Chapitre 2 : Convection forcée confinée

Dans ce chapitre on s'intéresse à déterminer les corrélations qui permettent d'évaluer le flux de chaleur émis ou reçu par un fluide en écoulement dans une conduite. Le flux échangé entre le fluide et la paroi de la conduite est fonction de la dynamique de l'écoulement (champ de vitesse) et de sa thermique (champ de température). Ainsi, vu qu'en convection forcée le mouvement du fluide est dû à une source extérieure (pompe, compresseur, ect…), le champ de vitesse est indépendant du champ de température. Mais, le calcul du champ de température demande de calculer au préalable le champ de vitesse. Le champ de vitesse est le résultat de la résolution des équations de quantité de mouvement et de l'équation de continuité :

$$\begin{cases} (\vec{U}.\vec{\nabla})\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{U} \\ \vec{\nabla}.\vec{U} = 0 \end{cases}$$

Une fois qu'on a le champ de vitesse on l'intègre dans l'équation de la chaleur :

$$\vec{U}.\,\vec{\nabla}T = \alpha\Delta T$$

pour calculer le champ de température.

La dynamique d'un écoulement, contrôlée par la compétition entre les forces d'inertie et les forces de viscosité (frottement), est caractérisée par le nombre de Reynolds, *Re :*

$$Re = \frac{inertie}{frottement} = \frac{UL}{\nu}$$

Similairement, le transport de chaleur à l'intérieur d'un fluide en écoulement est régi simultanément par les deux mécanismes, convection et conduction, le rapport des deux est le nombre de Peclect, *Pe :*

$$Pe = \frac{flux\ transporté\ par\ convection}{flux\ transmis\ par\ conduction} = \frac{\rho c_p U\Delta T}{k\frac{\Delta T}{L}} = \frac{UL}{\alpha} = \frac{UL}{\nu}\frac{\nu}{\alpha} = Re.Pr$$

Où, *U* et *L* sont des vitesses caractéristiques de l'écoulement et $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ est le nombre de Prandt.

Calculer le flux échangé entre l'écoulement et la paroi d'une conduite demande de calculer le coefficient de convection *h*.

On s'attend que *h* soit fonction des propretés physiques du fluide, de son champ de vitesse et de la géométrie de la conduite :

$$h \equiv f(\rho, \mu, c_p, U, L)$$

Ou en nombre réduit de paramètres : $h \equiv f(\nu, \alpha, U, L)$

En nombres adimensionnels on a :

$$Nu \equiv f(Re, Pe)$$

Finalement on a :

$$Nu \equiv f(Re, Pr)$$

Pour le même *Re*, *Nu* dépend de la nature physique du fluide :

$Pr \approx 1$: eau (Pr=7) et la plupart des gaz (air, Pr =0,7)

$Pr \gg 1$: huiles, (huile de moteur, Pr = 6400)

$Pr \ll 1$: métaux liquides (mercure, Pr =0,0248)

1. Convection dans une conduite circulaire

Dans ce cas on a :

$$Re = \frac{U_m D}{\nu}$$

Où *D* est le diamètre de la conduite et U_m est la vitesse moyenne de l'écoulement dans la conduite :

U_m = débit volumétrique/section transversale de la conduite.

On expose en premier lieu l'aspect dynamique puis l'aspect thermique de la convection.

1.1. Aspect dynamique

Le régime d'écoulement peut être laminaire ou turbulent, en fonction Re, et il est différent qu'il soit à l'entrée de la conduite ou plus loin.

1.1.1. Ecoulement laminaire

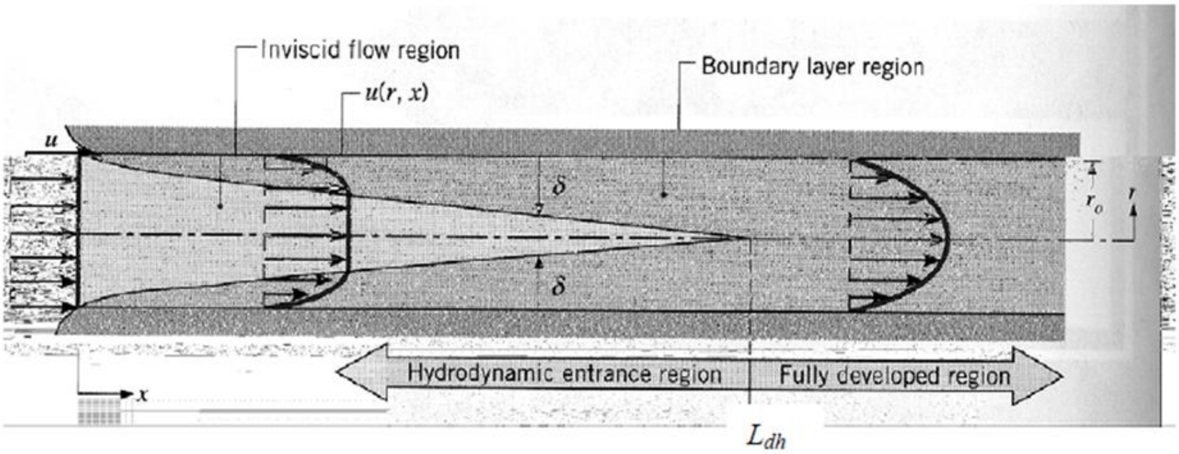
L'écoulement dans la conduite est laminaire si *Re* est inférieur à *Re* critique, *Rec* :

$$Re < Re_c = 2300$$

On distingue deux régions d'écoulement à topologies différentes.

a) **Région d'entrée** : la longueur de cette région, L_{dh}, se calcule par :

$$\left(\frac{L_{dh}}{D}\right)_{lam} \approx \frac{Re}{20}$$



Dans cette région le champ de vitesse change constamment, il perd partiellement et graduellement son profil initial uniforme (à l'entrée). La zone affectée par la présence de la paroi de la conduite augmente de plus en plus ; autrement dit, une couche limite se développe entre la paroi de la conduite et son axe, son épaisseur δ *(x)* augmente. Dans la couche limite l'écoulement est 2D (la composante axiale de la vitesse $u(x,r)$ et la composante radiale $v(x,r)$), alors qu'à l'extérieur autour de l'axe de la conduite (pas encore effectuée) la vitesse reste purement axiale (v=0). Cela est jusqu'à x=L_{dh} où la couche limite atteint l'axe de la conduite et ainsi tout l'écoulement dans la conduite est affecté par la paroi, l'écoulement perd totalement son profil initial uniforme et devient définitivement paraboloïde.

b) Régime dynamique établi

A partir de $x = L_{dh}$, le profil de la vitesse axiale u s'établi et devient paraboloïde (profil de Poiseuille) alors que la vitesse radiale s'annule, l'écoulement dans la conduite devient 1D, purement axial résultat ainsi u = f(r). On a :

$$\frac{u(r)}{u_m} = 2\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

avec

$$u_m = -\frac{R^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}$$

où R et le rayon de la conduite et $\frac{dp}{dx}$ est le gradient de pression dans la conduite.

1.1.2. Ecoulement turbulent

Pour ce régime d'écoulement où Re>2300 la longueur de la région d'entrée se détermine par :

$$\left(\frac{L_{dh}}{D}\right)_{turb} > 10$$

1.2. Aspect thermique

On distingue deux cas : paroi à température constante T_p, et paroi à flux constant q_p.

Pour le premier cas on suppose que la température de la conduite est supérieure à la température d'entrée du fluide. Dans les deux cas il y' a le développement de deux régimes de convection, le premier a lieu dans la région d'entrée thermique et le deuxième c'est le régime thermique établi. Dans la région d'entrée une couche limite thermique se développe dans l'écoulement dès que le fluide entre dans la conduite avec une température uniforme. Cette couche limite est le siège de changement de température dans le fluide, causé par la chaleur échangée entre la paroi de la conduite et le fluide. En dehors de cette couche, autour de l'axe de la conduite, l'écoulement conserve encore sa température initiale d'entrée, signifiant que cette zone n'a pas encore reçu de chaleur venant de la paroi. Plus le fluide pénètre dans la conduite plus l'épaisseur de cette couche limite augmente jusqu'à atteindre l'axe de la conduite à une distance donnée, L_{dT}, à partir de là le régime thermique établi commence, signifiant que dès ce moment tout l'écoulement dans la conduite est affecté par la chaleur échangé entre la conduite est le fluide. Ensuite, la température de tout l'écoulement continue d'augmenter dans les deux cas, conduite à température constante ou à flux constatant, mais dans le premier cas elle atteint la température de la conduite si cette dernière est très longue.

Pour un écoulement laminaire la longueur de la région d'entrée thermique se calcule par la relation :

$$\left(\frac{L_{dT}}{D}\right)_{lam} \approx \frac{RePr}{20}$$

Si Pr=1, la couche limite dynamique et la couche limite thermique se développent en même temps, si Pr>1 la couche limite dynamique se développe plus rapidement et pour Pr<1 c'est la couche limite thermique qui se développe le plus rapidement.

Pour un écoulement turbulent :

$$\left(\frac{L_{dT}}{D}\right)_{turb} > 10$$

1.3. Loi de Newton

Par définition le flux de chaleur échangé entre une conduite et un fluide circulant dedans se détermine par la relation, dite de Newton, suivante :

$$q_p = h\left(T_p - T_m\right)$$

où T_m est la température moyenne associée à l'enthalpie du fluide lors de son passage sur une section transversale à une distance x donnée Elle est évaluée par le bilan :

$$mc_pT_m = \int_S \rho u(r)c_pT(r)dS$$

pour un écoulement dans une conduite circulaire :

$$T_m = \frac{2}{u_m R^2} \int_0^R u(r)T(r)rdr$$

La détermination de $u(r)$ et de $T(r)$ dépend de régimes dynamique et thermique de l'écoulement.

1.4. Régimes dynamique et thermique établis

On rappelle que la vitesse u(r) a le profil de Poiseuille :

$$\frac{u(r)}{u_m} = 2\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

La température T_m est déterminée à partir de l'équation de la chaleur, en coordonnées cylindriques, qui se réduit à la forme suivante :

$$u\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]$$

En régime thermique établi les profils de température adimensionnels sont autosimilaire :

$\left[\frac{T_p - T(x,r)}{T_p - T_m(x)}\right]$ est invariant avec x.

Ainsi :

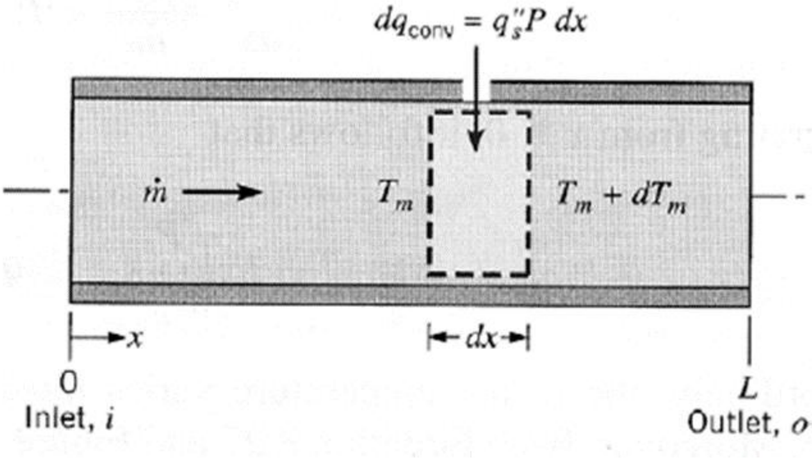
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{T_p - T(x,r)}{T_p - T_m(x)}\right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_p}{dx} - \frac{T_p - T(x,r)}{T_p - T_m(x)}\frac{dT_p}{dx} + \frac{T_p - T(x,r)}{T_p - T_m(x)}\frac{dT_m}{dx}$$

Aussi on peut en déduire que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{T_p - T(x,r)}{T_p - T_m}\right)_{r=R} = \frac{\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R}}{T_p - T_m} = constante \neq f(x) = \frac{q_p/k}{q_p/h} = \frac{h}{k} = constante$$

On arrive finalement au résultat important que h=constante.

1.4.1. Conduite à flux constant



Bilan de chaleur :

Entre deux sections distantes de *dx* écrivons la conservation de chaleur :

$$q_p P dx = q_p 2\pi R dx = \rho c_p u_m \pi R^2 (T_m(x+dx) - T_m(x))$$

$$2q_p dx = \rho c_p u_m R dT_m$$

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{2q_p}{\rho c_p u_m R} = constante$$

Cela implique, vue que $q_p = h(T_p - T_m)$ constante, que :

$$\frac{d}{dx}\left(T_p - T_m\right) = 0$$

Ce qui donne :

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{dT_p}{dx}$$

Revenons au profil adimensionnel de température, il vient que :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_p}{dx} = \frac{dT_m}{dx} = constante \;\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

L'équation de la chaleur redevient :

$$u\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]$$

Nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\frac{2u_m}{\alpha}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Une double intégration donne :

$$T(r,x)=\frac{2u_m}{\alpha}\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\left[\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{16R^2}\right]+c_1 lnr+c_2$$

Pour éviter le problème d'indétermination à r=0 on pose c_1=0. On a aussi la condition $T(x,r=R)=T_p(x)$ ce qui donne

$$c_2=T_p(x)-\frac{2u_m}{\alpha}\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\left(\frac{3R^2}{16}\right)$$

Finalement :

$$T(r,x)=T_p(x)-\frac{2u_m}{\alpha}\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\left[\frac{3}{16}+\frac{1}{16}\left(\frac{r}{R}\right)^4-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Ce qui permet de déterminer

$$T_m(x)=T_p(x)-\frac{11}{48}\left(\frac{u_mR^2}{\alpha}\right)\left(\frac{dT_m}{dx}\right)$$

$$=T_p(x)-\frac{11}{48}\left(\frac{u_mR^2}{\alpha}\right)\left(\frac{2q_p}{\rho c_p u_m R}\right)$$

$$=T_p(x)-\frac{11}{48}D\left(\frac{q_p}{k}\right)$$

Où

$$T_p(x)-T_m(x)=\frac{11}{48}\frac{D}{k}h$$

On peut écrire $\quad h=\frac{48}{11}\frac{k}{D}\Rightarrow Nu=\frac{hD}{k}=4{,}36$

1.4.2. Conduite à température constante, T_p=constante.

De la condition de l'autosimilarité du profil adimensionnel de la température il vient :

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{T_p-T(x,r)}{T_p-T_m(x)}\frac{dT_m}{dx}$$

On peut supposer avec une précision acceptable qu'en régime thermique établi $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

L'équation de la chaleur devient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{2u_m}{\alpha}\left(\frac{dT_m}{dx}\right)\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left[\frac{T_p - T(x,r)}{T_p - T_m}\right]$$

On résout cette équation itérativement par la méthode des approximations successives. Comme solution initiale il y' a la solution du cas d'une conduite à flux constant pour le profil de $\frac{T_p - T(x,r)}{T_p - T_m}$. Cette solution initiale est un polynôme en *r*, son intégration par rapport à *r* donne une deuxième solution qui permet de déterminer une solution approximative de ***Nu***, ainsi de suite, jusqu'à arriver à ***Nu* = 3,66**.

Le bilan énergétique sur un volume de fluide d'épaisseur *dx* permet de déterminer la fonction $T_m(x)$:

$$\rho c_p u_m \pi R^2 dT_m = h\left(T_p - T_m\right) 2\pi R dx$$

Où

$$\frac{dT_m(x)}{dx} = \frac{h}{u_m \rho c_p R}\left(T_p - T_m\right)$$

On fait le changement de variable suivant

$$\theta_m(x) = T_p - T_m(x) \Rightarrow \frac{d\theta_m}{dx} = -\frac{dT_m}{dx}$$

Cela donne :

$$\frac{d\theta_m}{\theta_m} = -\frac{h}{\rho c_p R u_m} dx$$

L'intégration de cette équation depuis l'entrée de la conduite, *x*=0, où $\theta_m = \theta_{me}$ jusqu'à la sortie de la conduite, *x*=*L*, où $\theta_m = \theta_{ms}$, résulte *:*

$$ln\left(\frac{\theta_{ms}}{\theta_{me}}\right) = -\frac{1}{\rho c_p R u_m}\int_0^L h dx$$

$$= -\frac{1}{\rho c_p R u_m} L\left(\frac{1}{L}\int_0^L h dx\right)$$

$$= -\frac{L}{\rho c_p R u_m}\bar{h}_L$$

Finalement on a :

$$\frac{T_p - T_{ms}}{T_p - T_{me}} = exp\left(\frac{-L}{\rho c_p R u_m}\bar{h}_L\right)$$

Où T_{me} et T_{ms} les températures moyennes à l'entrée et à la sortie de la conduite.

D'une manière générale on a :

$$\frac{T_p - T_m(x)}{T_p - T_{me}} = exp\left(\frac{-x}{\rho c_p R u_m}\bar{h}_x\right)$$

1.5 Région d'entrée

Au cours de ce régime l'écoulement est 2D, les deux composantes axiales *u* et radiale *v* dépendent de *x* et de *r*, ainsi le champ de température *T*(*x*, *r*). Les équations qui gouvernement le phénomène de la convection dans la région d'entrée sont :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Corrélation de Hausen :

$$\overline{Nu} = 3{,}66 + \frac{0{,}0668(D/L)RePr}{1+0{,}04[(D/L)RePr]^{2/3}} \qquad Pr \geq 5$$

Corrélation de Sieder-Tate

$$\overline{Nu} = 1{,}86\left(\frac{RePr}{L/D}\right)^{1/3}\left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0{,}14} \qquad 0{,}60 \leq Pr \leq 5$$

$$0{,}0044 \leq \left(\frac{\mu}{\mu_p}\right) \leq 9{,}75$$

$$\mu_p = \mu(T = T_p)$$

Toutes les propriétés physiques sont évaluées à la température moyenne :

$$\bar{T}_m = \frac{T_{me} + T_{ms}}{2}$$

1.6. Ecoulement turbulent

Corrélation de Dittus-Boelter

$$\overline{Nu} = 0{,}023 Re^{4/5} Pr^{n}$$

$n = 0{,}4$ pour $T_p > T_m$ (réchauffement) $0{,}6 \leq Pr \leq 160$

$n = 0{,}3$ pour $T_p < T_m$ (refroidissement) $Re \geq 10000$ (turbulence développé)

$\frac{L}{D} > 10$ (Écoulement turbulent établit)

Corrélation de Gnielinski

$$\overline{Nu} = \frac{\left(\frac{C_f}{8}\right)(Re - 1000)Pr}{1 + 12{,}7\left(\frac{C_f}{8}\right)^{1/2}\left(Pr^{2/3} - 1\right)}$$

$0{,}5 \leq Pr \leq 2000$

$3000 \leq Re \leq 5 \times 10^{6}$ (transition lam/turb)

C_f est le coefficient de frottement qu'on peut obtenir à partir du diagramme de Moody.

Ils existent des corrélations qui concernent les métaux liquides pour lesquels :

$$3 \times 10^{-3} \leq Pr \leq 5 \times 10^{-2}$$

Corrélation de Skupinski

$\overline{Nu} = 4{,}28 + 0{,}0185 Pe^{0{,}827}$ q_p = constante (conduite à flux constant)

$$3{,}6 \times 10^{3} \leq Re \leq 9{,}05 \times 10^{5}$$

$$10^{2} \leq Pe \leq 10^{4}$$

Corrélation de Sebon-Shimazaki

$\overline{Nu} = 5 + 0{,}025 Pe^{0{,}8}$ T_p=constante (conduite à température constante)

$$Pe \geq 100$$

2. Convection dans des conduites non circulaires

Pour les tubes à section transversale non circulaire, carrée, rectangle, triangle, losange…les nombres adimensionnels sont définis de la manière suivante :

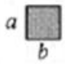
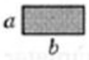
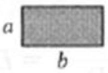
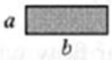
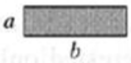
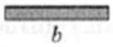
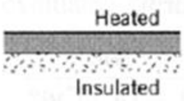
$Re = \frac{u_m D_h}{\nu}$, $Nu = \frac{h D_h}{k}$ et $Pe = \frac{u_m D_h}{\alpha}$ où D_h est le diamètre hydraulique :

$$D_h = \frac{4S}{P} = \frac{4 \times surface\ de\ la\ section\ transversale\ de\ la\ conduite}{périmètre\ de\ la\ section}$$

Similairement aux conduites circulaires, la transition laminaire/turbulent dans les conduites non-circulaires se fait à *Rec*=2300.

Pour les écoulements turbulents ($Re > 2300$) dans les conduites non-circulaires on applique les mêmes corrélations utilisées pour les conduites circulaires.

Pareillement au cas des conduites circulaires, les écoulements laminaires à régimes dynamique et thermique établis dans les conduites non-circulaires sont à *Nu* constant. Dans le tableau ci-dessous, on trouve les valeurs de *Nu* pour quelques formes géométriques.

Cross Section	$\frac{b}{a}$	Nu: q_v constant	Nu: T_v constante
	—	4.36	3.66
	1.0	3.61	2.98
	1.43	3.73	3.08
	2.0	4.12	3.39
	3.0	4.79	3.96
	4.0	5.33	4.44
	8.0	6.49	5.60
	∞	8.23	7.54
	∞	5.39	4.86
	—	3.11	2.49