Chapitre 3 : Caractéristiques géométriques des sections droites

3.1. Introduction

Pour une sollicitation de traction ou compression simple, seule la donnée de l'aire de la section droite est nécessaire pour étudier ou vérifier la résistance d'une section d'une poutre par exemple. Pour toutes les autres sollicitations, la forme et les dimensions de la section droite de la poutre jouent un rôle prépondérant sur le comportement aux différentes sollicitations de torsion ou de flexion.

3.2. Aire d'une section

Par définition l'aire A d'une section est définie par l'intégrale:

$$A = \int_A dA \qquad (1.1)$$

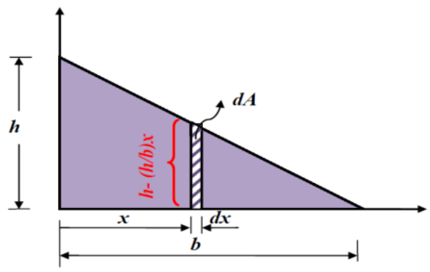


Fig. 3.1

Exemple 3.1

Calculer l'aire d'un triangle.

Solution 3.1

Soit la surface triangulaire plane montrée par la figure ci-contre.

Considérons une surface élémentaire telle que:

$$dA = h\left(1 - \frac{x}{b}\right)dx$$

$$A = \int_A dA = \int_0^b h\left(1 - \frac{x}{b}\right)dx = \frac{bh}{2}$$

Remarque

Si la section est composée, nous la décomposons en sections usuelles et l'aire est calculée comme: $\boxed{A = \sum_{i=1}^{n} A_i}$

3.3. Moment statique

Le moment statique $\boldsymbol{S}$ d'une section par rapport à un axe *ox* ou *oy* (Fig. 3.2) est donné par l'une des expressions suivantes:

$$S_X = \int_A y\,dA \qquad (1.2)$$

$$S_Y = \int_A x\,dA \qquad (1.3)$$

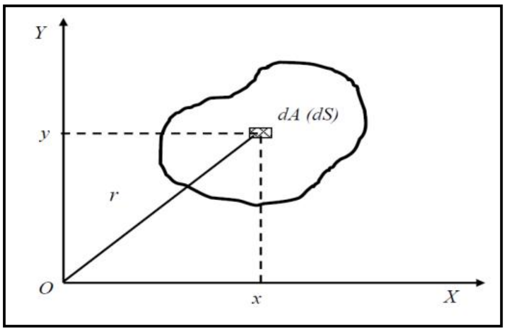


Fig. 3.2*- Section plane.*

Si on procède à des translations parallèlement aux axes *ox* et *oy*, les moments statiques changent. Soit la section montrée par la figure (3.2) telle que S_X, S_Y, A sont connus et on se propose de déterminer $S_{X'}$ et $S_{Y'}$.

De la figure (3.3), on a:

$$x' = x - a\ ;\ y' = y - b$$

Par définition, on a:

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{X'} = \int_A y'\,dA = \int_A (y-b)\,dA \\ S_{Y'} = \int_A X'\,dA = \int_A (x-a)\,dA \end{array}}$$

d'où:

$$S_{X'} = S_X - b.A \qquad (1.4)$$

$$S_{Y'} = S_Y - a.A \qquad (1.5)$$

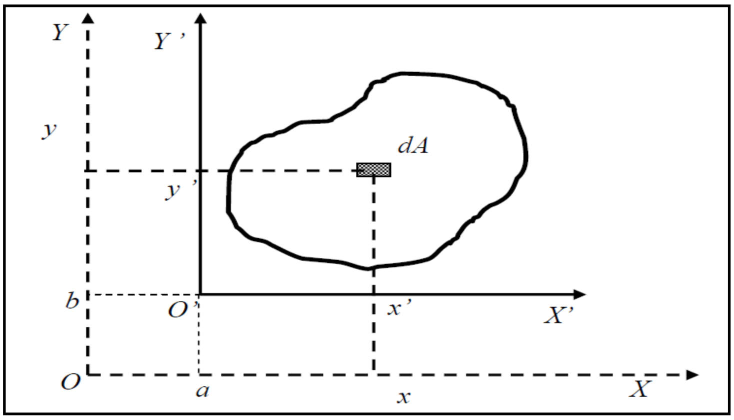


Fig. 3.3*- Translation des axes.*

Unité : le moment statique a pour dimension la troisième puissance d'une longueur, il s'exprime en $\mathbf{m^3}$, $\mathbf{cm^3}$ ou $\mathbf{mm^3}$.

3.4. Centre de gravité

On peut choisir ***a*** et ***b*** de sorte que $S_{X'}$ et $S_{Y'}$ soient nuls, c-à-d : $a = S_Y / A$; $b = S_X / A$
- l'axe pour lequel le moment statique est nul s'appelle axe ***central***
- le point d'intersection de deux axes centraux s'appelle ***centre de gravité*** d'une section.

Ainsi, les coordonnées du centre de gravité d'une section s'écrivent :

$$x_G = S_Y / A \; ; \; y_G = S_X / A \qquad (1.6)$$

Définition

Le centre de gravité ***G*** d'une section est le point tel que le moment statique de la section par rapport à n'importe quel axe passant par ce point est nul.

On peut dire que le moment statique d'une section est égal au produit de l'aire de la section par la distance entre son centre de gravité ***G*** et l'axe.

Les figures (3.4) et (3.5) montrent des exemples de positions de centres de gravité.

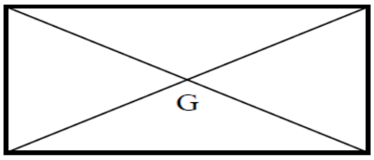


Fig. 3.4*- Aire rectangulaire.*

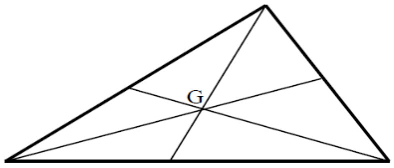


Fig. 3.5*- Aire triangulaire (Intersection des médianes).*

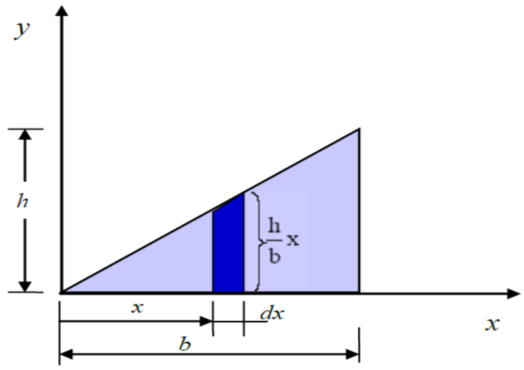
Exemple 3.2 : *Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la section triangulaire ci-dessous.*

Solution 3.2

$$X_G = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b x\left(\frac{h}{b}x\,dx\right)}{\int_0^b \frac{h}{b}x\,dx}$$

D'où : $\boxed{X_G = \frac{2}{3}b}$

Fig. 3.6



$$Y_G = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b \frac{1}{2}\left(\frac{h}{b}x\right)\left(\frac{h}{b}x\,dx\right)}{\int_0^b \frac{h}{b}x\,dx}$$

D'où : $\boxed{Y_G = \frac{1}{3}h}$

Remarque : *Pour* ***une section composée****, les coordonnées du centre de gravité sont données par les expressions:*

$$Sx = \sum y_{Gi}.Ai \; ; \; i = 1, n \qquad (1.7)$$

$$Sy = \sum x_{Gi}.Ai \; ; \; i = 1, n \qquad (1.8)$$

Calcul des coordonnées du centre de gravité des sections planes par décomposition

$N°$	A_i (cm^2)	x_i (cm)	y_i (cm)	$x_i.A_i$ (cm^3)	$y_i.A_i$ (cm^3)	$x_G = \frac{\Sigma(x_i.A_i)}{\Sigma(A_i)}$ (cm)	$y_G = \frac{\Sigma(y_i.A_i)}{\Sigma(A_i)}$ (cm)
1							
2							
3							
.							
.							
.							
n							
Total	$\Sigma(A_i)$			$\Sigma(x_i.A_i)$	$\Sigma(y_i.A_i)$		

Propriétés

Si la section possède un axe de symétrie, le centre de gravité G est situé sur cet axe. A défaut d'axes de symétrie on procède à:

- Choisir un référenciel **(O,x,y)**
- Calculer le moment statique $\boldsymbol{S}$ de la section par rapport aux axes du référentiel
- Calculer l'aire totale de la section
- Utiliser la propriété du moment statique : $S_Y = X_G.A$, $S_X = Y_G.A$

Exemple 3.3 : *Calculer les coordonnées du centre de gravité de la section plane suivante.*

Solution 3.3

$S_X= 2,5(5x10)-4(2x3)-1,5(3x2) = 125-24-9 = 92cm3$

$S_Y=5(5x10)-1,5(2x3)-9(3x2) = 250-9-54 = 187cm3$

$X_G = S_Y / A = 187/38 = 4,9cm$

$Y_G = S_X / A = 92/38 = 2,4cm$

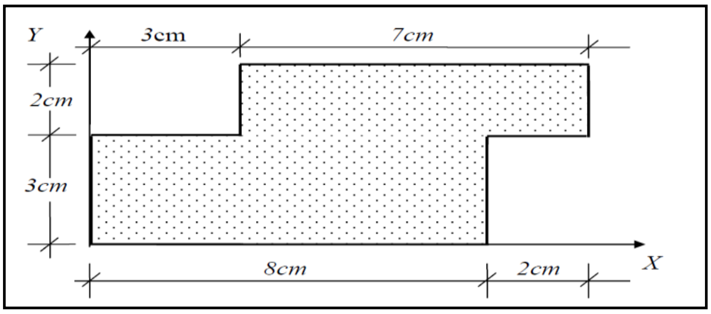


Fig. 3.7

3.5. Moment d'inertie (Moment quadratique)

3.5.1. Définition

On définit le moment d'inertie ou moment quadratique d'une section comme le **degré de résistance** de cette section aux efforts extérieurs appliqués, en tenant compte de la forme de cette section.

Par définition, les intégrales:

$$\boxed{I_x = \int_A y^2 dA} \quad (1.9)$$

$$\boxed{I_y = \int_A x^2 dA} \quad (1.10)$$

s'appellent moments d'inertie de la section A par rapport aux axes ox et oy, respectivement, conformément à la figure 3.8.

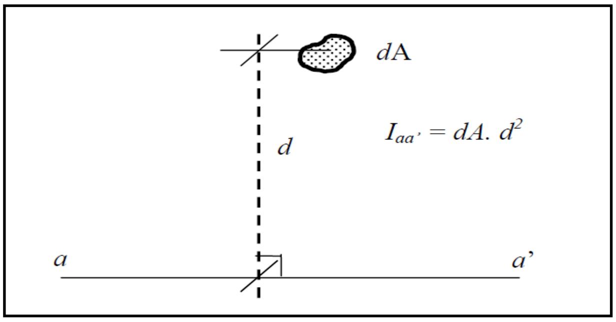


Fig. 3.8 *Moment quadratique d'une section.*

Ces expressions sont déduites de la définition suivante :

Le moment d'inertie d'une surface infiniment petite par rapport à un axe éloigné de cette surface est égal au produit de son aire par le carré de la distance à l'axe.

le moment d'inertie est toujours positif et s'exprime en $\boldsymbol{m^4}$ ($\boldsymbol{cm^4}$, $\boldsymbol{mm^4}$).

L'intégrale:

$$\boxed{I_{xy} = \int_A xy dA} \quad (1.11)$$

s'appelle moment centrifuge ou **produit d'inertie** de la section A par rapport au système xoy.

Remarque

Les moments quadratiques $\boldsymbol{Ix}$ et $\boldsymbol{Iy}$ sont toujours positifs, tandis que le moment produit $\boldsymbol{Ixy}$ peut être positif, négatif ou nul.

Exemple 3.4 : *Calculer les moments quadratiques par rapport aux axes o'x' et o'y' et le moment produit pour le rectangle montré par la figure suivante.*

Solution 1.4

$$I_{x'} = \int_A y'^2\, dA$$

$$I_{x'} = \int_0^H y'^2 .b.dy' = \frac{bh^3}{3}$$

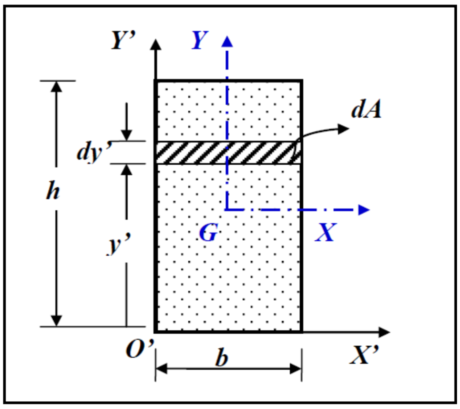


Fig. 3.9

De la même manière

$$I_{y'} = \int_A x'^2\, dA = \frac{b^3 h}{3}$$ *et*

$$I_{x'y'} = \int_A x'.y'^2\, dA$$

$$I_{x'y'} = \int_0^H \int_0^B x'.y'.dx'.dy' = \frac{b^2 h^2}{4}$$

3.5.2. Moment d'inertie polaire

Le moment d'inertie polaire de la section montrée par la figure 3.10 est donné par la relation:

$$I_P = \int_A r^2 dA \qquad (1.12)$$

Avec :

$r^2 = x^2 + y^2$

D'où :

$$I_P = I_x + I_y \qquad (1.13)$$

Le moment d'inertie polaire est toujours positif et n'est jamais nul.

Théorème : *Le moment d'inertie polaire d'une section par rapport à tout point de cette section est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires passant par ce point.*

Exemple 3.5 : *Pour le quart de cercle montré par la figure (3.10), calculer le moment quadratique polaire I_O.*

Solution 3.5

De la définition du moment d'inertie polaire et la figure (3-10) on écrit:

$$I_O = \int_A r^2 dA = \int_A r^2 (r dr d\theta)$$

$$I_O = \left(\int_0^R r^3 dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) = \frac{\pi R^4}{8}$$

Ou en terme de diamètre $$\boxed{I_O = \frac{\pi D^4}{128}}$$

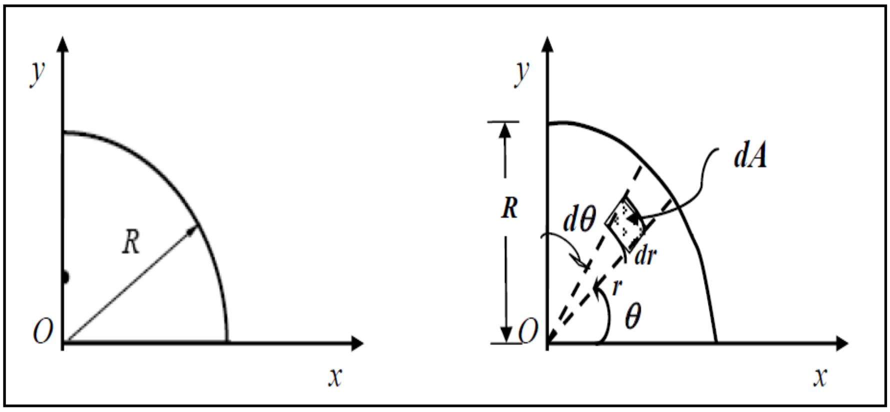


Fig. 3.10

3.6. Variations des moments d'inertie

3.6.1. Translation des axes

Soit une section ***A***, ses moments d'inertie dans le système ***xoy***: ***Ix***, ***Iy***, ***Ixy*** sont connus. On se propose de calculer les moments d'inertie de la section *A* dans le système ***x'o'y'*** en procédant aux translations des axes *ox* et *oy* conformément à la figure 3.11.

x' = x + a ; y' = y + b

$$I_{x'} = \int_A y'^2\, dA = \int_A (y+b)^2\, dA$$

$$= \int_A y^2 dA + 2b\int_A y dA + b^2 \int_A dA$$

D'où

$$I_{x'} = I_x + 2bS_x + b^2 A \qquad (1.14)$$

On suit le même raisonnement pour *Iy'* et *Ix'y'*.

Si le point *O* coïncide avec le centre de gravité G, les moments statiques **Sx** et **Sy** deviennent nuls et on a:

$$I_{x'} = I_x + b^2 A \qquad (1.15)$$

$$I_{y'} = I_y + a^2 A \qquad (1.16)$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + abA \qquad (1.17)$$

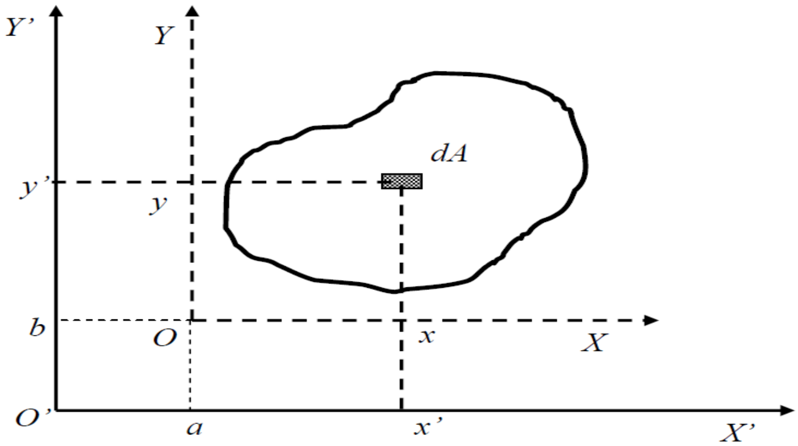


Fig. 3.11 Moment d'inertie d'une section et translation des axes.

3.6.2 Théorème de Huygens -Principe des axes parallèles-

Le moment d'inertie d'une section par rapport à un axe quelconque *Δ* est égal au moment d'inertie de la section par rapport à l'axe passant par son centre de gravité et parallèle à *Δ* augmenté du produit de l'aire de la section par le carré de la distance entre les deux axes.

$$\boxed{I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + d^2 A} \qquad (1.18)$$

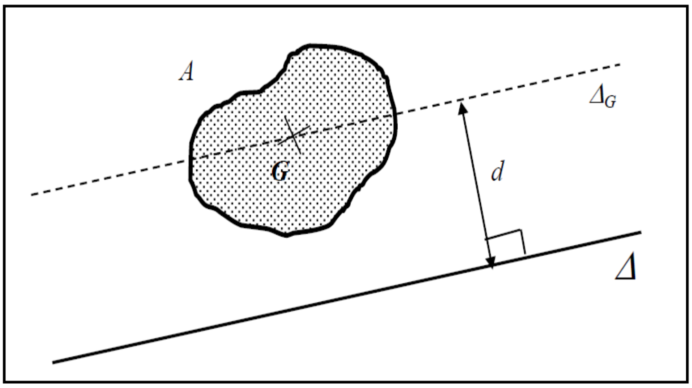


Fig. 3.12- Schématisation du théorème de Huygens.

Exemple 3.7

Déterminer les moments d'inertie par rapport au système ***xoy*** *pour le rectangle montré par la figure ci-dessous.*

Solution 3.7

De la relation de Huygens on écrit:

$$I_x = I_{x'} - d^2 A$$

$$= \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}$$

Et

$$I_y = I_{y'} - d^2 A$$

$$= \frac{b^3 h}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{b^3 h}{12}$$

De même

$$I_{xy} = I_{x'y'} - abA$$

$$= \frac{b^2 h^2}{4} - \frac{b}{2}\frac{h}{2} bh = 0$$

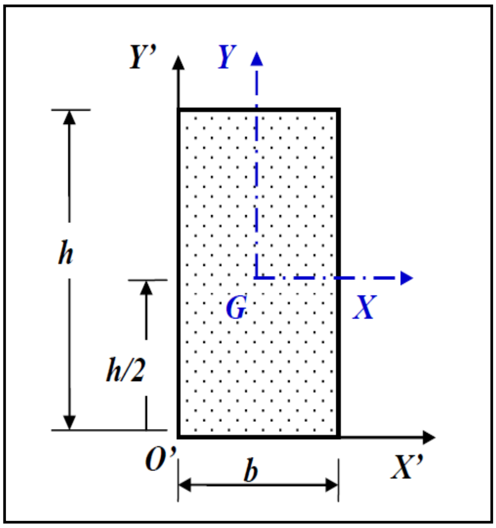


Fig. 3.14

Car les axes x et y sont centraux.

Remarque : Pour **une section composée** nous pouvons utiliser le tableau suivant

N°	$I_{Gxi} = (I_{xi} + b_i^2.Ai)$ (cm^4)	$I_{Gyi} = (I_{yi} + a_i^2.A_i)$ (cm^4)	$I_{GxiGyi} = (I_{xiyi} + a_i.b_i.A_i)$ (cm^4)
1			
2			
3			
. . .			
n			
Total	$I_{Gx} = \sum(I_{Gxi})$	$I_{Gy} = \sum(I_{Gyi})$	$I_{GxGy} = \sum(I_{Gyi})$

3.7. Rotation des axes

Soit une section A, ses moments d'inertie dans le système xoy Ix, Iy, Ixy sont connus. On se propose de calculer les moments d'inertie de la section A dans le système ***uov*** qui fait un angle θ avec le système xoy (Fig. 3.15).

D'après la figure (3.15)

$$u = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$v = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

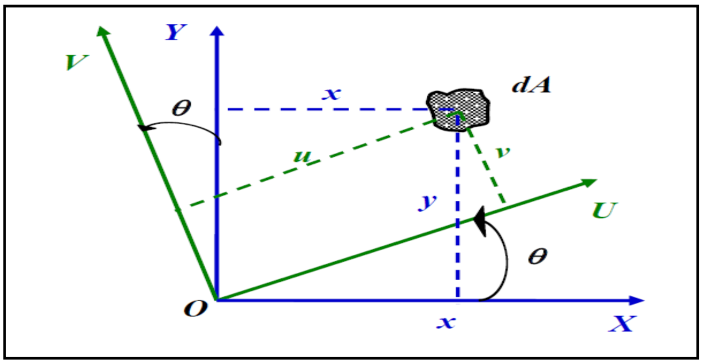


Fig. 3.15- Moment d'inertie d'une section et rotation des axes.

En utilisant la définition du moment d'inertie, on écrit:

$$I_u = \int_A v^2 dA$$

$$= \cos^2\theta\int_A y^2 dA + \sin^2\theta\int_A x^2 dA - 2\sin\theta\cos\theta\int_A xydA$$

$$= \cos^2\theta.I_x + \sin^2\theta.I_y - 2\sin\theta\cos\theta.I_{xy}$$

En utilisant les relations trigonométriques:

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}; \quad \cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

L'expression ci-dessus devient:

$$I_u = \frac{1+\cos 2\theta}{2}I_x + \frac{1-\cos 2\theta}{2}I_y - \frac{1}{2}\sin 2\theta I_{xy}$$

Ou bien,

$$\boxed{I_u = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta} \qquad (1.19)$$

En suivant le même raisonnement on obtient:

$$\boxed{I_v = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta} \qquad (1.20)$$

$$\boxed{I_{uv} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta} \qquad (1.21)$$

On remarque que :

$$\boldsymbol{Ix + Iy = Iu + Iv} \qquad (1.22)$$

Cela signifie que la somme des moments quadratiques par rapport à deux axes perpendiculaires reste constante quelque soit la valeur de l'angle de rotation θ.

3.7.1. Moments principaux - axes principaux d'inertie

- En dérivant Iu et Iv par rapport à 2θ on obtient:

$$-\frac{dI_u}{d(2\theta)} = +\frac{dI_v}{d(2\theta)}$$

Les extrema sont donnés pour:

$$\frac{d}{d(2\theta)} = 0$$

D'où

$$\boxed{tg\,2\theta = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}} \qquad (1.23)$$

Cette relation est satisfaite pour deux valeurs de θ entre 0 et π qui correspondent à un maximum I_1 (I_{max}) et un minimum I_2 (I_{min}) qui sont les ***moments principaux d'inertie.***

- Les axes correspondant aux moments d'inertie principaux sont appelés ***axes principaux.***

- Pour déterminer (I_{max}) et (I_{min}), on peut utiliser le ***cercle de Mohr***. Pour tracer le cercle de Mohr, on suit les étapes suivantes:
  1- tracer un repère orthogonal et orthonormé (O, I_Q, I_{QR}) (Fig. 3.16)
  2- placer les points $A(Ix, Ixy)$ et $B(Iy, -Ixy)$ dans ce repère
  3- déduire le point C, point d'intersection de la droite AB et l'axe des abscisses
  4- déduire du cercle de Mohr I_{max} (I_1) et I_{min} (I_2):

On a

$$I_{max} = I_1 = \overline{OC} + R$$

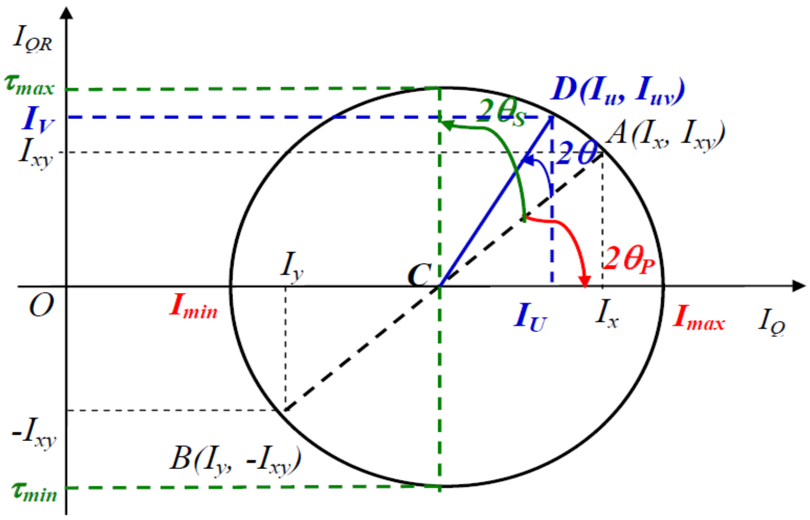
$$I_{min} = I_2 = \overline{OC} - R$$

D'où

$$\boxed{I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}} \qquad (1.24)$$

$$\boxed{I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}} \qquad (1.25)$$

Fig. 3.16- Cercle de Mohr.



3.8. Rayon de giration

Le rayon de *giration d'une surface A* selon l'axe *x* ou l'axe *y* est défini par:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad ou \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{1.26}$$

Exemple 1.9

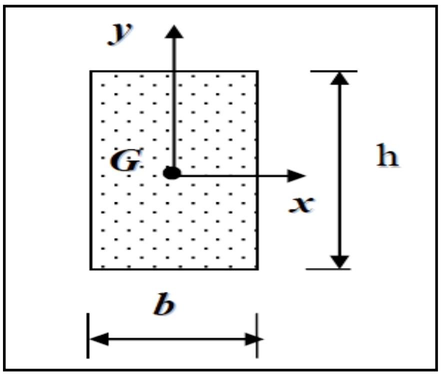
Calculer les rayons de giration d'un rectangle.

Solution 1.9

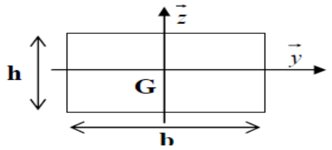
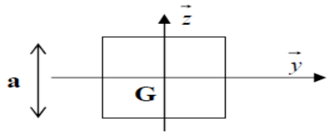
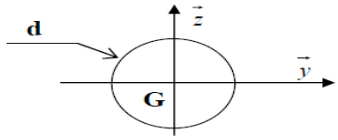
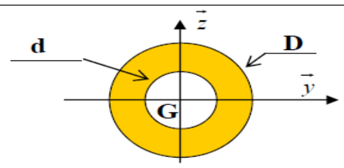
Soit la surface rectangulaire montrée par la figure suivante:

Les rayons de giration sont:

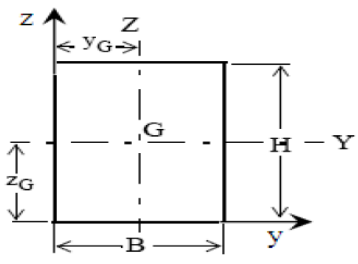
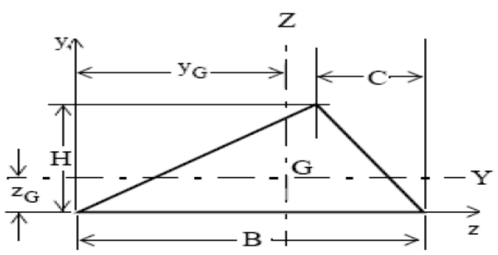
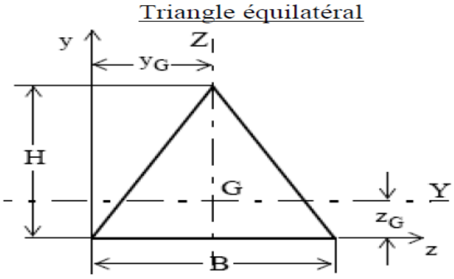
$$i_x = \sqrt{\frac{\left(bh^3/12\right)}{bh}} \approx 0{,}3h \quad ; \quad i_y = \sqrt{\frac{\left(b^3h/12\right)}{bh}} \approx 0{,}3b$$

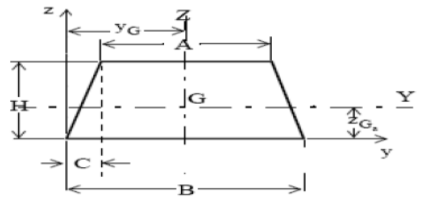
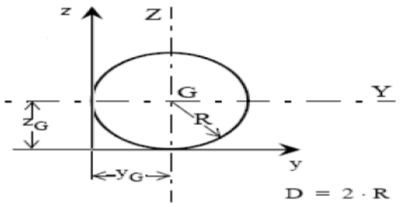
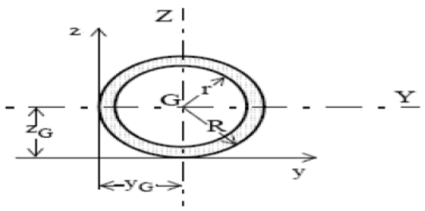


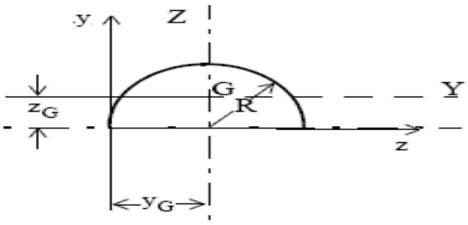
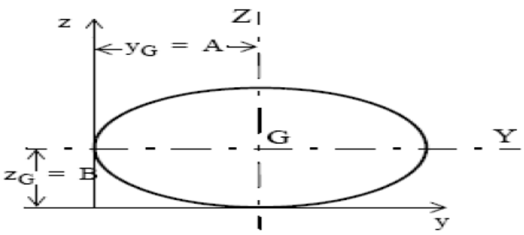
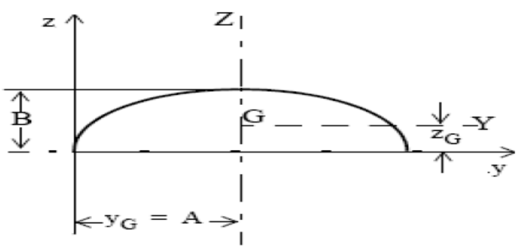
Moments quadratiques ou inerties à connaître

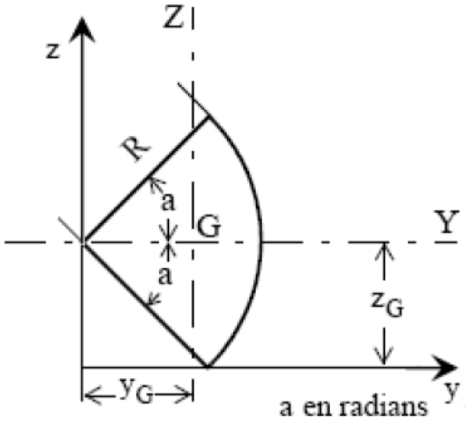
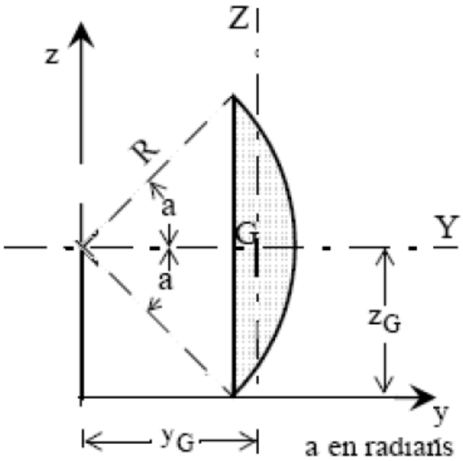
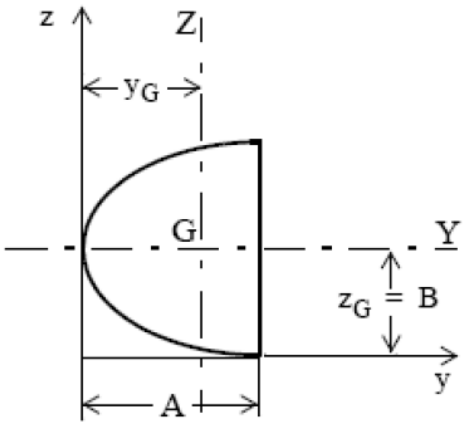
	I_{Gyy}	I_{Gzz}	$I_G = I_{Gyy} + I_{Gzz}$
	$\frac{b.h^3}{12}$	$\frac{h.b^3}{12}$	$\frac{hb}{12}(b^2+h^2)$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$
	$\frac{\pi.d^4}{64}$	$\frac{\pi.d^4}{64}$	$\frac{\pi.d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$

Caractéristiques géométriques des sections usuelles

Section	Aire / Coordonnées du centre de gravité	Moments quadratiques
Rectangle 	A = B.H $y_G = \frac{B}{2}$ $z_G = \frac{H}{2}$	$I_Y = \frac{BH^3}{12}$ $I_Z = \frac{HB^3}{12}$
Triangle quelconque 	A = B.H / 2 $y_G = \frac{2B + C}{3}$ $z_G = \frac{H}{3}$	$I_Y = \frac{BH^3}{36}$ $I_Z = \frac{BH}{36}\cdot(B^2 + C^2 - BC)$
Triangle équilatéral 	A = B.H / 2 $y_G = \frac{B}{2}$ $z_G = \frac{H}{3}$	$I_Y = \frac{BH^3}{36}$ $I_Z = \frac{B^3 H}{48}$

Trapèze isocèle 	A = (A + B).H / 2 $y_G = \dfrac{B}{2}$ $z_{G_a} = \dfrac{H\cdot(B+2A)}{3\cdot(B+A)}$	$I_Y = \dfrac{H^3\cdot(A^2+4AB+B^2)}{36\cdot(A+B)}$ $I_Z = \dfrac{H\cdot(A+B)\cdot(A^2+B^2)}{48}$
Cercle 	A = π R² $y_G = R$ $z_G = R$	$I_Y = \dfrac{\pi\cdot R^4}{4}$ $= 0.0491\cdot D^4$ $I_Z = \dfrac{\pi\cdot R^4}{4}$ $= 0.0491\cdot D^4$
Cercle creux (tube) 	A = π (R² - r²) $y_G = R$ $z_G = R$	$I_Y = \dfrac{\pi\cdot(R^4-r^4)}{4}$ $I_Z = \dfrac{\pi\cdot(R^4-r^4)}{4}$

Demi-cercle 	A =π R² / 2 $y_G = R$ $z_G = 0.2122\cdot D$ $= 0.4244\cdot R$	$I_Y = 0.1098\cdot R^4$ $I_Z = 0.3927\cdot R^4$
Ellipse 	Aire = π.A.B $y_G = A$ $z_G = B$	$I_Y = \dfrac{\pi\cdot AB^3}{4}$ $= 0.7854\cdot AB^3$ $I_Z = \dfrac{\pi\cdot A^3B}{4}$ $= 0.7854\cdot A^3B$
Demi-ellipse 	Aire = π.A.B / 2 $y_G = A$ $z_G = 0.424\cdot B$	$I_Y = 0.1098\cdot AB^3$ $I_Z = 0.3927\cdot A^3B$

Secteur circulaire  $\varphi = 2.a$ (en degré)	$A = (\pi/360°).\varphi.R^2$ $y_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{R\sin a}{a}$ $z_G = R\sin a$	$I_Y = \frac{R^4}{4} \cdot (a - \sin a \cos a)$ $I_Z = \frac{R^4}{4} \cdot \left(a - \frac{16(\sin a)^2}{9a} + \frac{\sin 2a}{2}\right)$
Segment circulaire 	$A = \frac{R^2}{2}(2a - \sin 2a)$ $y_G = \frac{4R(\sin a)^3}{3(2a - \sin 2a)}$ $z_G = R\sin a$	$I_Y = \frac{AR^2}{4}\left(1 - \frac{2(\sin a)^3 \cos a}{3(a - \sin a \cos a)}\right)$ $I_Z = \frac{AR^2}{4}\left(1 + \frac{2(\sin a)^3 \cos a}{a - \sin a \cos a}\right) - \frac{4R^6(\sin a)^6}{9A}$
Segment parabolique 	$A = (2/3).(2B.A)$ $y_G = 0.6 \cdot A$ $z_G = 0.375 \cdot B$	$I_Y = 0.0396 \cdot AB^3$ $I_Z = 0.0457 \cdot A^3B$