

1. Introduction

L'analyse harmonique ou fréquentielle est l'instrument majeur de la théorie des signaux et des systèmes. Le développement en séries de Fourier et, plus généralement, la transformation de Fourier permet d'obtenir une représentation spectrale des signaux déterministes. Celle-ci exprime la répartition de l'amplitude, de la phase, de l'énergie ou de la puissance des signaux considérés en fonction de la fréquence.

Ce chapitre est une introduction aux représentations spectrales des signaux à l'aide des séries de Fourier et de la transformation de Fourier.

2. Série de Fourier

L'élément fondamental de l'analyse de Fourier est constitué par le fait qu'un signal périodique peut être décomposé en une somme d'ondes sinusoïdales. Une illustration de la construction d'un signal périodique non sinusoïdal est donnée à la figure 4 : le signal résultant est la somme d'une composante continue avec des sinusoïdes dont la fréquence est chaque fois un multiple de la fondamentale f_0 .

3.1 Définition

Soit le signal périodique $x(t)$ de période T ou de fréquence $f_0 = 1/T$, son développement en série de Fourier (SF) est donnée par:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t))$$

où $f_0 = 1/T$ est la fréquence fondamentale du signal, est la valeur moyenne ou composante continue et a_n, b_n sont les coefficients de Fourier du développement en cosinus et sinus.

Les coefficients de la série sont donnés par:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt$$

et

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

Les coefficients a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $x(t)$.

Le terme de fréquence f_0 est le fondamental.

Les termes de fréquence $n f_0$ sont les harmoniques de rang n .

a_0 représente la valeur moyenne de $x(t)$.

On remarque que si:

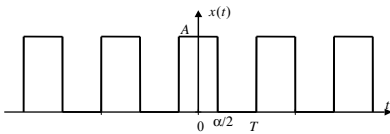
- 1) $x(t)$ est pair $b_n = 0$.
- 2) $x(t)$ est impair $a_n = 0$.
- 3) Symétrie de glissement: Lorsqu'un signal de période T est changée en son opposé par translation d'une demi période, sa série de Fourier ne comporte que des harmoniques impaires.
- 4) Décroissance des coefficients de Fourier: Plus un signal est régulier, plus ses coefficients de Fourier

tendent rapidement vers zéro à l'infini. Inversement, plus le signal périodique varie brutalement, plus les harmoniques élevées jouent un rôle important dans sa SF.

Ce résultat a en pratique une conséquence très importante : si en théorie, le nombre des harmoniques est infini, il suffit souvent en pratique de calculer seulement les premiers termes. La suite trigonométrique ainsi obtenue donnera une approximation d'autant meilleure de $x(t)$ que l'amplitude des coefficients de Fourier diminuera plus vite si le rang augmente.

- 5) Spectre de Fourier d'un signal $x(t)$: Il est commode de représenter les séries a_n et b_n par des graphiques du type de la figure ci-contre, où l'on porte en abscisse le rang n de l'harmonique (ou sa fréquence nf_0) et on trace verticalement un segment de hauteur a_n ou b_n , égale à l'amplitude de l'harmonique.

Exemple 1: Soit le signal $x(t)$ de la fig.



Figure

Comme $x(t)$ est pair alors $b_n = 0$. Calculons les autres coefficients:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} A dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\alpha/2} A dt = \frac{\alpha}{T} A \end{aligned}$$

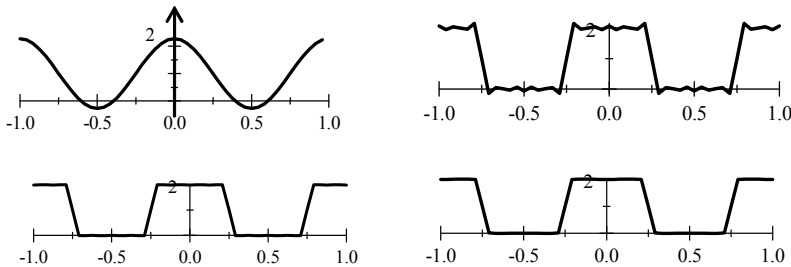
De même:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} A \cos(2\pi n f_0 t) dt \\ &= \frac{2A}{2\pi n f_0 T} \sin(2\pi n f_0 t) \Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \\ &= \frac{2A}{\pi n} \sin(\pi n \alpha f_0) = \frac{2A}{\pi n} \sin\left(\pi n \frac{\alpha}{T}\right) \\ &= \frac{2\alpha}{T} \frac{A}{\pi n \frac{\alpha}{T}} \sin\left(\pi n \frac{\alpha}{T}\right) = \frac{2\alpha}{T} A \operatorname{sinc}\left(n \frac{\alpha}{T}\right) \end{aligned}$$

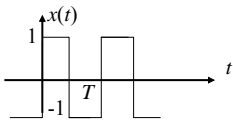
Alors on peut écrire le signal comme

$$x(t) = \frac{\alpha}{T} A + \frac{\alpha}{T} 2A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(n \frac{\alpha}{T}\right) \cos(2\pi n f_0 t)$$

Pour $A = 2, T = 1$ et $\alpha = 0.5$, nous avons tracer la série pour $n = 1, 10, 50,$ et 100 . On remarque que plus le nombre de sinusoides augmente plus l'approximation du signal est bonne.



Exemple 2:



Comme $x(t)$ est impaire :

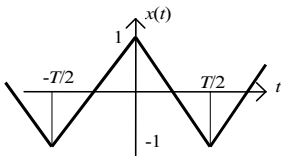
$$a_n = 0, \forall n$$

$$b_n = 0 \text{ pour } n \text{ paire et } b_n = \frac{4}{n\pi} \text{ pour } n \text{ impaire.}$$

La SF s'écrit :

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(2\pi f_0 t) + \frac{\sin(6\pi f_0 t)}{3} + \frac{\sin(10\pi f_0 t)}{5} + \dots \right]$$

Exemple 3:



Comme $x(t)$ est pair:

$$b_n = 0, \forall n$$

$$a_n = 0 \text{ pour } n \text{ pair et } a_n = \frac{8}{[(2n+1)\pi]^2} \text{ pour } n \text{ impaire. La SF s'écrit :}$$

$$x(t) = \frac{8}{\pi^2} \left[\cos(2\pi f_0 t) + \frac{\cos(6\pi f_0 t)}{9} + \frac{\cos(10\pi f_0 t)}{25} + \dots \right]$$

3.3 Série de Fourier en cosinus

Le problème complet exige la connaissance des deux spectres a_n et b_n , mais il convient de remarquer qu'en prenant en compte la relation trigonométrique suivante :

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos\left(x + \arctan\left(-\frac{b}{a}\right)\right)$$

On voit que le développement en série de Fourier () peut également s'écrire:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)$$

avec $A_0 = a_0$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\theta_n = -\arctan(b_n / a_n)$.

Cette série en cosinus est extrêmement importante car elle correspond à la description bien connue des signaux en régime sinusoïdal où l'on représente un courant ou une tension par leur amplitude et leur phase. D'un point de vue pratique, cela revient à considérer que le signal $x(t)$ est créé de manière équivalente par une infinité de générateurs sinusoïdaux. La représentation spectrale qui lui est associée porte le nom de spectre unilatéral.

Exemple

Une illustration en est donnée à la figure 5. On y voit les composantes (pour $n = 0..15$) des spectres d'amplitude et de phase pour le signal rectangulaire de l'exemple 1. dans l'espace des fréquences.

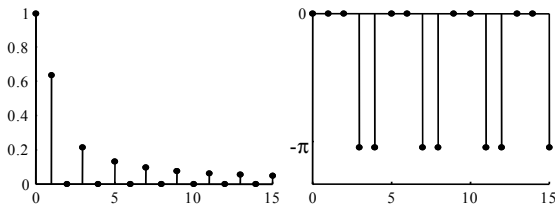


Fig. 5: Spectres unilatéraux d'amplitude et de phase.

3.4 Série de Fourier complexe

Par l'utilisation des formules d'Euler, on peut montrer facilement que la SF peut être mise sous la forme complexe donnée par:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

où X_n sont les coefficients de la série de Fourier. On peut montrer que:

$$X_0 = a_0$$

et

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} \\ X_{-n} &= \frac{a_n + jb_n}{2} \end{aligned}$$

pour $n = 1, 2, \dots$

Les coefficients complexes sont donnés par

$$X_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Nous remarquerons tout de suite que si:

- 1) $x(t)$ est pair $b_n = 0$ alors X_n est réel.
- 2) $x(t)$ est impair $a_n = 0$ alors X_n est imaginaire.

La représentation spectrale graphique qui lui est associée porte le nom de spectre bilatéral. Pour la suite du cours, on retiendra essentiellement cette description car elle est analytiquement plus intéressante que la forme en cosinus.

Remarque : la formule d'Euler remplace les fonctions sinus et cosinus par des exponentielles à exposant imaginaire appelées phaseurs. Ces phaseurs ne sont rien d'autres que des fonctions complexes oscillant sinusoïdalement sur l'axe réel et sinusoïdalement sur l'axe imaginaire.

Comme X_n est, en général un nombre complexe, on peut l'écrire sous forme polaire:

$$X_n = |X_n| \angle X_n$$

où $|X_n|$ est l'amplitude et $\angle X_n$ est la phase.

La description de $x(t)$ avec les fonctions complexes $X(\pm jn) \exp(j2\pi n f_0 t)$ conduit aux spectres bilatéraux d'amplitudes et de phases ($|X_n|$ et $\angle X_n$). Ici, les fréquences sont négatives et positives car n varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Dans le cas des spectres bilatéraux, on notera que les spectres d'amplitudes sont toujours pairs car on a :

$$|X_n| = |X_{-n}| = \frac{A_n}{2}, n \neq 0$$

Alors que les spectres de phases sont toujours impairs:

$$\angle X_n = \angle -X_{-n} = \theta_n, n \neq 0$$

Pour le cas particulier de la composante continue du signal, on a :

$$|X_0| = A_0$$

$$\angle X_0 = 0 \text{ ou } \pi$$

Si l'on tient compte des symétries du signal, le calcul des séries de Fourier est simplifié. On démontre en effet aisément les propriétés suivantes:

- Un signal pair est représenté par des cosinus seulement; on a alors :

$$\theta_n = 0, \pm\pi \quad \text{Im}[X_n] = 0$$

- Un signal impair est représenté par des sinus seulement ; on a alors :

$$\theta_n = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{Re}[X_n] = 0$$

Exemple

Pour l'exemple 1, on peut montrer que:

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} A e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{A}{-j2\pi n f_0 T} e^{-j2\pi n f_0 t} \Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}$$

$$= \frac{A}{-j2\pi n} (e^{-j\pi n f_0 \alpha} - e^{j\pi n f_0 \alpha}) = \frac{A}{\pi n} \frac{(e^{j\pi n f_0 \alpha} - e^{-j\pi n f_0 \alpha})}{j2}$$

$$= \frac{A}{\pi n} \sin(\pi n f_0 \alpha) = \frac{\alpha}{T} \frac{A}{\pi n \frac{\alpha}{T}} \sin(\pi n \frac{\alpha}{T}) = \frac{\alpha}{T} A \text{sinc}(n \frac{\alpha}{T})$$

Dans ce cas X_n sont réels $x(t)$ est pair ($b_n = 0$), mais dans le cas général ce sont des complexes.

On remarque aussi que $X_n = A_n / 2 = a_n / 2$.

La figure montre les spectres bilatéraux d'amplitude et de phase de l'exemple 1, pour $T = 1$, $\alpha = 0.5$ et $A = 2$.

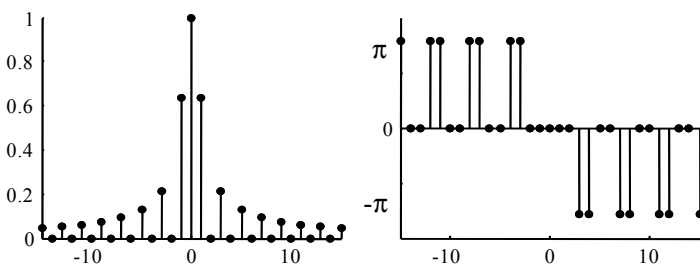
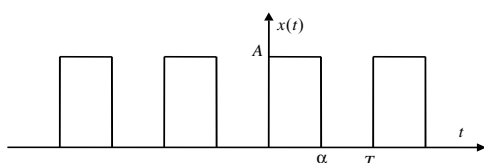


Figure. Spectres bilatéraux de l'exemple 1.

Exemple:

Soit le signal $x(t)$



Les coefficients de la série de Fourier sont:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T} \int_0^\alpha A e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{A}{-j2\pi n f_0 T} e^{-j2\pi n f_0 t} \Big|_0^\alpha \\ &= \frac{A}{-j2\pi n} (e^{-j2\pi n f_0 \alpha} - 1) = \frac{A e^{-j\pi n \frac{\alpha}{T}}}{j2\pi n} (e^{j\pi n \frac{\alpha}{T}} - e^{-j\pi n \frac{\alpha}{T}}) \\ &= \frac{\alpha A}{T} e^{-j\pi n \frac{\alpha}{T}} \operatorname{sinc}\left(n \frac{\alpha}{T}\right) \end{aligned}$$

Donc l'amplitude est:

$$|X_n| = \frac{\alpha A}{T} \left| \operatorname{sinc}\left(n \frac{\alpha}{T}\right) \right|$$

et la phase est:

$$\angle X_n = \begin{cases} -\pi n \frac{\alpha}{T} & \text{si } \operatorname{sinc}\left(n \frac{\alpha}{T}\right) > 0 \\ -\pi n \frac{\alpha}{T} + \pi & \text{si } n > 0 \text{ et } \operatorname{sinc}\left(n \frac{\alpha}{T}\right) < 0 \\ -\pi n \frac{\alpha}{T} - \pi & \text{si } n < 0 \text{ et } \operatorname{sinc}\left(n \frac{\alpha}{T}\right) < 0 \end{cases}$$

Pour $T = 1$, $A = 2$, $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 0.25$ les spectres d'amplitude et de phase sont représentés sur les fig. .

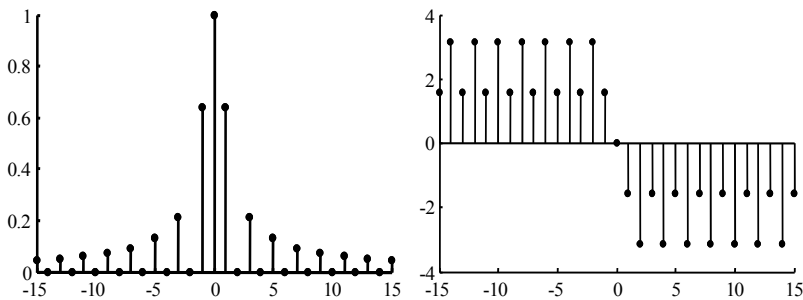


figure $\alpha = 0.5$

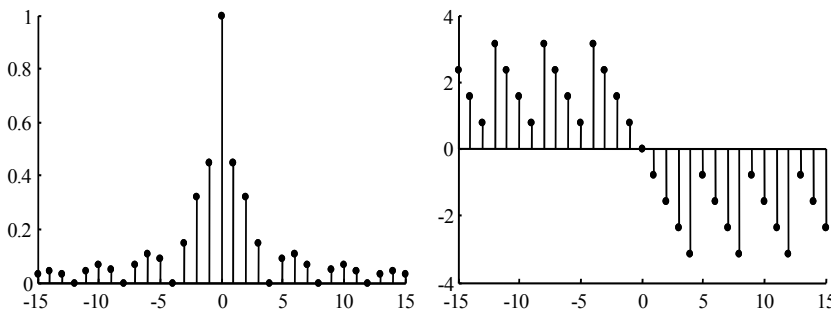


Figure. $\alpha = 0.25$

3.5 Propriétés

- 1) Linéarité: Si $x(t) \xrightarrow{SF} X_n$ et $y(t) \xrightarrow{SF} Y_n$ alors $ax(t) + by(t) \xrightarrow{SF} aX_n + bY_n$.
- 2) Décalage: Si $x(t) \xrightarrow{SF} X_n$ alors $x(t - t_0) \xrightarrow{SF} X_n e^{-j2\pi n f_0 t_0}$. Les amplitudes restent inchangées, et les phases deviennent $\angle X_n - 2\pi n f_0 t_0$. À un décalage temporel correspond une phase variant linéairement avec la fréquence.
- 3) Rabattement: Si $x(t) \xrightarrow{SF} X_n$ alors $x(-t) \xrightarrow{SF} X_{-n}$.
- 4) Échelonement du temps: Si la fréquence de $x(t)$ est f_0 alors la fréquence de $x(at)$ est af_0 (la

période T/a). Les coefficients de la série de Fourier, mais leurs positions sont changées: $af_0, 2af_0, 3af_0, \dots$

- 5) Multiplication: Si $x(t) \xrightarrow{SF} X_n$ et $y(t) \xrightarrow{SF} Y_n$ alors $x(t)y(t) \xrightarrow{SF} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_l Y_{k-l}$.
- 6) Symétrie: Si $x(t)$ est un signal réel alors; si $x(t)$ est pair donc X_n est réel. Si $x(t)$ est impair donc X_n est imaginaire.
- 7) Si $x(t) = -x(t + \frac{T}{2})$, on dit alors que $x(t)$ est impair-symétrique ou encore semi-symétrique, alors SF ne contient que des harmoniques de rang impair : pour $n \geq 1$ $a_0 = a_{2n} = b_{2n} = 0$.

3.6 Relation de Bessel-Parseval

Dans de très nombreux contextes, la puissance moyenne transportée par un signal est proportionnelle au carré de son amplitude: puissance électrique proportionnelle au carré du courant, puissance lumineuse proportionnelle au carré du champ électrique, puissance cinétique proportionnelle au carré de la vitesse, etc...

Cette égalité relie la valeur moyenne du carré du module de $x(t)$ à ses coefficients de Fourier par:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ &= A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 = |X_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (2|X_n|)^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 = P_{dc} + P_{ac} \end{aligned}$$

Le théorème de Parseval exprime la façon dont la puissance correspondant au phénomène périodique décrit par $x(t)$ se répartit entre les différents harmoniques.

La puissance moyenne associée à une fonction périodique est égale à la somme des puissances moyennes associées à chacune de ses composantes de Fourier.

$$\begin{aligned} P &= A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 \\ &= P_{dc} + P_{ac} \\ &= |X_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (2|X_n|)^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \end{aligned}$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_T x(t)x^*(t)dt = \frac{1}{T} \int_T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} x^*(t)dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \frac{1}{T} \int_T x^*(t) e^{j2\pi n f_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n X_n^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \end{aligned}$$

Le spectre de puissance est la représentation de la distribution de la puissance du signal sur l'ensemble des harmoniques. Pour le signal de l'exemple 1 le spectre de puissance est représenté sur la figure suivante.

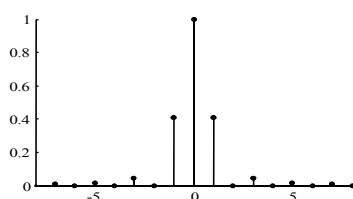


Fig. : Spectre de puissance de l'exemple 1.

3. Transformée de Fourier (TF)

Définition

La TF est un outil mathématique pour passer de la représentation temporelle des signaux non périodiques à la représentation fréquentielle, et vice versa.

On peut définir la TF comme étant la limite de la SF (c.-à-d, qu'on considère les signaux non périodiques comme des signaux périodiques avec une période infinie.

On peut voir l'influence de la période T sur les spectres, plus T augmente plus les harmoniques se rapprochent, jusqu'à devenir un spectre continu lorsque $T \rightarrow \infty$.

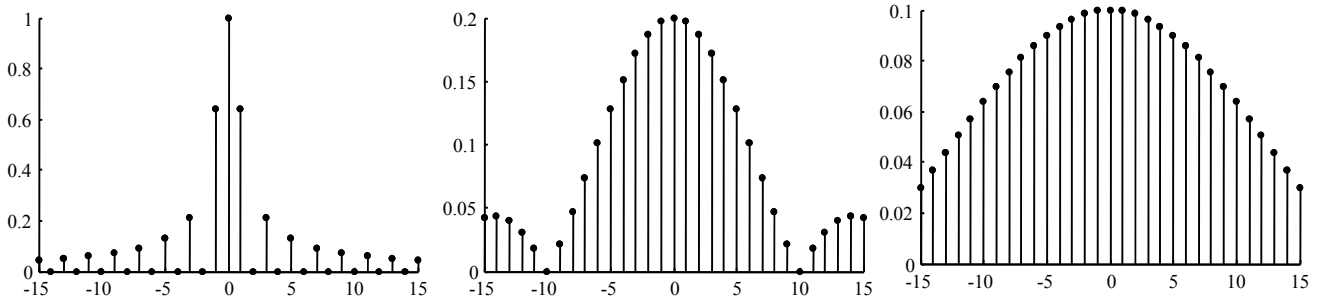


Figure. Spectre du signal de l'exemple 1, pour : $T = 2, 5, 10$.

Reprenant la SF

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

avec

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

soit

$$X(nf_0) = f_0 \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

En remplaçant dans ()

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0 \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt e^{j2\pi n f_0 t}$$

On a remarqué que lorsque T augmente les harmoniques se rapprochent de plus en plus. A limite, lorsque $T \rightarrow \infty$ le spectre devient continu. les fréquences $n f_0 \rightarrow f$ et $f_0 \rightarrow df$; et la sommation tend vers une intégrale; on peut écrire: En remplaçant dans (), nous aurons

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right] X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Ce qui est entre Crochets est noté

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

est appelé TF, et

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

est appelé TF inverse.

Comme $X(f)$ est, en générale, complexe, on peut le représenté sous forme polaire

$$X(f) = |X(f)| \angle X(f)$$

On appelle spectre d'un signal $x(t)$ l'ensemble des valeurs de f donnant une contribution non nulle à $x(t)$. Il s'agit à priori d'un spectre continu dans le cas où $x(t)$ est non périodique, largeur $\Delta\omega$, alors qu'on a un spectre discret pour les TF d'un signal périodique.

3.2 Condition d'existence

Pour qu'un signal non périodique $x(t)$ ait une TF, il doit satisfaire l'une des conditions suivantes

1) Énergie finie

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

2) Conditions de Dirichlet

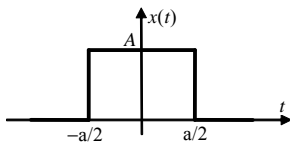
a) Signal absolument intégrable

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

b) Signal avec un nombre fini d'extremums sur un intervalle de temps fini.

c) signal avec un nombre fini de discontinuités sur un intervalle de temps fini, encore ces discontinuités doivent être finies.

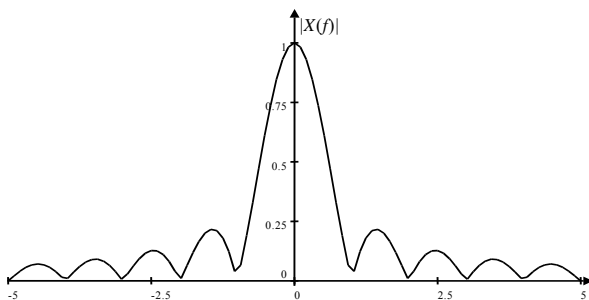
Exemple:



Soit le signal $x(t) = A \text{rec}_a(t)$, la TF est:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-a/2}^{a/2} A e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{j2\pi f} [e^{j\pi fa} - e^{-j\pi fa}] \\ &= Aa \text{sinc}(af) \end{aligned}$$

$|X(f)| = Aa |\text{sinc}(af)|$ et le spectre de phase (pour $A = 1, a = 1$).



L'allure du graphe de la fonction sinus cardinal montre que $X(f)$ ne prend de valeurs notables que sur un intervalle de fréquences $\Delta\omega \approx 2\pi/a$ correspondant au pic central du graphe.

3.3 TF des signaux singuliers

1. Signe : On peut définir le signe comme : $x(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|} \text{sgn}(t)$

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|} \operatorname{sgn}(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} (-e^{at} e^{-j2\pi ft} + e^{-at} e^{-j2\pi ft}) dt \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{a - j2\pi f} + \frac{1}{a + j2\pi f} \right] \\
&= \frac{1}{j\pi f}
\end{aligned}$$

2. Constante: $x(t) = 1$, qui peut être écrite comme: $x(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|}$

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|} e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{at} e^{-j2\pi ft} dt + e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a - j2\pi f} + \frac{1}{a + j2\pi f} \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2 + (2\pi f)^2}
\end{aligned}$$

Nous avons deux cas:

$$f \neq 0 \text{ alors } X(f) = 0$$

$$f = 0 \text{ alors } X(f) = \infty. \text{ Calculons l'aire de } (\),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) df = 1$$

D'où $X(f) = \delta(f)$ est une impulsion de Dirac.

3. Échelon: remarquons que : $u(t) = 1/2 + 1/2 \operatorname{sgn}(t)$ alors

$$\begin{aligned}
\text{TF}[u(t)] &= \frac{1}{2} \text{TF}[1] + \frac{1}{2} \text{TF}[\operatorname{sgn}(t)] \\
&= \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}
\end{aligned}$$

4. Impulsion de Dirac:

$$\text{TF}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1$$

4.4 TF des signaux périodiques

Pour calculer les TF des signaux périodiques on peut exploiter leurs représentation on SF. Soit le signal périodique $x(t)$ de période T ($f_0 = 1/T$), alors

$$\begin{aligned}
X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f - n f_0)t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f - n f_0)
\end{aligned}$$

Exemple:

Soit le signal $x(t) = 8 \cos(2\pi f_0 t)$. Sans calcul on a:

$$x(t) = 8 \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} = 4e^{j2\pi f_0 t} + 4e^{-j2\pi f_0 t}$$

Donc les coefficients de la SF $X_1 = 4$ et $X_{-1} = 4$, les autres sont nuls. Remplaçons dans ($\$), nous auront

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(f - n f_0) = 4\delta(f - f_0) + 4\delta(f + f_0)$$

Refaire le calcul avec le signal de l'exemple 1.

4.5 Propriétés

- 1) Linéarité; TF $[ax_1(t) + bx_2(t)] = aX_1(f) + bX_2(f)$
- 2) Symétrie: si TF $[x(t)] = X(f)$ alors TF $[x(-t)] = X(-f)$, soit le même module $|X(-f)| = |X(f)|$ et la phase est inversée.
- 3) Si $x(t)$ est pair alors $X(f)$ est réelle est paire. Si $x(t)$ est impair alors $X(f)$ est imaginaire est impaire.

Exemple: Soit le signal pair $x(t) = \text{rec}_2(t)$ alors la TF est:

$$X(f) = \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-1}^1 = 2 \sin c(2f)$$

Exemple: Soit le signal impaire $x(t) = -\text{rec}_1(t + 1/2) + \text{rec}_1(t - 1/2)$,

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-1}^1 x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-1}^0 (-1) \cdot e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^1 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{-j2\pi f} \left[-e^{-j2\pi ft} \Big|_{-1}^0 + e^{-j2\pi ft} \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{-j2\pi f} [-2 + e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f}] \\ &= \frac{1}{j2\pi f} [2 - 2 \cos(2\pi f)] = \frac{-j}{2\pi f} [2 - 2 \cos(2\pi f)] \end{aligned}$$

- 4) Décalage: si TF $[x(t)] = X(f)$ alors TF $[x(t - t_0)] = X(f)e^{-j2\pi ft_0}$

Exemple: on a vu que TF $[\text{rec}_2(t)] = 2 \sin c(2f)$ alors

$$TF[\text{rec}_2(t - 2)] = 2 \sin c(2f) e^{-j2\pi f \cdot 2}$$

- 5) TF $[x(t)] = X(f)$ alors TF $[x(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} X(f/\alpha)$.

preuve, nous avons deux cas $\alpha > 0$ ($\alpha = |\alpha|$). On pose $|\alpha|t = \lambda$ alors $dt = d\lambda/|\alpha|$ remplaçant dans (),

$$TF[x(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j2\pi \frac{f}{|\alpha|} \lambda} d\lambda$$

Pour $\alpha < 0$ ($\alpha = -|\alpha|$), nous avons $-|\alpha|t = \lambda$ alors $dt = -d\lambda/|\alpha|$ remplaçant dans (),

$$TF[x(\alpha t)] = \frac{-1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j2\pi \frac{-f}{|\alpha|} \lambda} d\lambda$$

- 6) Dérivée: si TF $[x(t)] = X(f)$ alors TF $[\dot{x}(t)] = j2\pi f X(f)$

Preuve:

$$\begin{aligned} TF[\dot{x}(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned}$$

Si $x(t)$ est absolument intégrable alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ alors

$$TF[\dot{x}(t)] = j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = j2\pi f X(f)$$

On peut généraliser pour trouver

$$\text{TF}[x^{(n)}(t)] = (j2\pi f)^n X(f)$$

7) Intégration: Si $y(t) = \int x(v)dv$ alors

$$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)X(0)$$

Si $X(0) = 0$ alors le deuxième terme est absent. En général, si $y(t) = \overbrace{\int \dots \int}^n x(v)dv$ alors $Y(f) = \frac{X(f)}{(j2\pi f)^n}$

8) Convolution: $x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)x_2(t - \lambda)d\lambda$, alors

$$\text{TF}[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(f)X_2(f)$$

Preuve:

$$\text{TF}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)x_2(t - \lambda)d\lambda e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\begin{aligned} \text{TF}[x_1(t) * x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \lambda)e^{-j2\pi ft} dt \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)X_2(f)e^{-j2\pi f\lambda} d\lambda = X_2(f) \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)e^{-j2\pi f\lambda} d\lambda = X_1(f)X_2(f) \end{aligned}$$

9) Dualité : si $\text{TF}[x(t)] = X(f)$, alors $\text{TF}[X(t)] = x(-f)$. On démontre cette propriété, on remplaçant t par f et vice versa, ce qui donne,

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{j2\pi ft} dt = x(-f)$$

Exemple: Soit le signal $x(t) = A \text{rec}_a(t)$, la TF est: $X(f) = Aa \text{sinc}(af)$. D'un autre coté soit $X(t) = Aa \text{sinc}(at)$ alors TF: $x(f) = A \text{rec}_a(-f)$.

On a montré que la TF peut être écrite sous forme d'amplitude et de phase.

Exemple: Soit $x(t) = e^{-at}u(t)$ avec $a > 0$, alors la TF est

$$X(f) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

alors l'amplitude et la phase sont:

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}$$

$$\angle X(f) = -\arctan\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$

