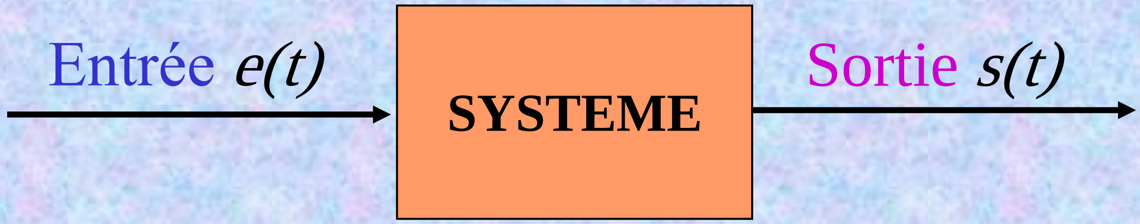
Chapitre 2- Modélisation Mathématique des Systèmes Asservis

Plan

1. Principe

Le but de la modélisation est de *déterminer les équations de fonctionnement ou de comportement* de notre système.

Par la suite, nous nous limiterons aux systèmes *monovariables*. Dans la majorité des cas, nous modélisons un système par des *équations différentielles*. Nous cherchons donc une relation entre l'entrée et la sortie telle que :



$$f\left(e(t), s(t), \frac{de(t)}{dt}, \frac{ds(t)}{dt}\right) = 0$$

2. Représentation des systèmes continus linéaires invariants (SLCI)

Un système est dit linéaire si son comportement est décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \ldots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \ldots + b_n \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

$$\chi$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j e(t)}{dt^j}$$

Nous avons :

$\boldsymbol{a_i}$ et $\boldsymbol{b_i}$ sont des coefficients constants,

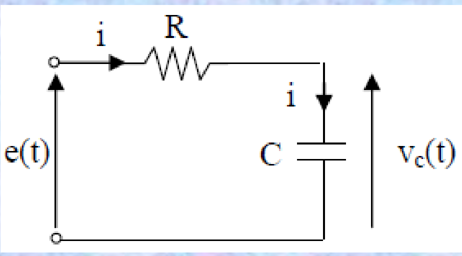
$\boldsymbol{n}$ = ordre du système,

Un système physique sera réalisable si $\boldsymbol{n > m}$

2. Représentation des systèmes continus linéaires invariants (SLCI)

Exemples

1. Circuit électrique :

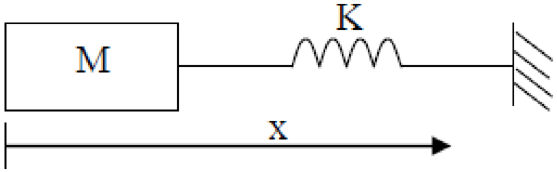


$$e(t) = Ri(t) + s(t)$$

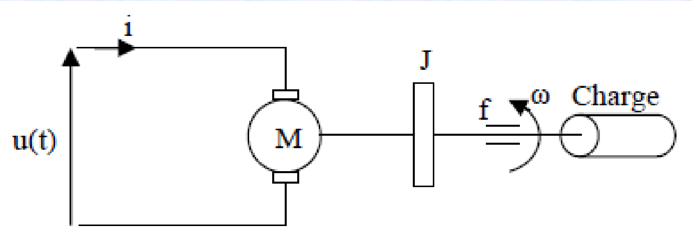
$$e(t) = RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) \text{ : Système linéaire (S.L.)}$$

2. Système mécanique

$$F_e = Kx + M\frac{dx}{dt} + f\frac{d^2x}{dt^2} \text{ : Système linéaire (S.L.)}$$



3. Système électromécanique



$$C_M = C_r + f\frac{d\theta}{dt} + J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

3. Résolution des équation différentielles

Pour résoudre une équation différentielle on utilise :

➢ Méthode classique

Equation différentielle :

- Equation différentielle sans second membre: *réponse libre* ***s1(t)***
- Solution particulière : *réponse forcée* ***s2(t)***

$$s(t) = s1(t) + s2(t)$$

Solution homogène : On pose e(t) = 0, on pose aussi : $\frac{de(t)}{dt} = 0$

Solution particulière : on pose s(t) de la même manière que e(t).

➢ Méthode de la transformée de Laplace

Cette méthode est la plus simple et la plus utilisée.

4. Transformée de Laplace

Cette méthode est la plus simple et la plus utilisée.

4.1 Définition

A toute fonction ***f*** *de variable t*, telle que f(t)=0 pour t<0, nous faisons correspondre une fonction ***F*** de *variable complexe p*. Nous définissons la transformée de Laplace :

$$F(p) = L\left(f(t)\right) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt} dt$$

Cette transformation permet de passer du domaine *temporel* au domaine de Laplace et permet la résolution dans le domaine *fréquentiel* de problèmes posés dans le domaine temporel.

4. Transformée de Laplace

4.2 Propriétés et théorèmes

Propriétés et théorèmes	
Théorème de la valeur initiale	$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{p \to \infty} pF(p) = f(0^+)$
Théorème de la valeur finale	$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p) = f(+\infty)$
Théorème du retard temporel	$TL\left[f(t-\tau)\right] = e^{-p\tau} F(p)$
Théorème de l'avance	$TL\left[e^{-\infty t} f(t)\right] = F(p+\infty)$
Linéarité	$TL\left[a_1 f_1 + a_2 f_2\right] = a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p)$
Dérivation	$TL\left[f^n(t)\right] = p^n F(p) - p^{(n-1)} f(0^+) - p^{(n-2)} f^1(0^+) - \ldots - f^{n-1}(0^+)$
Sans conditions initiales	$TL\left[f^n(t)\right] = p^n F(p)$
L'intégration	$TL\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}$

4. Transformée de Laplace

Exemple

Circuit RC

$$e(t) = Ri(t) + s(t) \quad \Rightarrow \quad e(t) = RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

$E(p) = RC\,p\,S(p) + S(p)$

$E(p) = (RC\,p + 1)S(p)$ Conditions initiales nulles

Objectif : Rechercher la réponse temporelle d'un système

Démarche:

- Calcul de la *fonction de transfert H(p)*
- Calcul de *l'entrée* dans le domaine de Laplace E(p)
- Calcul de la *sortie* dans le domaine de Laplace Y(p)
- Calcul de la *sortie temporelle* en appliquant la *transformée de Laplace* ***inverse*** *y(t)*

5. Fonction de transfert

5.1 Définition

Soit le système décrit par l'équation différentielle suivante:

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \ldots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \ldots + b_n \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

La transformée de Laplace (si les conditions initiales sont nulles)

$$a_n p^n S(p) + \ldots + a_2 p^2 S(p) + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \ldots + b_2 p^2 E(p) + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

$$(a_n p^n + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) S(p) = (b_m p^m + \ldots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0) E(p)$$

L'équation de transfert est dite aussi équation d'isomorphe qui est définit par le quotient des grandeurs de sortie et d'entrée :

$$\boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \ldots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}}$$

Remarque : *La fonction de transfert caractérise la dynamique du système. Dans un système physique réel le degré n de D(p), est supérieur au degré m de N(p).*

5. Fonction de transfert

5.2 Equation caractéristique

$$D(p) = a_n p^n + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0$$

- Les solutions de l'équation caractéristique *D(p)=0* sont appelées les ***racines*** ou les ***pôles*** du système.
- Les solutions de l'équation *N(p)=0* sont appelées les ***zéros*** du système.

$$\begin{aligned} D(p) = 0 &\Leftrightarrow a_n p^n + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow (p - p_n)(p - p_{n-1}) \ldots (p - p_0) \\ &\Leftrightarrow \prod_{i=0}^{n} (p - p_i) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(p) = 0 &\Leftrightarrow b_m p^m + \ldots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow (p - z_m)(p - z_{m-1}) \ldots (p - z_0) \\ &\Leftrightarrow \prod_{j=0}^{m} (p - z_j) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\prod_{j=0}^{m} (p - z_j) = 0}{\prod_{i=0}^{n} (p - p_i)}$$

5. Fonction de transfert

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{\prod_{j=0}^{m}(p-z_j)}{\prod_{i=0}^{n}(p-p_i)} \Rightarrow S(p)=\frac{\prod_{j=0}^{m}(p-z_j)}{\prod_{i=0}^{n}(p-p_i)}E(p)$$

En ordonnant les deux polynômes suivant les puissances croissantes de p, on obtient l'écriture suivante, encore appelée ***forme canonique de la fonction de transfert :***

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{p^{\alpha}}\,\frac{1+b_1^{'}p+b_2^{'}p^2+\dots}{1+a_1^{'}+a_2^{'}p^2+\dots}$$

α : classe du système

Remarque :

- Les « ***pi*** » peuvent être des réels ou des complexes ;
- Si les « pi » sont réels différents $\Rightarrow$ $s(t)=\sum_{i=0}^{n}C_i e^{p_i t} \Rightarrow \lim s(t)=\lim\sum_{i=0}^{n}C_i e^{p_i t}$
  - Si les pi <0 $\Rightarrow$ s(t) $\rightarrow$ 0 si t $\rightarrow$ +∞ : système **stable.**
  - Si les pi >0 $\Rightarrow$ s(t) $\rightarrow$ +∞ si t $\rightarrow$ +∞ : système **instable.**

5.3 Théorème

Un système est dit stable si les parties réelles de ses pôles sont à partie réelle négatives.