

Chapitre 3

Analyse des systèmes discrets en BF

1. Introduction

Soit le système discret de la figure 3.1, avec la fonction de transfert en boucle fermée:

$$G_{yr}(z) = \frac{KG(z)}{1 + KGH(z)} \quad (3.1)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est de la forme:

$$KGH(z) = K \frac{N(z)}{D(z)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \quad (3.2)$$

Comme le système est supposé causal, alors $m \leq n$.

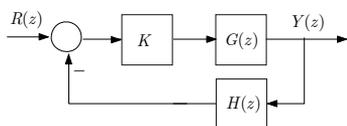


Figure 3.1

L'objectif de ce chapitre est de présenter des méthodes qui permettent d'établir la stabilité du système en boucle fermée à travers l'étude de sa fonction de transfert en boucle ouverte $KGH(z)$. Ces méthodes sont:

- Lieu des racines (d'Evans).
- Diagramme de Nyquist.
- Diagramme de Bode.

2. Lieu des racines

Bien que les règles pour la construction des lieux des racines dans le plan s et dans le plan z sont les mêmes, il existe des différences importantes dans l'interprétation des lieux des racines. Par exemple, dans le plan z , la région stable est l'intérieur du cercle unité. De plus, les positions des racines dans le plan z ont des significations différentes de celles du plan s du point de vue de la réponse temporelle du système.

Soit le système de la figure 3.1 avec $K > 0$, le lieu des racines décrit l'évolution des racines de l'équation caractéristique (pôles en boucle fermée):

$$1 + KGH(z) = 0 \quad (3.3)$$

Soit

$$1 + K \frac{N(z)}{D(z)} = 0 \quad (3.4)$$

Ou

$$D(z) + KN(z) = 0 \quad (3.5)$$

Ou encore

$$\frac{N(z)}{D(z)} = -\frac{1}{K} \quad (3.6)$$

L'équation complexe (3.6) est équivalente aux deux conditions suivantes :

Condition d'amplitude :

$$\boxed{\frac{|N(z)|}{|D(z)|} = \frac{1}{K}} \quad (3.7)$$

Condition de phase :

$$\boxed{\angle GH(z) = \angle N(z) - \angle D(z) = \pm(2l+1)180^\circ, l = 0, 1, 2, \dots} \quad (3.8)$$

Ce qui revient à dire que tout point z_0 appartenant au lieu des racines doit vérifier les conditions de phase et d'amplitude, tel que (figure 3.2):

$$\boxed{\sum_{j=1}^m \angle(z_0 - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(z_0 - p_i) = \pm(2l+1)180^\circ, l = 0, 1, 2, \dots} \quad (3.9)$$

$$\boxed{K = \frac{\prod_{i=1}^n |z_0 - p_i|}{\prod_{j=1}^m |z_0 - z_j|}} \quad (3.10)$$

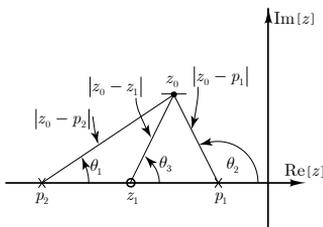


Figure 3.2. Conditions de phase et d'amplitude.

Le tracé du lieu des racines est formulé à travers les règles suivantes:

Règle 1 (Points de départ et points d'arrivée)

Les n branches du lieu d'Evans partent, pour $K = 0$, des pôles de la boucle ouverte. Elles aboutissent, pour $K \rightarrow \infty$, soit aux zéros de la boucle ouverte, soit à l'infini suivant les directions asymptotiques.

Règle 2 (Symétrie)

Le lieu d'Evans est symétrique par rapport à l'axe réel.

Règle 3 (Parties du lieu sur l'axe réel)

Un point de l'axe réel appartient au lieu des racines si, et seulement si le nombre de points

critiques (pôles et zéros) de la boucle ouverte situés à sa droite sur cet axe est impair. Chaque point critique étant compté suivant sa multiplicité.

Règle 4 (asymptotes)

- Il existe $n - m$ directions asymptotiques.
- Les asymptotes des $n - m$ branches font avec l'axe réel des angles:

$$\frac{\pi(2l+1)}{(n-m)}, l = 0, 1, \dots, n - m - 1 \tag{3.11}$$

- Les asymptotes des $n - m$ branches à l'infini se coupent toutes en un point de l'axe réel:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{(n-m)}, 0 \right) \tag{3.12}$$

Règle 5 (Angles de départ d'un pôle et d'arrivée à un zéro)

Si p_k est un pôle de la boucle ouverte, réel ou complexe, de multiplicité q_k , les angles de départ des q_k branches qui partent de p_k sont donnés par :

$$\frac{1}{q_k} \left(180 - \sum_{i=1, i \neq k}^n \angle(p_k - p_i) + \sum_{j=1}^m \angle(p_k - z_j) \right) \tag{3.13}$$

Si z_k est un zéro de la boucle ouverte, réel ou complexe, de multiplicité r_k , les angles d'arrivée des r_k branches qui aboutissent en z_k sont donnés par:

$$\frac{1}{r_k} \left(180 + \sum_{i=1}^n \angle(z_k - p_i) - \sum_{j=1, j \neq k}^m \angle(z_k - z_j) \right) \tag{3.14}$$

Règle 6 (Points de séparation sur l'axe réel)

Les points de séparation sont solution de

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(z - p_i)} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{(z - z_j)} \tag{3.15}$$

ou de

$$\frac{d[GH(z)]}{dz} = 0 \tag{3.16}$$

Règle 7. (Angles des branches aux points de séparation)

Si N branches du lieu se coupent en un point de séparation (c.-à-d que $2N$ morceaux de courbes partent de ce point), l'angle entre deux morceaux de courbes voisins vaut $\pm \pi / N$.

Règle 8. Le gain K à un point z_0 du lieu vaut:

$$K = -\frac{1}{GH(z_0)} = \frac{1}{|GH(z_0)|} = \frac{|D(z_0)|}{|N(z_0)|} \tag{3.17}$$

Règle 9. Intersection du lieu avec le cercle unité

On utilise du critère de Jury pour déterminer les valeurs limites de K .

Stabilité. Le système est asymptotiquement stable en boucle fermée pour les valeurs de K pour lesquelles toutes les racines de $1 + KGH(z) = 0$ (pôles en boucle fermée) sont à l'intérieur du cercle unité.

Exemple 1. Soit le système de figure 3.3.

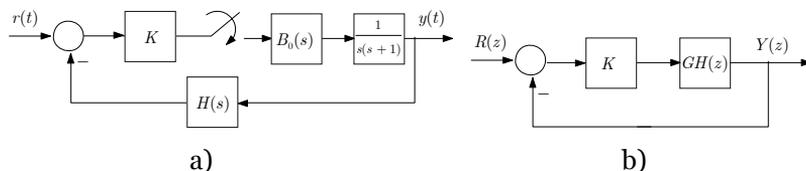


Figure 3.3.

Avec $H(s) = 1$, nous avons:

$$GH(z) = TZ[B_0(s)G(s)] = TZ\left[\frac{1 - e^{-sT_e}}{s} \frac{1}{s(s+1)}\right]$$

Alors

$$GH(z) = \frac{(z-1)}{z} \left(\frac{(e^{-T_e} + T_e - 1)z^2 + (1 - e^{-T_e} - T_e e^{-T_e})z}{(z - e^{-T_e})(z-1)^2} \right)$$

Pour $T_e = 1$ sec

$$KGH(z) = K \frac{0.368(z + 0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

Règle 1. Le lieu des racines commence à $z = 1$ et $z = 0.368$ et termine à $z = -0.717$ et $z = \infty$.

Règle 3. Parties du lieu sur l'axe réel: $[-\infty, -0.717]$ et $[0.368, 1]$.

Règle 4 Il y a $n - m = 1$ asymptote dont l'angle est 180° (l'axe réel vers $-\infty$).

Règle 6 À partir de

$$\frac{dGH(z)}{dz} = \frac{-0.47214z^2 - 0.38524z + 0.45805}{D^2(z)} = 0$$

Les points de séparation sont $z = 0.65$ pour $K = -1/GH(0.65) = 0.196$ et $z = -2.08$ pour $K = -1/GH(-2.08) = 15$.

Règle 7. Deux branches se coupent au point de séparation, $N = 2$, l'angle des branches vaut $\pm\pi/2$.

Règle 9. Intersection du lieu avec le cercle unité

On utilise du critère de Jury pour déterminer les valeurs limites de K .

Le polynôme caractéristique en boucle fermée est:

$$1 + KGH(z) = z^2 + a_1z + a_2$$

$$\text{Avec } a_1 = 0.368K - 1.368, a_2 = 0.368 + 0.26386K$$

Sa table de jury est donnée par:

$$\begin{array}{cccc} z^2 & 1 & a_1 & a_2 \\ z^1 & b_1 & b_2 & \\ z^0 & c_1 & & \end{array}$$

On calcule:

$$[b_1 \ b_2] = [1 \ a_1 \ a_2] - [a_2 \ a_1 \ 1] \frac{a_2}{1} = [(1 - a_2^2) \ (a_1 - a_1 a_2)]$$

$$c_1 = [b_1 \ b_2] - [b_2 \ b_1] \frac{b_2}{b_1} = (1 - a_2^2) - \frac{(a_1 - a_1 a_2)^2}{1 - a_2^2}$$

Les conditions de stabilité sont:

$$b_1 > 0 \Rightarrow a_2 < 1 \Rightarrow K < 2.4$$

$$b_1 > 0 \Rightarrow 1 - a_2^2 - \frac{(a_1 - a_1 a_2)^2}{1 - a_2^2} > 0 \Rightarrow a_1 < 1 \Rightarrow K < 6.43$$

D'où le système est stable pour $0 < K < 2.4$.

Pour la valeur limite du gain $K_{\text{lim}} = 2.4$, le polynôme caractéristique en boucle fermée est $z^2 + 0.488z + 1$. Les pôles en boucle fermée sont $p_{1,2} = 0.244 \pm j0.97 = 1 \angle \pm 75.8^\circ$.

```
z=tf('z')
Gz=0.368*(z+0.717)/((z-1)*(z-0.368))
rlocus(Gz)
axis([-3 2 -1.5 1.5])
```

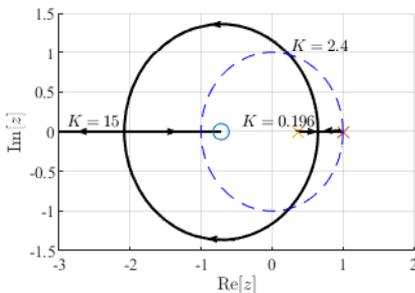


Figure 3.4. Lieu de racines de l'exemple 1.

Exemple 2. Soit le système de la figure 3.3.b, avec:

$$KGH(z) = K \frac{0.1(z - 0.5)}{(z^2 - 0.8z + 1.4)}$$

Règle 1. Le lieu des racines commence des pôles en BO $z = 0.4 + j1.16$ et $z = 0.4 - j1.16$ et termine à $z = 0.5$ et $z = \infty$.

Règle 3. Partie du lieu sur l'axe réel: $[-\infty, 0.5]$.

Règle 4 Il y a $n - m = 1$ asymptote dont l'angle est 180° (l'axe réel vers $-\infty$).

Règle 5 Angles de départ du pôle à $z = 0.4 + j1.16$.

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 180 - \arg(0.4 + j1.16 - (0.4 - j1.16)) + \arg(0.4 + j1.16 - 0.5) \\ &= 180 - \arg(j2.32) + \arg(-0.1 + j1.16) = 180 - 90 + 95 = 185 = -175^\circ\end{aligned}$$

$$\theta_2 = -\theta_1 = 175^\circ$$

Règle 6 À partir de

$$\frac{dGH(z)}{dz} = \frac{-0.1(z^2 - z - 1)}{(z^2 - 0.8z + 1.4)^2} = 0$$

Les points de séparation sont $z = -0.618$ pour $K = -1/GH(-0.618) = 20.361$ valide et $z = 1.618$ pour $K = -1/GH(1.618) = -24.36$ non valide.

Règle 7. Deux branches se coupent au point de séparation, $N = 2$, l'angle vaut $\pm\pi/2$.

Règle 9. Intersection du lieu avec le cercle unité

On utilise du critère de Jury pour déterminer les valeurs limites de K .

Le polynôme caractéristique en boucle fermée est:

$$1 + KGH(z) = z^2 + a_1z + a_2$$

$$\text{Avec } a_1 = 0.1(K - 8), a_2 = 1.4 - 0.05K$$

Sa table de jury est donnée par:

$$\begin{array}{r} z^2 \quad 1 \quad a_1 \quad a_2 \\ z^1 \quad b_1 \quad b_2 \\ z^0 \quad c_1 \end{array}$$

On calcule:

$$[b_1 \quad b_2] = [1 \quad a_1 \quad a_2] - [a_2 \quad a_1 \quad 1] \frac{a_2}{1} = [(1 - a_2^2) \quad (a_1 - a_1a_2)]$$

$$c_1 = [b_1 \quad b_2] - [b_2 \quad b_1] \frac{b_2}{b_1} = (1 - a_2^2) - \frac{(a_1 - a_1a_2)^2}{1 - a_2^2}$$

Les conditions de stabilité sont:

$$b_1 > 0 \Rightarrow -1 < a_2 < 1 \Rightarrow 28 < K < 8$$

$$b_1 > 0 \Rightarrow 1 - a_2^2 - \frac{a_1^2(1-a_2)^2}{1-a_2^2} > 0 \Rightarrow -(1+a_2) < a_1 < (1+a_2) \Rightarrow -32 < K < 21.333$$

D'où le système est stable pour $8 < K < 21.333$. Pour la valeur limite du gain $K_{\text{lim}} = 8$, le polynôme caractéristique en boucle fermée est $z^2 + 1$, les pôles en boucle fermée sont $p_{1,2} = \pm j$. Pour la valeur limite du gain $K_{\text{lim}} = 21.333$, le polynôme caractéristique en boucle fermée est $z^2 + 1.3333z + 0.3333$, les pôles en boucle fermée sont $p_1 = -1, p_2 = -0.3333$.

```
z=tf('z')
Gz=0.1*(z-0.5)/(z^2-0.8*z+1.4)
rlocus(Gz)
axis([-2 1 -1.5 1.5])
```

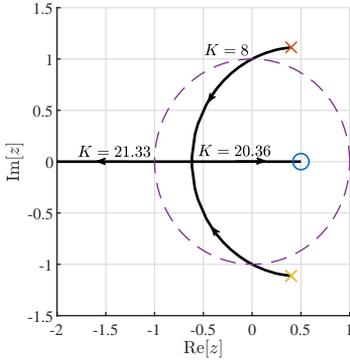


Figure 3.5. Lieu de racines de l'exemple 2.

3. Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle consiste à évaluer $G(z)$ avec $z = e^{sT_e}$ et $s = j\omega$ prenant des valeurs le long de l'axe imaginaire. La réponse fréquentielle permet de caractériser le comportement d'un système linéaire vis-à-vis à des excitations sinusoïdales. Comme l'axe imaginaire $s = j\omega$ représente la limite entre la stabilité et l'instabilité, la réponse fréquentielle permet d'évaluer la stabilité du système.

Comme montré lors de l'étude du spectre d'un système échantillonné, le comportement fréquentielle de $G(e^{j\omega T_e})$ est périodique, puisque, avec $\omega_e = 2\pi/T_e$ et $k = 0, 1, 2, \dots$, on obtient:

$$G(e^{j(\omega+k\omega_e)T_e}) = G(e^{j\omega T_e} e^{jk\omega_e T_e}) = G(e^{j\omega T_e} e^{jk2\pi}) = G(e^{j\omega T_e}) \quad (3.18)$$

Ainsi, il suffit de tracer $G(e^{j\omega T_e})$ sur une période $\omega \in [0, \omega_e]$ pour obtenir le comportement fréquentielle du système.

D'un autre coté, le théorème de l'échantillonnage impose la limite $\omega \leq \omega_e/2$, d'où le tracé effectif est limité à l'intervalle $\omega \in [0, \omega_e/2]$.

Le tracé de la réponse fréquentielle peut avoir comme abscisse $\omega \in [0, \omega_e/2]$ (soit $z = e^{j\omega T_e}$), $v = \omega T_e \in [0, \pi]$ (soit $z = e^{jv}$), ou encore avec la fréquence relative $r = \omega/\omega_e \in [0, 1/2]$ (soit $z = e^{j2\pi r}$).

Comme la réponse fréquentielle de $G(e^{j\omega T_e})$ est une quantité complexe, elle peut être écrite sous forme cartésienne:

$$G(z) = \text{Re}[G(z)] + j\text{Im}[G(z)], z = e^{j\omega T_e} \quad (3.19)$$

ou polaire:

$$G(z) = |G(z)|e^{j\angle G(z)} = |G(z)|\angle G(z), z = e^{j\omega T_e} \quad (3.20)$$

Les représentations (3.19) et (3.20) sont équivalentes puisque:

$$\begin{aligned} |G(z)| &= \sqrt{(\text{Re}[G(z)])^2 + (\text{Im}[G(z)])^2}, z = e^{j\omega T_e} \\ \angle G(z) &= \arctan(\text{Im}[G(z)]/\text{Re}[G(z)]), z = e^{j\omega T_e} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Exemple 3. Considérons le système continu décrit par:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Avec $K = 10, \tau = 1$

La réponse fréquentielle est obtenue pour $s = j\omega$ comme:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\tau\omega + 1} = \frac{K(-j\tau\omega + 1)}{(\tau\omega)^2 + 1} = \frac{K}{(\tau\omega)^2 + 1} + j \frac{-K\tau\omega}{(\tau\omega)^2 + 1}$$

Ou sous forme polaire:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}}, \angle G(j\omega) = -\arctan(\tau\omega)$$

Pour échantillonner $G(s)$, en prendra $T_e = \tau / 10 = 0.1 \text{ sec}$, soit

$\omega_e = 2\pi / T_e = 62.83 \text{ rad/sec}$. La TZ de $G(s)$ avec BOZ est donnée par:

$$G(z) = TZ[B_0(s)G(s)] = K \frac{(1-a)}{z-a}$$

Avec $a = e^{-T_e/\tau} = 0.9048$

La réponse fréquentielle est obtenue pour $z = e^{j\omega T_e} = \cos(\omega T_e) + j \sin(\omega T_e)$, soit:

$$G(e^{j\omega T_e}) = \frac{K(1-a)}{\cos(\omega T_e) + j \sin(\omega T_e) - a} = \frac{K(1-a)(\cos(\omega T_e) - a)}{1 + a^2 - 2a \cos(\omega T_e)} + j \frac{-K(1-a)\sin(\omega T_e)}{1 + a^2 - 2a \cos(\omega T_e)}$$

Soit, sous forme polaire:

$$|G(e^{j\omega T_e})| = \frac{K(1-a)}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(\omega T_e)}}, \angle G(e^{j\omega T_e}) = -\arctan \frac{\sin(\omega T_e)}{\cos(\omega T_e) - a}$$

Les tracés de l'amplitude et de la phase de sont montrés sur la figure 3.

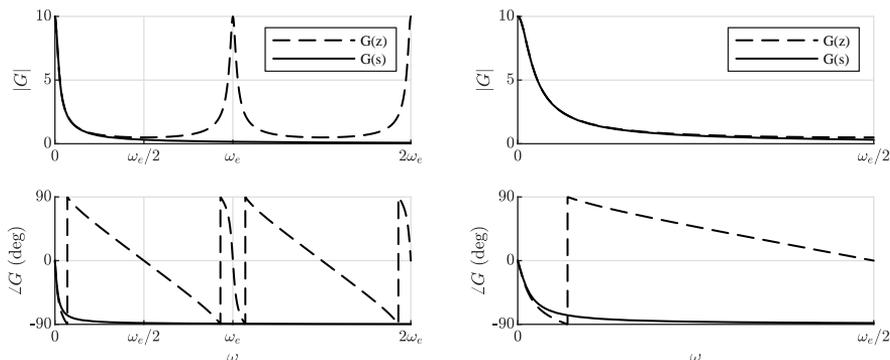


Figure 3.6. Réponse fréquentielle en amplitude et phase de l'exemple 3.

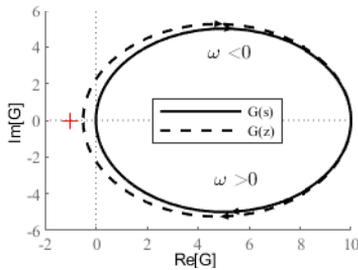


Figure 3.7. Représentation polaire de la réponse fréquentielle de l'exemple 3.

4. Diagramme de stabilité de Nyquist

Nous allons commencer par énoncer un théorème important sur les fonctions complexes.

Théorème de Cauchy. Soit la fonction complexe analytique $F(z)$, et soit un contour C du plan complexe z fermé et orienté dans le sens trigonométrique qui ne passe par aucun pôle ou zéro de $F(z)$. L'image de C par $F(z)$ est un contour fermé du plan complexe $F(z)$ qui entoure l'origine dans le sens trigonométrique N fois, avec

$$N = Z - P$$

où Z et P sont le nombre de zéros et de pôles de $F(z)$ à l'intérieur du contour C .

Exemple. Considérons une fonction $F(z)$ ayant 3 pôles et 1 zéro dans le contour C (figure 3.8.a). Lorsque le point z_0 fait un tour complet du contour C dans le sens trigonométrique, la fonction $F(z)$ décrit $N = Z - P = 1 - 3 = -2$ tours autour de l'origine dans le sens trigonométrique inverse (figure 3.8.b).

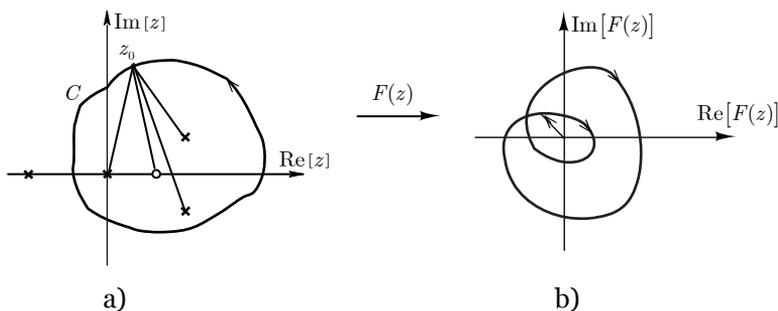


Figure 3.8. Illustration du théorème de Cauchy: a) contour C dans le plan z , b) l'image de C par la fonction $F(z)$ dans le plan $F(z)$.

4.1 Contour de Nyquist d'un système discret

La définition $z = e^{j\omega T_e}$ implique une correspondance entre les plans s et z comme illustrés sur les figures 3.9.a et 3.9.b, tel que:

- Le demi-cercle supérieur dans le plan z correspond à l'axe imaginaire positif du plan s pour $0 \leq \omega < \omega_e / 2 = \pi / T_e$.
- Le demi-cercle inférieur dans le plan z correspond à l'axe imaginaire négatif du plan

s pour $-\omega_e/2 \leq \omega < 0$.

- Le demi-cercle de rayon infini du plan s correspond à un cercle de rayon infini dans le plan z .
- Si la fonction de transfert en BO $GH(z)$ possède des pôles sur le cercle unité ($|p_i| = 1$), un petit détour décrit par $z = p_i + re^{j\theta}$, $r \rightarrow 0, -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, comme celui illustré à la figure 3.9.b, doit être ajouté au contour.

Le cercle unité doit être parcouru dans le sens *trigonométrique*, car son intérieur est exclu du contour (le contour est l'extérieur du cercle unité et contient les pôles instables de la fonction de transfert en BO $GH(z)$).

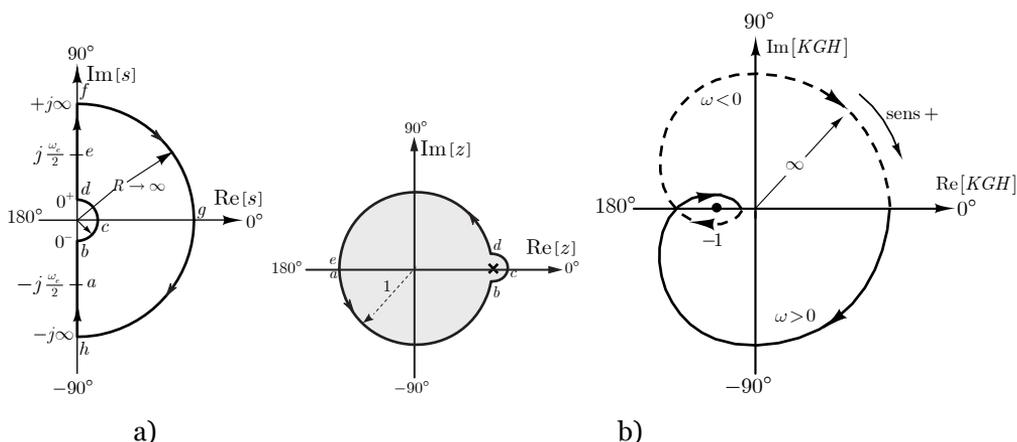


Figure 3.9. a) contour de Nyquist dans le plan s , b) contour de Nyquist dans le plan z , c) lieu de Nyquist dans le plan $KGH(z)$.

4.2 Lieu de Nyquist

L'étude de la stabilité du système en boucle fermée (3.1) revient à étudier les racines du polynôme caractéristique

$$F(z) = 1 + KGH(z) = 1 + K \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{D(z) + KN(z)}{D(z)} \quad (3.22)$$

À partir de (3.22), on relever les points suivants:

- Les zéros de $F(z)$ sont les pôles de $G_{yr}(z)$ (les pôles du système en boucle fermée).
- Les pôles de $F(z)$ sont les pôles de $GH(z)$ (les pôles du système en boucle ouverte).
- Comme $GH(z)$ est propre ($m \leq n$), le nombre de pôles de $F(z)$ est égal au nombre de ses zéros.
- Dans la pratique, plutôt que de compter les tours de $F(z)$ autour de l'origine, on compte le nombre de tours de $GH(z)$, fonction de transfert en boucle ouverte, autour du point $-1 + j0$ du plan complexe, ce qui revient au même.

Le lieu de Nyquist d'un système discret en boucle fermée (3.1) est l'image du contour de Nyquist par la fonction en boucle ouverte du système $KGH(z)$ donnée par (figure 3.9.c):

$$\left\{ \text{Re}[KGH(z)], \text{Im}[KGH(z)] \mid z = e^{j\nu}, -\pi \leq \nu \leq \pi \right\}.$$

Propriétés du lieu de Nyquist

- Le lieu de Nyquist est symétrique par rapport à l'axe réel. On se contente en général de tracer la partie pour $-\pi \leq \nu \leq 0$ et on obtient la partie pour $0 \leq \nu \leq \pi$ par symétrie.
- Les demi-cercles du contour de Nyquist évitant les pôles sur le cercle unité parcourus dans le sens trigonométrique sont transformés par $GH(z)$ en des demi-cercles de rayon infini parcourus dans le sens anti-trigonométrique.
- Lorsqu'on multiplie la boucle ouverte $GH(z)$ par un gain K , le lieu de Nyquist subit une homothétie de facteur K et de centre o .

Théorème de stabilité de Nyquist. par le théorème de Cauchy, le système discret en boucle fermée (3.1) est stable ssi le lieu de Nyquist de $GH(z)$ parcouru de $-\pi \leq \nu \leq \pi$, entoure le point -1 dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de $GH(z)$.

Mathématiquement, si P est le nombre de pôles instables de $GH(z)$ (à l'extérieur du cercle unité) et N le nombre de tours effectués par $GH(z)$ autour du point -1 , alors est le nombre de pôles instables en boucle fermée est donné par: $Z = N + P$; avec $N < 0$ si la rotation de $GH(z)$ est effectuée dans le sens trigonométrique et $N > 0$ si la rotation de $GH(z)$ est effectuée dans le sens trigonométrique inverse.

Remarque 1. Le résultat précédent peut aussi réécrit comme: Le système discret en boucle fermée (3.1) est stable ssi $N = -P$, sinon il est instable.

Remarque 2. Lorsque le lieu de $KGH(z)$ passe par le point critique $(-1,0)$, le nombre d'encerclements N est indéterminé. Cette situation correspond à la condition où $1 + KGH(z) = 0$ possède des zéros sur le cercle unité. Une condition nécessaire pour appliquer le critère de Nyquist est que le chemin entourant la zone spécifiée ne doit pas traverser de pôles ou de zéros de $1 + KGH(s)$. Lorsque cette condition est violée, la valeur de N devient indéterminée et le critère de stabilité de Nyquist ne peut être appliqué. Le système en boucle fermée est dit marginalement stable.

Exemple 4. Considérons le système de la figure 3.1, avec:

$$KGH(z) = \frac{K}{(z-0.5)(z-1.2)}$$

Le contour de Nyquist associé à $KGH(z)$ est celui de la figure 3.10.a. on réalise le tracé du lieu de $KGH(z)$ pour $K = 1$.

On pose $z = e^{j\nu}, -\pi \leq \nu = \omega T_e \leq \pi$.

Au point (a) $z = e^{j0} = 1$, $KGH(1) = -10 = 10 \angle 180^\circ$.

Au point (b) $z = e^{j\pi} = -1$, $KGH(-1) = 0.3 = 0.3 \angle 0^\circ$.

Calcul des points d'intersections avec les axes réel et imaginaire:

Avec $z = e^{j\nu} = \cos \nu + j \sin \nu$, nous avons:

$$GH(\nu) = \frac{1}{(\cos \nu + j \sin \nu - 0.5)(\cos \nu + j \sin \nu - 1.2)}$$

$$= \frac{1}{2 \cos^2 \nu - 1.7 \cos \nu - 0.4 + j \sin \nu (2 \cos \nu - 1.7)}$$

Le lieu coupe l'axe réel si $\text{Im}[GH(\nu)] = 0$, soit:

$$\sin(\nu)(2 \cos(\nu) - 1.7) = 0$$

Dont les solutions sont:

$$\sin(\nu) = 0 \Rightarrow \nu = 0, \pi \text{ (Déjà calculés), et}$$

$$(2 \cos(\nu) - 1.7) = 0 \Rightarrow \nu = \arccos \frac{1.7}{2} = 31.8^\circ, \text{ d'où:}$$

$$GH(31.8) = \frac{1}{2 \cos^2(31.8) - 1.7 \cos(31.8) - 0.4} = -2.5$$

Le lieu coupe l'axe imaginaire si $\text{Re}[GH(\nu)] = 0$, soit:

$$2 \cos^2 \nu - 1.7 \cos \nu - 0.4 = 0$$

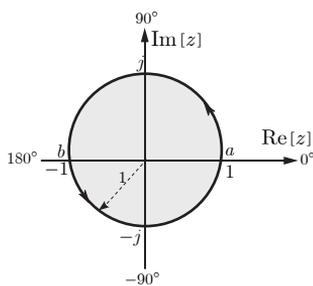
D'où $\cos \nu = -0.19195 \Rightarrow \nu = 1.7639$, ce qui produit $GH(1.7639) = j0.489 = 0.489 \angle 90^\circ$.

D'autres points importants sont:

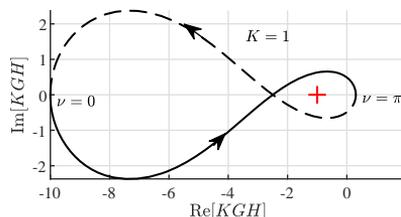
- $z = e^{j\pi/4} = \cos(\pi/4) + j \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2} + j1/\sqrt{2}$,
 $KGH(e^{j\pi/4}) = -1.5 + j0.5 = 1.575 \angle 161.45^\circ$
- $z = e^{j\pi/2} = j$, $KGH(j) = -0.131 + j0.557 = 0.5726 \angle 103.24^\circ$.
- $z = e^{j3\pi/4} = -1/\sqrt{2} + j1/\sqrt{2}$, $KGH(e^{j3\pi/4}) = 0.2226 + j0.272 = 0.35 \angle 50.7^\circ$

Les parcours restants sont les complexes conjugués des parcours précédents. Le lieu résultant est illustré à la figure 3.10.b.

```
z=tf('z')
Gz=1/((z-0.5)*(z-1.2))
nyquist(Gz)
```



a)



b)

Figure 3.10. a) contour de Nyquist dans le plan s, b) lieu de Nyquist de $KGH(z)$.

Pour l'étude de la stabilité ce système, on peut voir que $KGH(z)$ possède un pôle instable à 1.2 donc $P = 1$. La figure 3.10.b montre que le point critique $(-1,0)$ est encerclé une fois dans le sens trigonométrique inverse, donc $N = 1$. ainsi, le nombre de pôles instables en boucle fermée est $Z = N + P = 2$, ce qui indique la présence de deux pôles du système en boucle fermée à l'extérieur du cercle unité et donc le système est instable.

on peut remarquer que pour une valeur $K = 0.4$ (figure 3.11.a) le lieu passe par le point critique $(-1,0)$, ce qui indique que le système est marginalement stable. Pour des valeurs $K < 0.4$, lieu de $KGH(z)$ encerclé le point critique $(-1,0)$ une fois dans le sens trigonométrique, donc $N = -1$, d'où $Z = 0$, et le système est asymptotiquement stable en boucle fermée (figure 3.11.b).

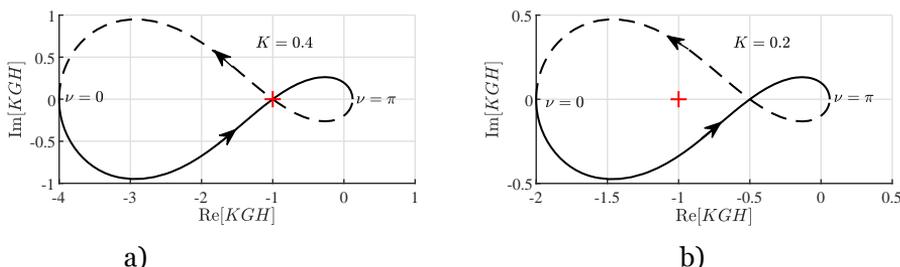


Figure 3.11. lieu de Nyquist.

Exemple 5. Considérons le système de la figure 3.1, avec:

$$KGH(z) = K \frac{0.368(z + 0.717)}{(z - 1)(z - 0.368)}$$

Le contour de Nyquist associé à $KGH(z)$ est celui de la figure 3.12.a. on réalise le tracé du lieu de $KGH(z)$ pour $K = 1$.

- Sur l'arc (aa'), $z = 1 + \lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\theta}$, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, d'où:

$$GH(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{0.368(1 + r e^{j\theta} + 0.717)}{(1 + r e^{j\theta} - 1)(1 + r e^{j\theta} - 0.368)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{0.368 \times 1.717}{0.632 r e^{j\theta}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} e^{-j\theta}$$

Ainsi, au point (a), nous avons $\theta = 0^\circ$ et $GH(z) = \infty \angle 0^\circ$. Au point (a'), $\theta = 90^\circ$ et $GH(z) = \infty \angle -90^\circ$.

Le parcours (aa') est un quart de cercle entre $0^\circ \leq \theta \leq -90^\circ$ et de rayon infini.

- Au point (b), $z = e^{j\pi} = -1$ et nous avons $KGH(-1) = -0.038 = 0.038 \angle 180^\circ$.

Calcul des points d'intersections avec l'axe réel:

Avec $z = e^{j\nu} = \cos \nu + j \sin \nu$, nous avons:

$$\begin{aligned} GH(\nu) &= \frac{0.368(\cos \nu + j \sin \nu + 0.717)}{(\cos \nu + j \sin \nu - 1)(\cos \nu + j \sin \nu - 0.368)} \\ &= \frac{0.368(\cos \nu + 0.717) + j 0.368 \sin \nu}{(2 \cos^2 \nu - 1.368 \cos \nu - 0.632) + j \sin \nu (2 \cos \nu - 1.368)} \end{aligned}$$

Le lieu coupe l'axe réel si $\text{Im}[GH(\nu)] = 0$, soit:

$$\sin(\nu)(0.12838 - 0.52772 \cos(\nu)) = 0$$

Dont les solutions sont:

$$\sin(\nu) = 0 \Rightarrow \nu = 0, \pi \text{ (déjà calculés), et}$$

$$0.12838 - 0.52772 \cos(\nu) = 0 \Rightarrow \nu = 76^\circ, \text{ d'où } GH(76) = -0.48.$$

D'autres points importants sont:

- $KGH(e^{j\pi/4}) = -0.84824 - j0.48043$
- $KGH(j) = -0.3 + j0.0565.$
- $KGH(e^{j3\pi/4}) = -0.09 + j0.063$

Les parcours restants sont les complexes conjugués des parcours précédents. Le lieu résultant est illustré à la figure 3.12.b.

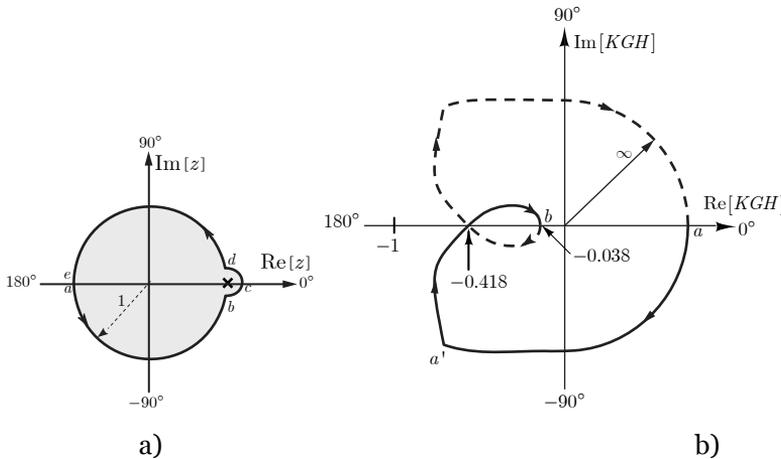


Figure 3.12. a) contour de Nyquist dans le plan z , b) lieu de Nyquist de $KGH(z)$.

Comme $KGH(z)$ ne possède pas de pôles instables, donc $P = 0$. La figure 3.12.b montre que $KGH(z)$ n'encercle pas le point critique $(-1,0)$, donc $N = 0$. Aussi, $Z = N + P = 0$ et le système est asymptotiquement stable boucle fermée pour $K = 1$.

On peut remarquer que:

- Pour $K < 1/0.418 = 2.39$ le lieu n'encercle pas le point critique $(-1,0)$, donc $N = 0$. Aussi, $Z = N + P = 0$ et le système est asymptotiquement stable boucle fermée.
- Pour $K = 1/0.418 = 2.39$ ou pour $K = 1/0.038 = 26.31$, le lieu passe par le point critique $(-1,0)$, ce qui indique que le système est marginalement stable pour ces valeurs du gain K .
- Pour des valeurs $2.39 < K < 26.31$, lieu de $KGH(z)$ encercle le point critique $(-1,0)$ deux fois dans le sens trigonométrique inverse, donc $N = 2$, d'où $Z = 2$ et le système possède 2 pôles instable en boucle fermée.

- Pour des valeurs de $K > 26.31$, lieu de $KGH(z)$ encerclé le point critique $(-1,0)$ une fois dans le sens trigonométrique inverse, donc $N = 1$, d'où $Z = 1$ et le système possède un pôle instable en boucle fermée.

4.3 Critère de Nyquist simplifié (critère du revers)

Si le système est stable en boucle ouverte (les pôles de $KGH(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité), alors le système en boucle fermée est stable ssi le lieu de Nyquist de $KGH(z)$ tracé pour $\omega \in [0, \omega_e / 2]$, parcouru dans le sens des ω croissantes, laisse le point -1 à sa gauche (figure 3.13).

Remarque 3. ce résultat implique qu'il n'est pas nécessaire de tracer le lieu de Nyquist complet.

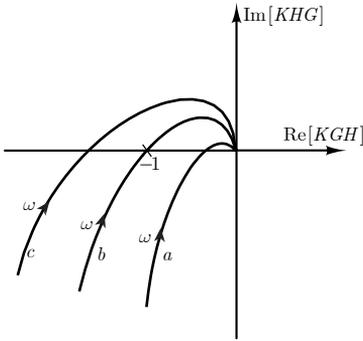


Figure 3.13. a) système stable, b) système marginalement stable (oscillatoire), c) système instable.

5. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode d'un système discret est la représentation de sa réponse fréquentielle en termes de module en décibels $20 \log |KGH(z)|$ et de la phase $\angle KGH(z)$ en degrés pour $z = e^{j\omega T_e}$. Le diagramme d'amplitude est pair et le diagramme de phase est impair.

Comme déjà indiqué, la réponse fréquentielle d'un système discret est périodique de période T_e , et avec la limite imposée par le théorème de l'échantillonnage, on peut tracer le diagramme de Bode seulement pour $\omega \in [0, \pi / T_e]$ ou $\nu = \omega T_e \in [0, \pi]$.

5.1 Diagramme de Bode en z

Le diagramme de Bode de $KGH(z)$ est la somme algébrique des diagrammes de Bode élémentaires (en module et en phase) des gains, des zéros et des pôles de $KGH(z)$, soit:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |K| + \sum_{l=1}^m 20 \log |e^{j\nu} - z_l| - \sum_{i=1}^n 20 \log |e^{j\nu} - p_i| \quad (3.23)$$

Et la phase est:

$$\angle KGH(e^{j\nu}) = \angle K + \sum_{l=1}^m \angle(e^{j\nu} - z_l) - \sum_{i=1}^n \angle(e^{j\nu} - p_i) \quad (3.24)$$

Si $K > 0 \Rightarrow \angle K = 0$ et si $K < 0 \Rightarrow \angle K = \pi$.

Pôle p_i	$20 \log KGH $	$\angle KGH$
$]0,1[$	\searrow	$0 \rightarrow -180$
$] -1,0[$	\searrow	$0 \rightarrow -180$
1	\nearrow	$-90 \rightarrow -180$
0	0	$0 \rightarrow -180$
complexes stables	$\nearrow \searrow$	$0 \rightarrow -360$

Zéro z_i	$20 \log KGH $	$\angle KGH$
$[0,1[$	\nearrow	$0 \rightarrow 180$
$] -1,0[$	\searrow	$0 \rightarrow 180$
> 1	\nearrow	$180 \rightarrow 180$
< -1	\searrow	$0 \rightarrow 0$

Exemple 6. Soit le système continu:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Pour $T_e = 1$ sec, nous avons obtenu:

$$G(z) = TZ[B_0(s)G(s)] = \frac{0.368(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

Pour tracer le diagramme de Bode, on pose $z = e^{j\nu} = \cos(\nu) + j \sin(\nu)$ avec $\nu = \omega T_e$. D'où:

$$G(j\nu) = \frac{0.368(\cos(\nu) + j \sin(\nu) + 0.717)}{(\cos(\nu) + j \sin(\nu) - 1)(\cos(\nu) + j \sin(\nu) - 0.368)}$$

L'amplitude est donnée par:

$$\begin{aligned} |G(j\nu)| &= \frac{0.368 \sqrt{(\cos(\nu) + 0.717)^2 + \sin^2(\nu)}}{\sqrt{((\cos(\nu) - 1)^2 + \sin^2(\nu))((\cos(\nu) - 0.368)^2 + \sin^2(\nu))}} \\ &= \frac{0.368 \sqrt{1.434 \cos(\nu) + 1.5141}}{\sqrt{1.472 \cos^2(\nu) - 3.7428 \cos(\nu) + 2.2708}} \end{aligned}$$

Soit en décibels:

$$\begin{aligned} |G(j\nu)|_{dB} &= 20 \log |G(j\nu)| = 20 \log 0.368 + 10 \log (1.434 \cos(\nu) + 1.5141) \\ &\quad - 10 \log (1.472 \cos^2(\nu) - 3.7428 \cos(\nu) + 2.2708) \end{aligned}$$

La phase est donnée par:

$$\angle G(j\nu) = \arctan \frac{\sin(\nu)}{\cos(\nu) + 0.717} - \arctan \frac{\sin(\nu)}{\cos(\nu) - 1} - \arctan \frac{\sin(\nu)}{\cos(\nu) - 0.368}$$

Le tracé du diagramme de Bode est obtenu en évaluant l'amplitude et la phase pour avec $0 < \omega \leq \omega_e / 2$ ou $0 < \nu \leq \pi$.

Remarque. Les règles des tracés asymptotiques utilisées en continu ne sont plus valide ici. Il est difficile d'estimer la fonction de transfert à partir du diagramme de Bode d'un système discret.

```
Te=1;
s=tf('s');
Gs=1/(s*(s+1))
Gz=c2d(Gs,Te,'zoh')
bode(Gs,'k--',Gz,'k-')
```

Les tracés de Bode des réponses fréquentielles de $G(j\omega)$ et de $G(e^{j\omega T_e})$ sont représentés sur la figure 3.14. Sur la réponse fréquentielle de $G(e^{j\omega T_e})$, on remarque à la fréquence limite $\omega_e/2$ une modification de l'amplitude et une importante chute de phase qui est caractéristique de la transformation par le BOZ.

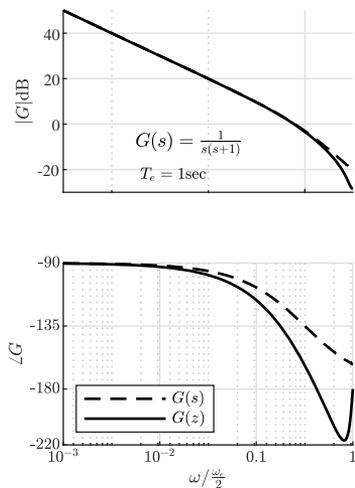


Figure 3.14.

5.2 Diagramme de Bode en w

Nous avons vu au chapitre précédent qu'on pouvait utiliser la transformée en w :

$$z = \frac{1 + \frac{T_e}{2} w}{1 - \frac{T_e}{2} w} \quad (3.25)$$

pour analyser la stabilité d'un système discret par la méthode de Routh-Hurwitz. De même, on peut utiliser cette méthode pour tracer le diagramme de Bode d'un système discret dans le plan w .

Dans le plan $w = j\omega_w$ le système discret possède des propriétés de stabilité et de performance proches (pour $\omega \leq \omega_e/10$) de celles des systèmes continus. Ainsi, les propriétés fréquentielles peuvent être récupérées du plan w par la relation: $\omega T_e = 2 \arctan \omega_w$.

Exemple 7. pour le système de l'exemple 6, nous avons:

$$G(z) = \frac{0.368(z + 0.717)}{(z - 1)(z - 0.368)}$$

Pour $T_e = 1 \text{ sec}$, la transformée en w est:

$$z = \frac{1 + w/2}{1 - w/2}$$

D'où, on obtient:

$$G(w) = -\frac{0.0381(w-2)(w+12.14)}{w(w+0.9242)}$$

Soit forme de Bode, avec $w = j\omega_w$:

$$G(w) = -\frac{(j\omega_w/2-1)(j\omega_w/12.14+1)}{j\omega_w(j\omega_w/0.9242+1)}$$

Remarque. Cette forme possède les mêmes règles des tracés asymptotiques utilisées en continu.

```
Te=1;
s = tf('s');
Gs=1/(s*(s+1))
Gz=c2d(Gs,Te,'zoh')
Gw=d2c(Gz,'tustin')
bode(Gs,'k-',Gz,'k-')
```

Les tracés de Bode des réponses fréquentielles de $G(j\omega)$ et de $G(e^{j\omega T_e})$ sont représentés

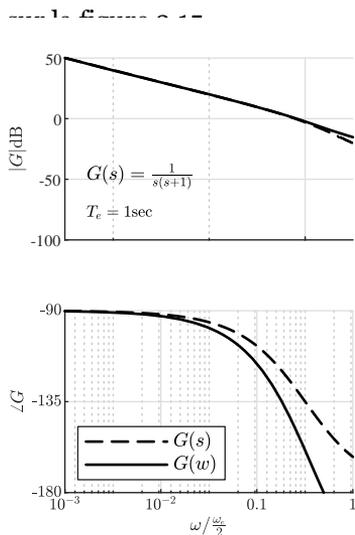


Figure 3.15.

6. Stabilité relative

Un système stable à un instant donné peut devenir instable si certains de ses paramètres changent ou cause des perturbations. Les risques d'instabilité augmentent lorsque le lieu défini pour le critère du revers se rapproche du point critique $-1+j0$. C'est pourquoi il est préférable, quand un système est stable, d'évaluer sa stabilité relative à travers le calcul des marges de stabilité. Les marges de stabilité permettent d'estimer la proximité de la réponse fréquentielle du point critique $-1+j0$.

6.1 Marge de gain

Soit $\nu_\pi = \omega_\pi T_e$ la fréquence pour laquelle le lieu de Nyquist de $KGH(j\nu)$ coupe l'axe des

réels, c-à-d $\angle KGH(j\nu_\pi) = \pi$. La marge de gain MG est l'accroissement maximum à la fréquence ω_π qui produit l'instabilité:

$$|KGH(j\nu_\pi)|MG = 1 \quad (3.26)$$

D'où

$$MG = \frac{1}{|KGH(j\nu_\pi)|} \quad (3.27)$$

La marge de gain M_G s'exprime souvent en dB, soit :

$$MG_{dB} = 20 \log \frac{1}{|KGH(j\nu_\pi)|} = -20 \log |KGH(j\nu_\pi)| \quad (3.28)$$

6.2 Marge de phase

Soit $\nu_c = \omega_c T_e$ la fréquence de coupure pour laquelle $|KGH(j\nu_c)| = 1$ (soit $|KGH(j\nu_c)|_{dB} = 0$). La marge de phase est la distance entre $\angle KGH(j\nu_c)$ et π , soit

$$MP = \pi + \angle KGH(j\nu_c) \quad (3.29)$$

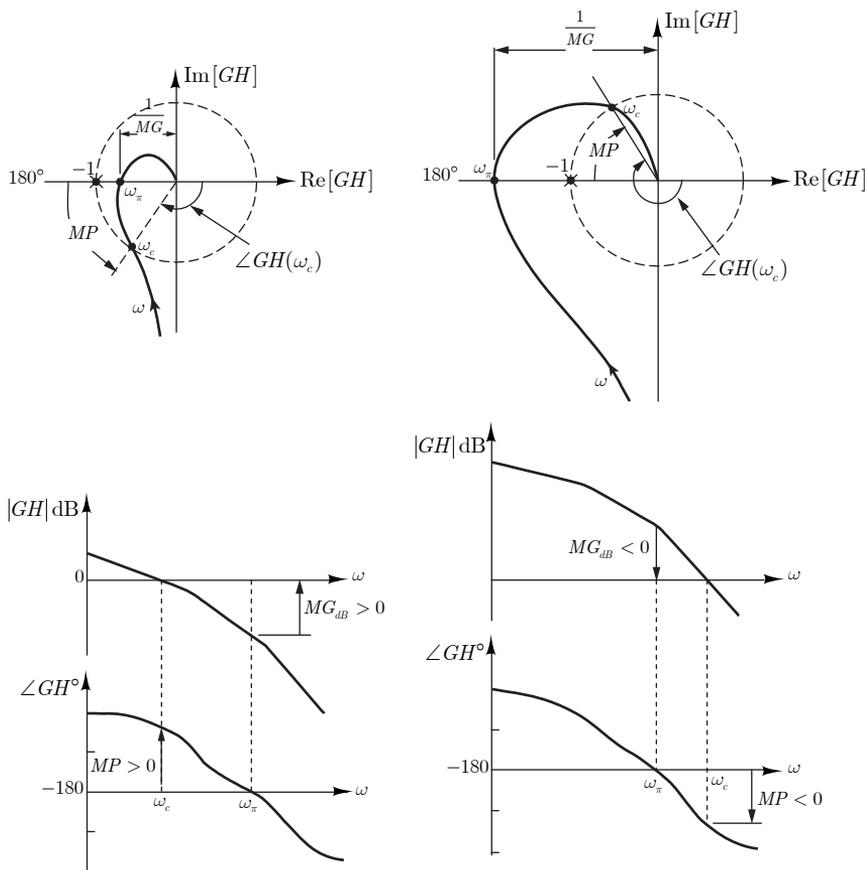


Figure 3.16. Marge de gain et marge de phase.

Sur les diagrammes de Bode, le point critique -1 correspond à un gain de 0dB et une phase 180°. La marge de gain se lit sur le diagramme d'amplitude à ω_π la fréquence pour laquelle la phase vaut $\angle KGH(j\omega_\pi) = \pi$. Il s'agit aussi de la distance de la courbe à la droite où le gain = 0dB.

La marge de phase se lit sur le diagramme de phase, à la fréquence à laquelle le gain vaut 0 dB. Il s'agit aussi de la distance de la courbe à la droite -180°.

Remarques.

1. La marge de gain correspond au gain supplémentaire maximum que l'on peut donner au système en BO sans risquer de le rendre instable en BF
2. Les marges sont exploitées lorsqu'on étudie l'influence d'une correction sur la stabilité et l'amortissement du système bouclé.
3. Un système est stable en boucle fermée si $MP > 0$.
4. Plus les marges sont grandes, plus la stabilité du système bouclé est robuste (ou garantie).
5. Pour obtenir un bon compromis entre rapidité et amortissement, les valeurs suivantes sont conseillées en pratique:

$$6dB \leq MG_{dB} \leq 14dB$$

$$45^\circ \leq MP \leq 60^\circ$$
(3.30)

Exemple 8.

pour le système de l'exemple 4, la marge de gain est

$$MG = \frac{1}{2.5} = 0.4, MG_{dB} = -20 \log 2.5 \approx -8dB$$

La marge de phase est $MP \approx -41^\circ$.

Comme la marge de phase est négative le

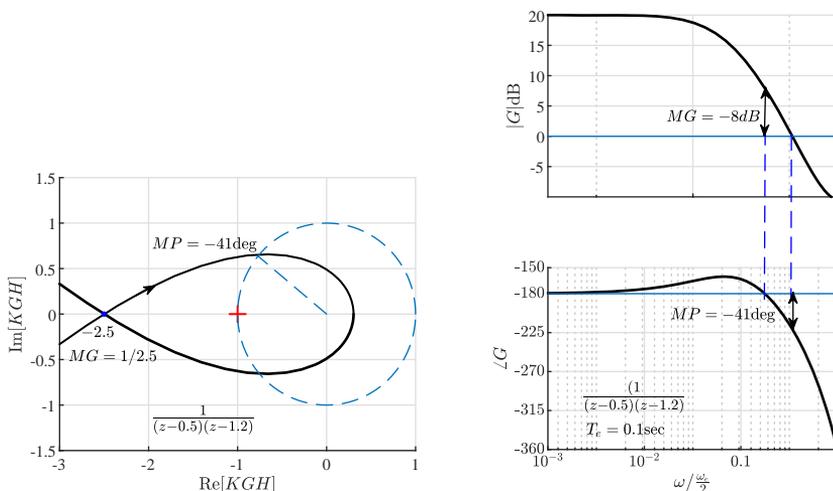


Figure 3.17. Marges stabilité pour l'exemple 8.

Exemple 9.

Pour le système de l'exemple 5, la marge de gain est

$$MG = \frac{1}{0.418} = 2.392, MG_{dB} = 20 \log 2.392 = 7.57 dB$$

La marge de phase est $MP = 30.4^\circ$

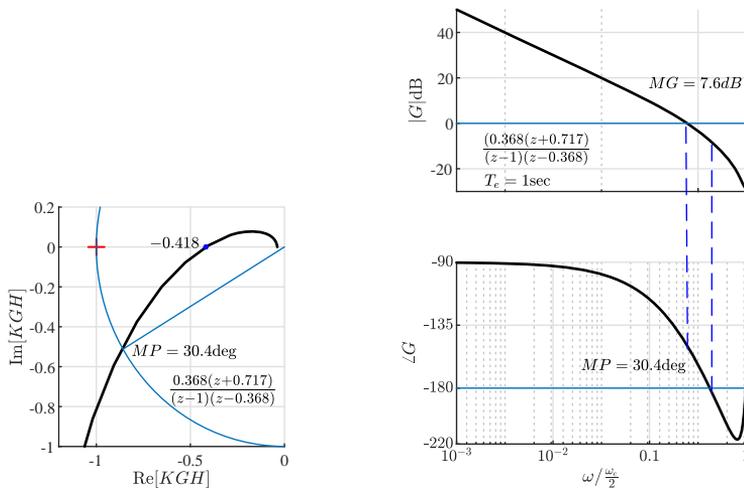


Figure 3.18. Marges stabilité pour l'exemple 9.

Les marges de stabilité peuvent être obtenues sans tracer avec le code Matlab:

```
s=tf('s');
Gs=1/(s*(s+1))
Gz=c2d(Gs,Te,'zoh')
[GM,PM,Wc,Wpi] = margin(Gs)
[GM,PM,Wc,Wpi] = margin(Gz)
```

Il instructif de comparer les marges de stabilité du système continu et après discrétisation.

7. Précision d'un système asservi

Les performes d'un système stable sont décrites par des grandeurs spécifiées de sa réponse en régime transitoire et en régime permanent.

Définition. Soit le système à retour unitaire de la figure 3.19. L'*erreur statique* est la différence en régime permanent entre l'entrée et la sortie:

$$e(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (r(k) - y(k)) \quad (3.31)$$

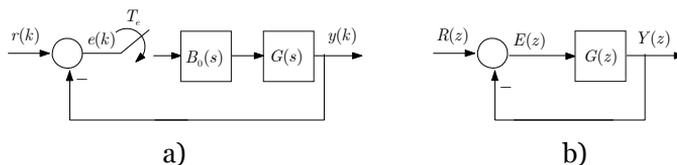


Figure 3.19. Système en BF à retour unitaire.

7.1 Entrées de test

Les entrées de test utilisées pour l'analyse des erreurs en régime permanent et pour l'analyse des conceptions sont présentées sur la figure 3.20.

Pour expliquer comment ces signaux de test sont utilisés. Les entrées échelon représentent une position constante et sont donc utiles pour déterminer la capacité du

système asservi à se positionner par rapport à une cible fixe, telle qu'un satellite en orbite géostationnaire. Un contrôle de position d'antenne est un exemple de système dont la précision peut être testée à l'aide d'une entrée échelon.

Les entrées rampe représentent les entrées à vitesse constante. Ces signaux peuvent être utilisés pour tester la capacité d'un système à suivre une entrée qui croît d'une façon linéaire ou à suivre une cible à vitesse constante. Par exemple, un système de contrôle de position qui suit un satellite qui se déplace dans le ciel à une vitesse angulaire constante, serait testé avec une entrée rampe afin d'évaluer l'erreur en régime permanent entre la position angulaire de l'antenne et celle du satellite. Enfin, les paraboles, dont les dérivées secondes sont constantes, représentent des entrées d'accélération constante pour les systèmes de commande de position. Ils peuvent être utilisés pour déterminer la performance, en termes d'erreur en régime permanent, pour des cibles en accélération, telles que les missiles.

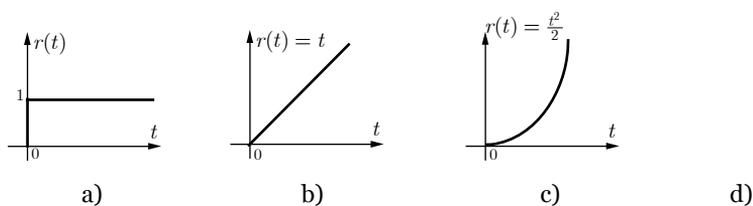


Figure 3.20. Signaux tests. a) échelon b) rampe c) parabole.

7.2 Erreurs par rapport à la consigne

En régime permanent, un système est caractérisé par son erreur de suivi de la consigne d'entrée. Pour le système de la figure 3.19, l'erreur est donnée par:

$$\begin{aligned} E(z) &= R(z) - Y(z) \\ Y(z) &= G(z)E(z) \end{aligned} \quad (3.32)$$

D'où

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)} R(z) \quad (3.33)$$

L'erreur en régime permanent, est donnée par le théorème de la valeur final:

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)}{1 + G(z)} R(z) \quad (3.34)$$

Pour les trois entrées tests, les erreurs en régime permanent, sont définies comme suit:

Erreur de position: Pour une consigne échelon $r(kT_e) = 1$, $R(z) = z/(z - 1)$, nous avons l'erreur de position:

$$e_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)}{1 + G(z)} \frac{z}{(z - 1)} = \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G(z)} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (3.35)$$

Avec $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$ le coefficient de l'erreur de position.

Erreur de vitesse: Pour une consigne rampe $r(kT_e) = kT_e$, $R(z) = zT_e/(z - 1)^2$, nous avons l'erreur de vitesse (traîné):

$$e_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{1+G(z)} \frac{zT_e}{(z-1)^2} = \frac{T_e}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)} = \frac{T_e}{K_v} \quad (3.36)$$

Avec $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)$ le coefficient de l'erreur de vitesse.

Erreur d'accélération: Pour une consigne quadratique $r(kT_e) = (kT_e)^2 / 2$, $R(z) = z(z+1)T_e^2 / 2(z-1)^3$, nous avons l'erreur d'accélération:

$$e_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{1+G(z)} \frac{z(z+1)T_e^2}{2(z-1)^3} = \frac{T_e^2}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)} = \frac{T_e^2}{K_a} \quad (3.37)$$

Avec $K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)$ le coefficient d'erreur d'accélération.

7.3 Classes des systèmes

Définition: La classe d'un système est donnée par le nombre de pôles à $z = 1$ (nombre d'intégrateurs discrets).

Soit la fonction de transfert en boucle ouverte:

$$G(z) = \frac{N(z)}{(z-1)^l D'(z)}, l = 0, 1, \dots, n \quad (3.38)$$

Avec $D'(z) = (z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_{n-l})$ un polynôme de Hurwitz (p_1, p_2, \dots, p_{n-l} à l'intérieur du cercle unité).

Ainsi, nous avons, pour $l = 0$, le système est de classe 0, pour $l = 1$, le système est de classe 1, pour $l = 2$, le système est de classe 2, et ainsi de suite.

La classe du système influe directement sur l'erreur statique par rapport aux trois entrées tests, comme résumé dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1

Système	Échelon		Rampe		Parabole	
	K_p	e_p	K_v	e_v	K_a	e_a
classe 0	$\frac{N(1)}{D'(1)}$	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	0	∞	0
classe 1	0	∞	$\frac{N(1)}{D'(1)}$	$\frac{T_e}{K_v}$	∞	0
classe 2	0	∞	0	∞	$\frac{N(1)}{D'(1)}$	$\frac{T_e^2}{K_a}$

Exemple 10. Pour le système de l'exemple 5:

$$G(z) = \frac{0.368(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)}$$

C'est un système de classe 1, donc:

- Pour une entrée échelon: $K_p = \infty, e_p = 0$

- Pour une entrée rampe: $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.368(z + 0.717)}{(z - 0.368)} \approx 1, e_v = \frac{T_e}{K_v} = 1$

- Pour une entrée parabole: $K_a = 0, e_a = \frac{T_e^2}{K_a} = \infty$

7.4 Système à retour non unitaire

Si le système n'est pas à retour unitaire comme dans la figure 3.21.a, on peut le ramener à un système à retour unitaire en utilisant la procédure décrite par la figure 3.21.b-c-d.

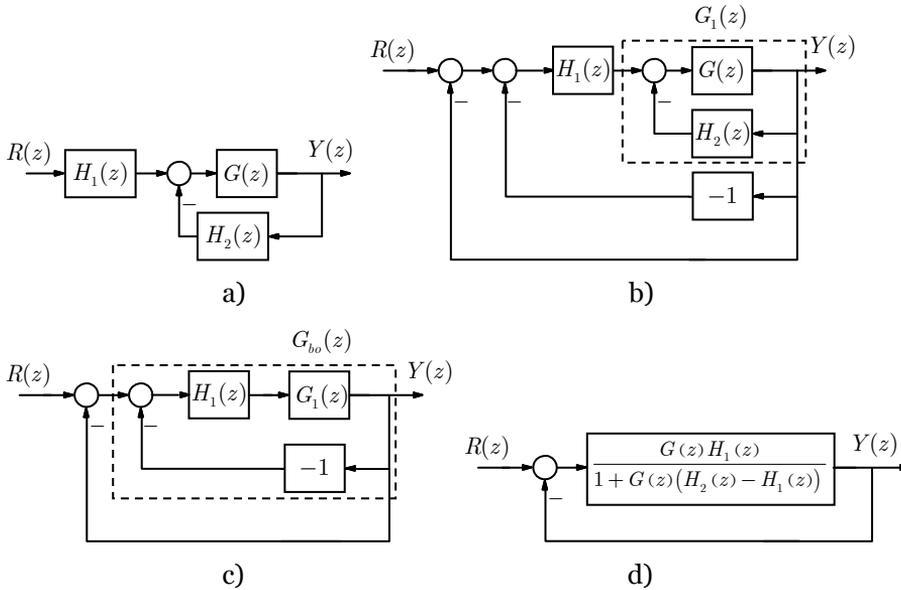


Figure 3.21: Schéma équivalent d'un système en boucle fermée à retour unitaire

La procédure de transformation est la suivante:

- On commence par ajouter deux contre-réactions de valeurs 1 et -1 à la boucle externe.

- On calcule la fonction de transfert de la boucle interne $G_1(z)$:

$$G_1(z) = \frac{G(z)}{1 + H_2(z)G(z)} \quad (3.39)$$

- On calcule la fonction de transfert en boucle ouverte $G_{bo}(z)$:

$$G_{bo}(z) = \frac{G_1(z)H_1(z)}{1 + (-1)G_1(z)H_1(z)} = \frac{G_1(z)H_1(z)}{1 - G_1(z)H_1(z)} = \frac{G(z)H_1(z)}{1 + G(z)(H_2(z) - H_1(z))} \quad (3.40)$$

- L'équation de l'erreur est alors:

$$E(z) = \frac{1}{1 + G_{bo}(z)} R(z) \quad (3.41)$$