression ne varie pas de façon appréciable à travers δ**). On a donc :

$p(x, y) = p(x) = p_\infty(x)$ $\quad$ ($= p_\infty$ si la pression est constante dans l'écoulement infini)

Soit : $$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{dp}{dx} = \frac{dp_\infty}{dx}$$

❖ Les termes intervenant dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant la direction y sont un ordre de grandeur plus petits que ceux intervenant dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant la direction x. On ne tiendra ainsi plus compte de cette équation dans la description des couches limites.

Ainsi, à partir de l'analyse de grandeur des termes intervenant dans les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, on obtient **les équations de couche limite dynamique** :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

$$\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}}_{inertie} = \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\substack{diffusion\ de\ qté\ de\ mvt \\ ou\ dissipation\ visqueuse}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_\infty}{\partial x} \qquad (2)$$

III.1.b Analyse d'ordre de grandeur de $\delta(x)$ et $\tau_0(x)$.

On se place dans le cas où $\underline{p_\infty = Cste}$

On considère un profil linéaire de vitesse dans la couche limite dynamique et on analyse l'ordre de grandeur des termes intervenant dans les équations (1) et (2).

A l'échelle de δ, $u \approx U_\infty$. L'équation (1) entraine alors : $v \approx \frac{\delta}{x} U_\infty$

L'analyse d'ordre de grandeur des termes intervenant dans l'équation (2) aboutit à :

$$u \quad \frac{\partial u}{\partial x} \quad + \quad v \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad = \quad \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$U_\infty \frac{U_\infty}{x} \quad , \quad \frac{\delta}{x} U_\infty \frac{U_\infty}{\delta} \quad \approx \quad \nu \frac{U_\infty}{\delta^2}$$

D'où $\quad \frac{\delta^2}{x^2} \approx \frac{\nu}{U_\infty x} \qquad \frac{\delta}{x} \approx Re_x^{-1/2}$

On en déduit un ordre de grandeur de la contrainte locale de cisaillement à la paroi :

$$\tau_0(x) = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \approx \mu \frac{U_\infty}{\delta} \approx \rho \frac{\mu}{\rho} \frac{U_\infty}{x} \frac{x}{\delta} \approx \rho U_\infty^2 \frac{\nu}{x U_\infty} Re_x^{1/2}$$

Soit $\qquad \tau_0(x) = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \approx \rho U_\infty^2 Re_x^{-1/2}$

D'où le coefficient de frottement pariétal local :

$$\boldsymbol{Cf_x = \frac{\tau_0(x)}{1/2 \rho U_\infty^2} \approx Re_x^{-1/2}}$$

III.2 Etude du problème thermique

III.2.a Equation de couche limite

Soit $\delta_T = \delta_T(x)$ **l'épaisseur de la couche limite thermique** à une position x le long de la paroi.

Hypothèse de couche limite : $\delta_T(x) \ll x$

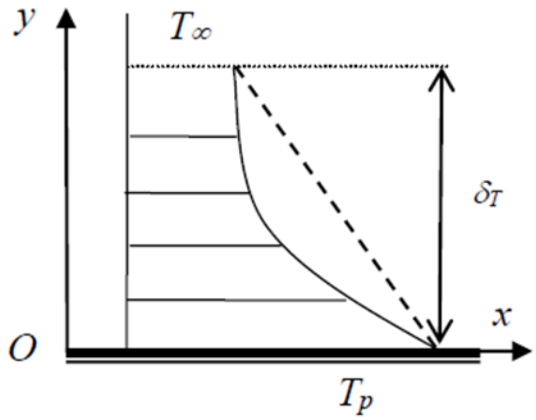
Dans la couche limite thermique, la température varie de T_∞ loin de la paroi à T_p à la paroi :

$$\begin{cases} T(x, y = \delta_T) = T_\infty \\ u(x, y = 0) = T_p(x) \end{cases}$$

L'analyse d'ordre de grandeur donne :

$$\frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{T_\infty - T_p}{\delta_T} \quad \text{(Profil linéaire de } T\text{)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad \text{car} \qquad \frac{\partial^2 T / \partial x^2}{\partial^2 T / \partial y^2} \approx \frac{T_\infty - T_p}{x^2} \frac{\delta_T^2}{T_\infty - T_p} = \left(\frac{\delta_T}{x}\right)^2 \ll 1$$



Ainsi, le processus de diffusion de la chaleur dans la direction de l'écoulement est négligeable devant celui se produisant à travers la couche limite.

Si on néglige la dissipation visqueuse, Φ, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\underbrace{u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}}_{convection} = \underbrace{\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{diffusion} \qquad (3)$$

❖ **Mise sous forme sans dimension de l'équation de l'énergie**

On note $\Delta T = T_p - T_\infty$ et on choisit une longueur de référence $L_{réf}$ (longueur de la plaque par exemple). On pose : $\theta = \frac{T-T_p}{\Delta T}$ $\quad \bar{u} = \frac{u}{U_\infty}$ $\quad \bar{v} = \frac{v}{U_\infty}$ $\quad \bar{x} = \frac{x}{L_{réf}}$ $\quad \bar{y} = \frac{y}{L_{réf}}$

$$(3) \qquad \Longrightarrow \frac{U_\infty \Delta T}{L_{réf}}\left(\bar{u}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{y}}\right) = \alpha\frac{\Delta T}{L_{réf}^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{y}^2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \bar{u}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{y}} = \frac{\alpha}{U_\infty L_{réf}}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{y}^2} = \frac{1}{Pe_{L_{réf}}}\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{y}^2}$$

On voit apparaître le groupement sans dimension, appelé **<u>nombre de Peclet</u>**, $Pe = \frac{U_\infty L_{réf}}{\alpha}$ qui quantifie les effets d'advection (convection) par rapport aux effets de diffusion thermique.

On peut décomposer ce nombre de Péclet : $Pe = \frac{U_\infty L_{réf}}{\nu}\frac{\nu}{\alpha}$

$$\Leftrightarrow \qquad Pe = Re.Pr$$

Avec $\qquad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ **nombre de Prandtl**

Le nombre de Prandtl est un nombre sans dimension caractéristique du fluide mis en jeu, qui quantifie le phénomène de diffusion visqueuse par rapport au phénomène de diffusion thermique.

On distinguera les deux cas extrêmes :

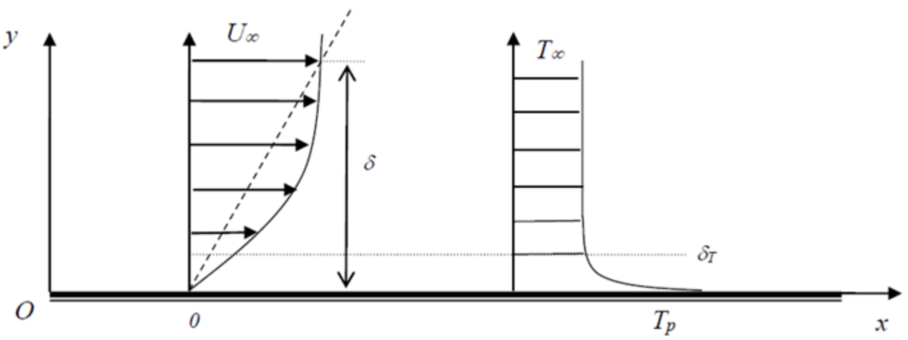
- $Pr \gg 1$ (fluides classiques) $\Leftrightarrow$ $\nu \gg \alpha$, ce qui se traduit, au niveau des couche limites par $\delta(x) \gg \delta_T(x)$. En effet la diffusivité de quantité de mouvement étant très supérieure à la diffusivité thermique, la couche limite dynamique va s'étendre beaucoup plus vite que la couche limite thermique.

- $Pr \ll 1$ (métaux liquides) $\Leftrightarrow$ $\nu \ll \alpha$, ce qui se traduit, au niveau des couche limites par $\delta(x) \ll \delta_T(x)$. En effet la diffusivité thermique étant très supérieure à la diffusivité de quantité de mouvement, la couche limite thermique va s'étendre beaucoup plus vite que la couche limite dynamique.

Ex : pour les gaz, Pr ≈ 1 (air : Pr = 0.7). Pour l'eau : Pr ≈ 10.

III.2.b Analyse d'ordre de grandeur de $\boldsymbol{\delta_T(x)}$.

- **Pr >> 1**



On cherche à estimer l'ordre de grandeur de la vitesse à l'échelle de δ_T..

En première approximation, on assimile le profil de vitesse dans la couche limite dynamique à un profil linéaire : $\frac{u}{y} \approx \frac{U_\infty}{\delta}$

- <u>à l'échelle de δ_T :</u> $\frac{u}{\delta_T} \approx \frac{U_\infty}{\delta}$ $\quad u \approx \frac{\delta_T}{\delta} U_\infty$

L'équation (1) entraine : $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\partial v}{\partial y}$. L'analyse d'ordre de grandeur, à l'échelle de δ_T, de ces deux termes donne : $\frac{u}{x} \approx \frac{v}{\delta_T} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\delta_T}{\delta}\frac{U_\infty}{x} \approx \frac{v}{\delta_T} \quad \Longrightarrow \quad v \approx \frac{\delta_T^2}{\delta}\frac{U_\infty}{x}$

Reprenons l'équation (3) et estimons l'ordre de grandeur des différents termes :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\frac{\delta_T}{\delta} U_\infty \frac{\Delta T}{x} \;,\; \frac{\delta_T^2}{\delta} U_\infty \frac{\Delta T}{\delta_T} \approx \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

On remarque que les deux termes de convection sont du même ordre de grandeur.

$$\frac{\delta_T}{\delta} U_\infty \frac{\Delta T}{x} \approx \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

D'où

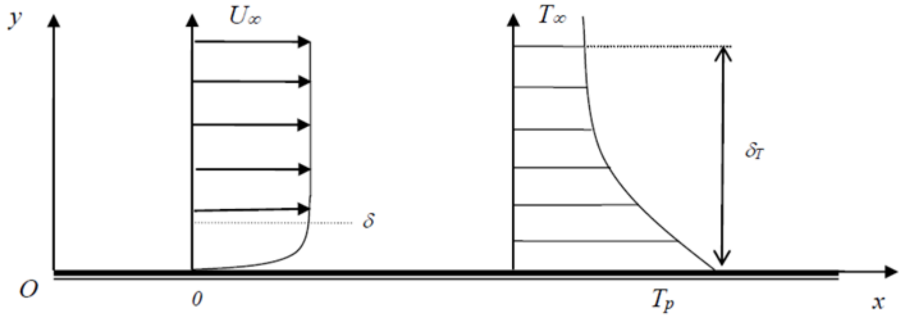
$$\delta_T^2 \approx \alpha \frac{\delta x}{U_\infty} = \frac{\alpha x^2}{U_\infty}\frac{\delta}{x}$$

Avec $\frac{\delta}{x} \approx Re_x^{-1/2}$

On obtient, pour $Pr \gg 1$: $\frac{\delta_T}{x} \approx Pr^{-1/3} Re_x^{-1/2}$

$\frac{\delta_T}{\delta} \approx Pr^{-1/3}$

- **Pr << 1**



- <u>à l'échelle de δ_T :</u> $u \approx U_\infty$

L'équation (1) entraine : $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\partial v}{\partial y}$. L'analyse d'ordre de grandeur de ces deux termes donne : $\frac{u}{x} \approx \frac{v}{\delta}$ $\Longrightarrow$ $v \approx \frac{\delta}{x} U_\infty$

$$(3) \quad \Rightarrow U_\infty \frac{\Delta T}{x} \;, \quad U_\infty \frac{\Delta T}{x} \frac{\delta}{\delta_T} \quad \approx \quad \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

Dans ce cas, on constate que le terme représentant le transport de chaleur par convection dans la direction y est négligeable devant celui représentant le transport par convection dans la direction $x (\delta \ll \delta_T)$

On obtient, pour $Pr \ll 1$: $\frac{\delta_T}{x} \approx Pr^{-1/2} Re_x^{-1/2}$

$\frac{\delta_T}{\delta} \approx Pr^{-1/2}$

Rq : dans le cas des gaz (et de l'air en particulier), $Pr \sim 1$ et donc $\delta \sim \delta_T$

III.2.c Coefficient d'échange et nombre de Nusselt

Rappelons que le flux de chaleur local, au voisinage de la paroi, peut s'écrire :

$$\varphi(x) = -\lambda \left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right)_{y=0^+} = h(x)\big(T_p(x) - T_\infty\big) \quad \Rightarrow \quad h(x) = -\frac{\lambda}{T_p(x) - T_\infty} \left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right)_{y=0^+}$$

L'analyse d'ordre de grandeur des termes intervenant dans cette relation s'écrit :

$$h(x) \approx -\frac{\lambda}{T_p(x) - T_\infty} \frac{T_\infty - T_p(x)}{\delta_T} \;\Rightarrow\; h(x) \approx \frac{\lambda}{\delta_T} \;\Rightarrow\; \frac{h(x)x}{\lambda} \approx \frac{x}{\delta_T}$$

Le groupement sans dimension $\frac{h(x)x}{\lambda}$ est appelé **nombre de Nusselt** local. Il représente **un flux de chaleur sans dimension** :

$$Nu_x = \frac{h(x)x}{\lambda} \approx \frac{x}{\delta_T}$$

Plus précisément, le nombre de Nusselt quantifie le rapport entre le flux de chaleur échangé par convection et un flux de chaleur conductif de référence. Si on note $L_{réf}$ une longueur de référence du système :

$$Nu_{L_{réf}} = \frac{\varphi_{convectif}}{\varphi_{conductif}} = \frac{h\Delta T}{\lambda \frac{\Delta T}{L_{réf}}} = \frac{hL_{réf}}{\lambda}$$