Chapitre 2

Systèmes et convolution

Définition

Un système est un ensemble isolé de dispositifs orientés, qui établit un lien de cause à effet entre des signaux d'entrée (appelés excitations) et des signaux de sortie (appelés réponses ou mesures).

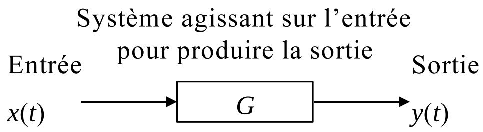


Fig. 2.1: Définition d'un système.

Un système est une relation mathématique entre un signal d'entrée et un signal de sortie, tel que:

$y = G(x)$

où G est l'opérateur appliqué à l'entrée pour obtenir la sortie.

Comme exemple la résistance est un système dont l'entrée est le courant et la sortie est la tension $v(t) = Ri(t)$. Le condensateur est un autre système dont la relation entrée-sortie est $v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(l)dl$

Propriétés

Linéarité

Un système G est linéaire s'il satisfait les propriétés d'addition et d'homogénéité (superposition).

La propriété d'addition indique que si $y_1 = G(x_1)$ et $y_2 = G(x_2)$, alors la réponse pour l'entrée $x_1 + x_2$ est : $y = y_1 + y_2 = G(x_1 + x_2) = G(x_1) + G(x_2)$.

L'homogénéité indique que si $y = G(x)$ alors la réponse pour ax est $ay = G(ax) = aG(x)$. Ce qui implique que pour $x = 0$ nous avons $y = 0$. De ce fait, le système $y = x + 3$ n'est pas linéaire puisque pour $x = 0$, $y = 3$.

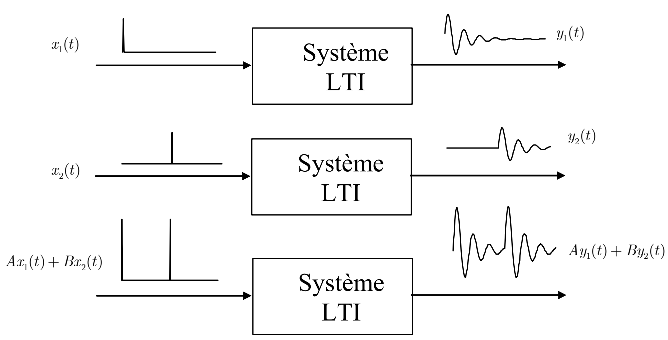


Fig. 2.5: Superposition.

Dynamique

Un système est sans mémoire (statique), si la sortie y à l'instant t ne dépend que de l'entrée x au même instant; par exemple la résistance

$v(t) = Ri(t)$

est un système sans mémoire (statique). Alors que le condensateur est un système avec mémoire (dynamique),

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)\, d\lambda$$

ou encore le système $y(t) = 2x(t) + 3x(t-2)$.

Causalité

C'est une propriété fondamentale des systèmes physiques. Un système est causal si la réponse $y(t)$ à un saut indiciel est nulle pour $t \leq 0$. Un système anti-causal viole les lois de la physique puisqu'il produit un effet avant que la cause soit présente.

Exemple: $y(t) = x(t) + 2x(t-2);$

Exemple: (non causal), $y(t) = x(t+3).$

Stationnarité (Invariance dans le temps)

Un système stationnaire est un système dont les caractéristiques ne changent pas au cours du temps. C'est le cas de beaucoup de systèmes auxquels l'ingénieur doit faire face, excepté qu'instinctivement l'ingénieur va ajuster son modèle quand c'est nécessaire. Formellement, la stationnarité s'exprime de la manière suivante:

Si sa réponse à $x(t-t_0)$ est égale à sa réponse à $x(t)$ c.-à-d $y(t-t_0) = y(t)$, le système est stationnaire.

Exemple:

$y(t) = \sin(x(t))$ est invariant dans le temps, puisque $y(t-t_0) = \sin(x(t-t_0))$, si $x(t) = x(t-t_0)$ alors $y(t) = y(t-t_0).$

Exemple:

$y(t) = t\sin(x(t))$ est variant dans le temps, puisque $y(t-t_0) = (t-t_0)\sin(x(t-t_0))$, d'où $y(t) \neq y(t-t_0).$

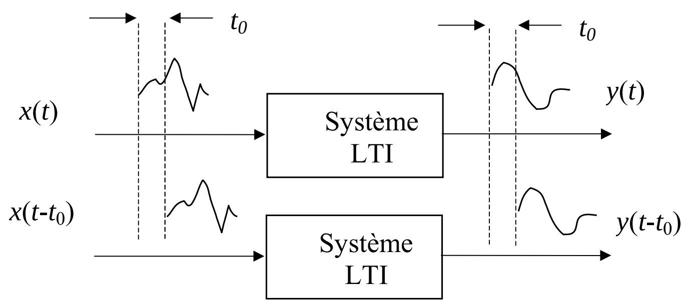


Fig. 2.6: invariance dans le temps.

Réponse des systèmes LTI

Les systèmes LTI peuvent être représentés sous forme d'équation différentielle à cœfficients constants de la forme:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + ... + b_1\frac{dx}{dt} + b_0 x(t)$$

Soit encore:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{d^j x}{dt^j}$$

Pour calculer la sortie $y(t)$ du système, pour une entrée $x(t)$, on doit résoudre l'équation différentielle (1.7). Pour cela on a besoin de n conditions initiales sur $y(t)$ ($y(0), \dot{y}(0), ..., y^{(n-1)}(0)$) et m conditions initiales sur $x(t)$ ($x(0), \dot{x}(0), ..., x^{(m-1)}(0)$). Pour les systèmes causals toutes ces conditions sont nulles.

La réponse d'un système linéaire causal est donnée par

$$y(t) = \int_0^t h(v)x(t-v)dv$$

avec $h(t)$ la réponse impulsionnelle du système. $h(t)$ est une caractéristique propre du système indépendante du signal d'entrée.

Pour démontrer cette relation on reprend:

$$y(t) = G[x(t)]$$

D'un autre côté, l'utilisation des propriétés de l'impulsion de Dirac, permet d'écrire $x(t)$ sous la forme :

$$x(t) = \int_0^t x(v)\delta(t-v)dv$$

Remplaçons dans (2.10) on a :

$$y(t) = G\left[\int_0^t x(v)\delta(t-v)dv\right]$$

Par la propriété de linéarité on peut écrire :

$$y(t) = \int_0^t x(v)G\left[\delta(t-v)\right]dv$$

En écrivant $G[\delta(t-v)] = h(t-v)$, où $h(t)$ est la réponse lorsque l'entrée est une impulsion de Dirac. On aura donc:

$$y(t) = \int_0^t x(v)h(t-v)dv$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\;h(t)\;} \longrightarrow y(t)$$

L'intégral (2.25) représente la convolution ente $h(t)$ et $x(t)$. $h(t)$ est la réponse impulsionnelle (c.-à-d, la réponse pour $x(t) = \delta(t)$), la preuve est:

$$y(t) = \delta(t) * h(t) = \int_0^t \delta(v)h(t-v)dv = h(t)$$

On peut montrer que la réponse à un échelon (réponse indicielle) est l'intégrale de la réponse impulsionnelle:

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_0^t u(v)h(t-v)dv = \int_0^t h(t-v)dv$$

Exemple

Soit : $h(t) = 5\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)$

La réponse à un échelon est:

$$y(t) = u(t) * h(t)$$

Ce qui est égal à :

$$y(t) = \int_0^t h(v)dv = \int_0^t 5\left(e^{-v} - e^{-2v}\right)dv$$
$$= \frac{5}{2}\left(1 + e^{-2t} - 2e^{-t}\right)u(t)$$

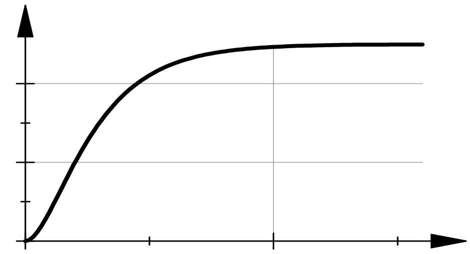


Fig. 2.9: Réponses indicielle.

Calcul graphique de la convolution

Quelques fois, il est possible de calculer l'intégrale de convolution d'une manière directe. Mais dans la plupart des cas il faut utiliser une approche graphique.

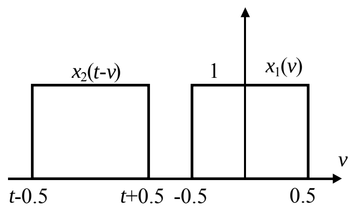
L'approche graphique est expliquée sur les exemples suivants.

Exemple: Soit à calculer la convolution des signaux: $x_1(t) = x_2(t) = rec_1(t)$; soit :

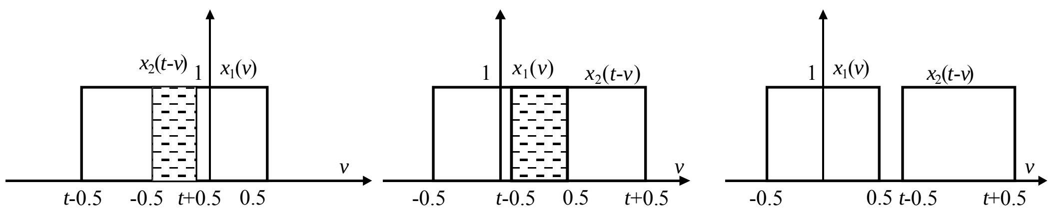
$$x_1 * x_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(v)x_2(t-v)dv$$

Les étapes de calcul sont les suivantes:

1) On trace les signaux $x_1(v)$ et $x_2(t-v)$.



2) On translate le signal $x_2(t-v)$ et on calcule l'aire formée par les deux signaux.



a) $t < -1$, $y(t) = 0$

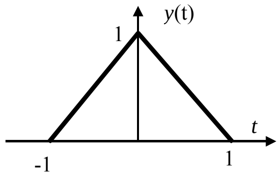
b) $-1 < t < 0$, $y(t) = \int_{-1/2}^{t+1/2} dv = 1 + t$

c) $0 < t < 1$, $y(t) = \int_{t-1/2}^{1/2} dv = 1 - t$

d) $t > 1$, $y(t) = 0.$

Enfin, nous avons

$$y(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < -1 \\ 1+t & si \quad -1 < t \le 0 \\ 1-t & si \quad 0 < t \le 1 \\ 0 & si \quad t > 1 \end{cases}$$

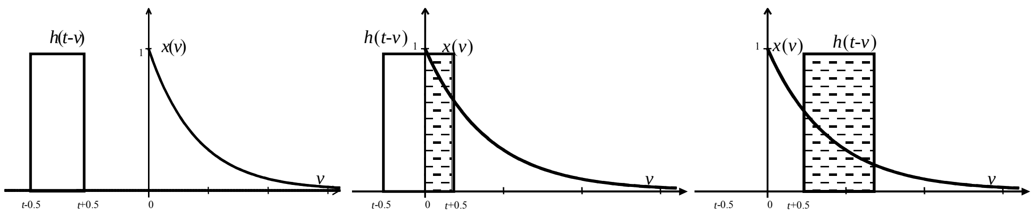


Exemple: soient $x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$ et $h(t) = rec_1(t)$.

On définit l'intégrale de convolution comme:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} rec_1(t-v)h(v)dv$$

Les étapes de calcul sont les suivantes:



1) on trace $h(t-v)$ et $x(v)$

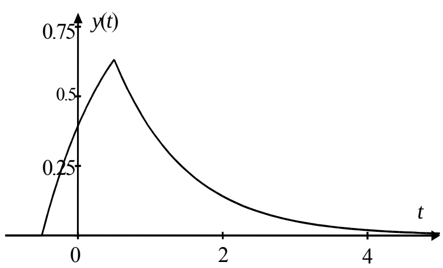
2) on le décale pour avoir $rec_1(t-v)$, et on calcule l'aire de convolution suivant, les intervalles possibles.

   a) $t < -1/2 \;\; , \;\; y(t) = 0$

   b) $-1/2 < t < 1/2, \quad y(t) = \int_0^{t+1/2} e^{-av}dv = \frac{\left(1-e^{-a(t+1/2)}\right)}{a}$

   c) $t > 1/2, \quad y(t) = \int_{t-1/2}^{t+1/2} e^{-av}dv = \frac{e^{-at}}{a}\left(e^{a/2} - e^{-a/2}\right)$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < -1/2 \\ \frac{\left(1-e^{-a(t+1/2)}\right)}{a} & si \quad -1/2 \le t \le 1/2 \\ \frac{e^{-at}}{a}\left(e^{a/2} - e^{-a/2}\right) & si \quad 1/2 < t < \infty \end{cases}$$



Propriétés de la convolution

On montrer que la convolution possède les propriétés suivantes:

1) Continuité: La convolution est une fonction continue.

2) Commutativité: la convolution est commutative, c.-à-d

$x_1 * x_2 = x_2 * x_1$

On peut démontrer cette propriétés en opérant le changement de variable suivant: $\lambda = t - v,$ alors:

$$\begin{aligned} x_1 * x_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(v) x_2(t-v) dv = -\int_{+\infty}^{-\infty} x_1(t-\lambda) x_2(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\lambda) x_2(\lambda) d\lambda = x_2 * x_1 \end{aligned}$$

3) Associativité:

$[x_1 * x_2] * x_3 = x_1 * [x_2 * x_3]$

4) Décalage: si $x_1(t) * x_2(t) = y(t)$ alors :

$x_1(t - t_1) * x_2(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2)$

Par exemple, comme $rec_1(t) * rec_1(t) = tri_1(t)$ alors

$rec_1(t-1) * rec_1(t+3) = tri_1(t+2)$

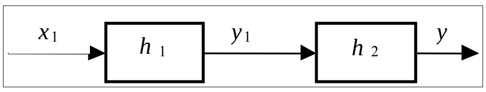
5) Dérivation: Si $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ alors

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} * x_2(t) = x_1(t) * \frac{dx_2(t)}{dt}$$

6) Connexions:

a) série: Puisque et $y(t) = h_2 * y_1$. En remplaçant dans deuxième, nous avons le résultat:

$y(t) = (h_2 * h_1) * x = (h_1 * h_2) * x$



b) Parallèle:Puisque $y_1(t) = h_1 * x$ et $y_2(t) = h_2 * x$. comme $y(t) = y_1 + y_2$, nous avons le résultat:

$y(t) = h_1 * x + h_2 * x = (h_1 + h_2) * x$