

Rappels et définitions

1. Nombres Complexes

Soit le nombre complexe, $z = a + jb$ (en écriture cartésienne)

En écriture polaire $z = |z| e^{j\varphi}$, avec l'amplitude $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et l'argument $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

Soient les nombres complexes $z_1 = a_1 + jb_1$ et $z_2 = a_2 + jb_2$, Les opérations sur les nombres sont effectuées comme suit:

1) Somme/Soustraction:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

2) Multiplication: en forme cartésienne,

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

et en forme polaire,

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

3) Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

4) Conjugué: le conjugué d'un nombre complexe $z = a + jb$ noté $z^* = a - jb$. En écriture polaire si $z = |z| e^{j\varphi}$ alors $z^* = |z| e^{-j\varphi}$.

5) Pour un nombre réel $z = a$ ($a > 0$) alors $\varphi = 0$, alors que pour $z = -a$ la phase est $\varphi = \pm\pi$.

6) Pour un nombre imaginaire pur $z = \pm jb$ ($b > 0$) alors $\varphi = \pm\pi/2$.

Formule d'Euler.

Tout nombre complexe peut être écrit sous la forme:

$$z = e^{\pm j\theta\varphi} = \cos(\varphi) \pm j \sin(\varphi)$$

De là, on peut montrer que

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{j2}$$

2. Signaux périodiques

Un signal périodique est un signal qui se répète de la même manière à des intervalles de temps précises, qui sont des multiples de sa période T , soit:

$$x(t + nT) = x(t) \quad n = 1, 2, \dots$$

Exemples:

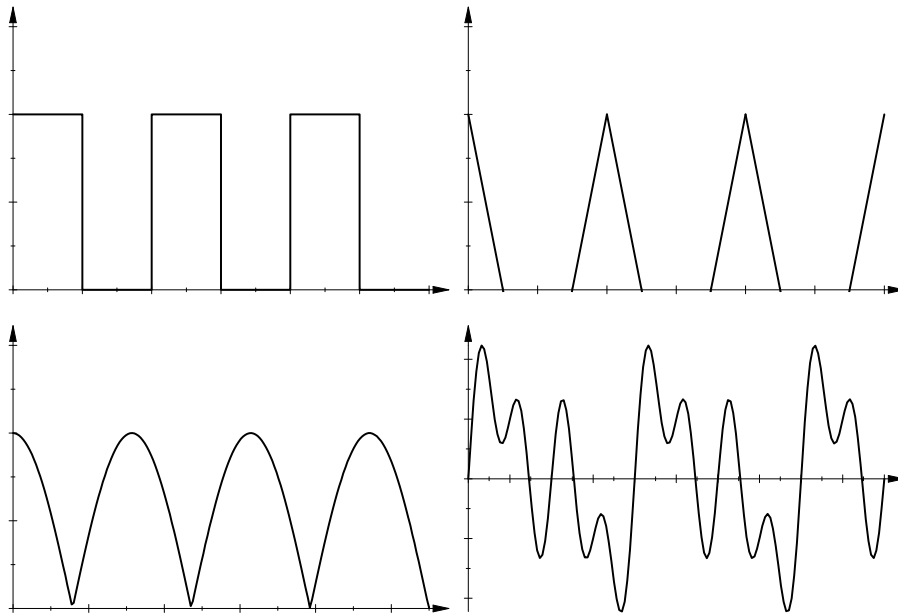


Fig. 1.1: Signaux périodiques.

Un signal périodique est déterminé si l'on connaît les éléments de la série de Fourier. Ces éléments sont basés sur :

- 1) la nature du signal (forme) ;
- 2) sa fréquence ou sa période ;
- 3) son amplitude.

2.1 Signaux sinusoïdaux

Les signaux sinusoïdaux (une sous classe des signaux périodiques) sont très importants dans le domaine du traitement du signal et de l'Electrotechnique. Ils prennent l'une des formes suivantes:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(2\pi f_0 t) \\ &= A \sin(\omega_0 t) \\ &= A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \end{aligned}$$

où f_0 (Hz) est la fréquence du signal, ω_0 (rad/s) est la pulsation du signal et T (sec) est la période du signal, avec les relations suivantes

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{f_0} \\ \omega_0 &= 2\pi f_0 \\ \omega_0 T &= 2\pi \end{aligned}$$

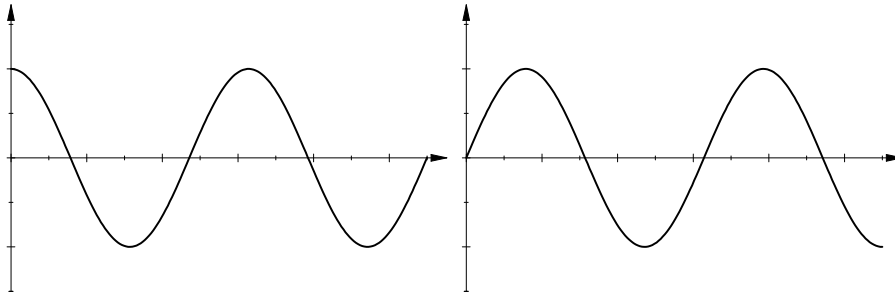


Fig. 1.2: Signaux sinusoidaux.

Dans plusieurs cas le signal peut avoir plusieurs fréquences, par exemple,

$$x(t) = 2 \cos(6\pi t) + 3 \sin(15\pi t) + 10 \sin(20\pi t)$$

Nous avons donc trois fréquences: $f_1 = 3$, $f_2 = 7.5$ et $f_3 = 10$ (c.-à-d, trois périodes $T_1 = 1/3$, $T_2 = 1/7.5 = 2/15$ et $T_3 = 1/10$). On veut déterminer la période (fréquence) du signal. Une règle générale pour effectuer ce calcul est la suivante:

1) La période du signal est égale au plus petit multiple commun de toutes les périodes, soit:

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2 = \dots = n_p T_p$$

avec n_1, n_2, \dots, n_p sont des entiers positifs.

2) La fréquence du signal est le plus grand diviseur commun de toutes les fréquence du signal.

Appliquant la règle au signal (1.15), on voit que le plus grand diviseur commun est $f_0 = 0.5$, soit $T = 2$. En utilisant la formule (1.16), on a:

$$n_1 / 3 = 2n_2 / 15 = n_3 / 10$$

soit:

$$n_1 / n_2 = 6 / 15$$

$$n_2 / n_3 = 15 / 20$$

$$n_1 / n_3 = 3 / 10$$

Si on choisi $n_2 = 15$ alors nous aurons $T = n_2 T_2 = 2$. Pour vérifier $n_1 = 6$ et $T = n_1 T_1 = 2$. Enfin, on prend $n_3 = 20$ et on a $T = n_3 T_3 = 2$.

3. Parité

Deux autres classes de signaux qui vont nous intéresser sont les signaux pairs et impairs. Les signaux pairs sont ceux qui ont une symétrie axiale sur l'axe du temps 0 (zéro). Les signaux impairs sont ceux qui ont une symétrie « à travers » le point (0,0) ou autrement dit, une symétrie centrale autour de ce point.

En d'autres termes, un signal pair est caractérisé par $x(-t) = x(t)$ et un signal impair est caractérisé par $x(-t) = -x(t)$. Par exemple le $\cos(t)$ est pair et le $\sin(t)$ est impair.

Une propriété intéressante est que l'on peut décomposer tout signal en une partie paire et une partie impaire.

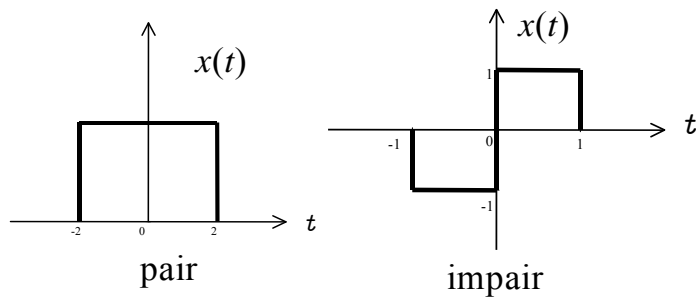


Fig. 1.3: Parité.

4. Exponentielle complexe

Une classe de signaux est fondamentale dans l'étude des systèmes. Ce sont les signaux exponentiels complexes. Ces signaux ont une forme typique telle que:

$$x(t) = Ae^{bt}$$

où b est une valeur complexe que l'on décompose en,

$$b = \alpha + j\beta$$

avec α et β réels.

De même, A peut avoir une forme complexe

$$A = A_0 e^{ja}$$

Et on exprime, en toute généralité:

$$x(t) = A_0 e^{ja} e^{(\alpha + j\beta)t}$$

Examinons le cas où A est réelle ($a = 0$) et la partie complexe de b nulle ($\beta = 0$):

$$x(t) = A_0 e^{\alpha t}$$

Le signal est une exponentielle réelle (une exponentielle au sens «courant»), qui sera croissante ou décroissante en fonction du signe de α .

Avec A réelle et b purement complexe ($\alpha = 0$), on utilise le développement trigonométrique (Euler) et on écrit $x(t)$ comme:

$$x(t) = A_0 e^{j\beta t} = A_0 (\cos(\beta t) + j \sin(\beta t))$$

$x(t)$ est alors une fonction périodique.

De manière symétrique, une fonction $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ peut s'exprimer par des exponentielles complexes;

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ &= A_0 \frac{1}{2} (e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}) \\ &= A_0 \frac{1}{2} e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + A_0 \frac{1}{2} e^{-j(\omega_0 t + \varphi)} \end{aligned}$$

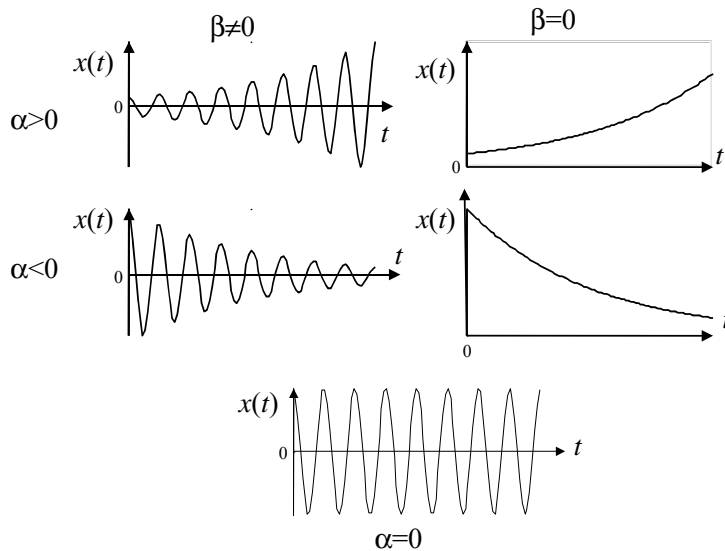
En d'autres termes, une fonction sinusoidale se décompose en une somme d'exponentielles complexes.

La parenté entre les exponentielles complexes et les sinusoides va être exploitée constamment

pendant tout le cours pour les raisons suivantes:

- 1) Nous allons voir que la réponse d'un circuit où d'un système peut être déduite de sa réponse à des signaux sinusoïdaux.
- 2) Les exp. complexes se prêtent particulièrement bien à une étude analytique des signaux et du traitement de signal.

On voit que l'exponentielle complexe cache en fait des signaux «sinusoïdaux» (i.e. \sin et \cos), qui sont, on va le voir, essentiels dans la caractérisation des systèmes.



5. Définitions

5.1 Signal

Les signaux sont des modèles mathématiques qui décrivent l'évolution dans le temps de phénomènes physiques, tel que, la température la vitesse d'une voiture, le courant électrique, etc...Signe conventionnel qui sert à transmettre une information ou forme physique d'une information véhiculée par un système.

- $v(t) = 110 \sin(100\pi t)$ une tension électrique..

- valeur d'un stock journalier

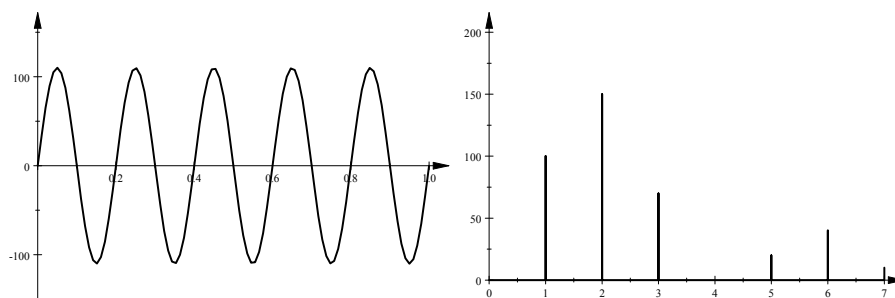


Fig. 1.4: Exemples de signaux.

5.2 Traitement

Ensemble des techniques permettant de transformer, de stocker ces informations, d'y accéder, de les combiner en vue de leur exploitation.

5.3 Classification des signaux

Les signaux peuvent être classés suivant plusieurs critères, selon leurs natures ou leurs comportements. On peut distinguer les classes suivantes:

- 1) Les signaux continus qui évoluent d'une manière continue dans le temps, et les signaux discrets qui apparaissent à des instants bien précis.
- 2) Les signaux échantillonnés dont la valeur est seulement définie pour certaines valeurs de la variable d'entrée. C'est par exemple le cas lorsque l'on observe des signaux électriques, par exemple avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition sur PC. On appellera souvent cette classe signaux «discrets», rappelant ainsi qu'ils ne sont définis qu'à des valeurs discrètes de la valeur d'entrée.
- 3) Les signaux déterministes dont on peut prédire l'évolution dans le temps (ils sont tous créés par des causes physiques précises, bien que parfois non mesurables), on réserve en général le qualificatif de déterministe pour les signaux dont on peut expliquer l'allure temporelle.
- 4) Les signaux stochastiques (aléatoires) dont l'évolution est imprévisible, et qu'on ne peut caractérisés que d'une manière statistique.

Un signal aléatoire est un signal variable qui peut dépendre du temps ou en être indépendant. Les variations de ce signal sont imprévisibles et liées au hasard. Par contre, sur une certaine plage d'observation, il est possible de tirer des renseignements sur un signal aléatoire. La densité de probabilité d'un signal aléatoire permet d'en déterminer les moments (valeur moyenne, variance et moments d'ordre supérieur) qui permettrons de caractériser le signal.

- 5) Les signaux périodiques et les signaux non périodiques.

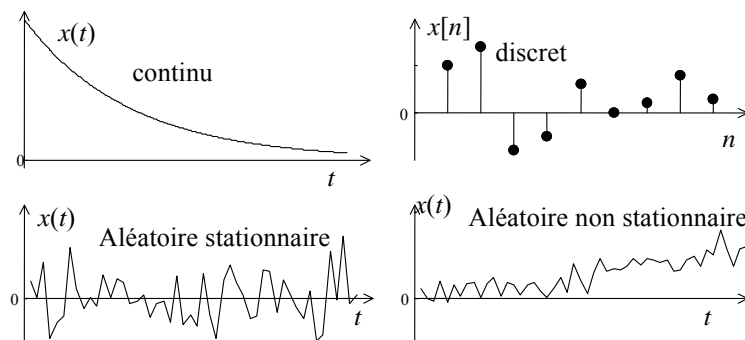


Fig. 1.5: Différents classes de signaux.

6. Grandeurs associées aux signaux

Les signaux peuvent être définis par un certain nombre de grandeurs caractéristiques dont il convient de connaître avec précision, la définition et la signification physique.

6.1 Valeur instantanée

La valeur instantanée d'un signal $x(t)$, permet de caractériser le signal à un instant donné. Cette notion de valeur instantanée s'applique quel que soit le type de signal. Il est évident que la connaissance d'une seule valeur instantanée, ne suffit pas à définir complètement un signal.

La valeur instantanée d'un signal n'est pas une grandeur physiquement mesurable.

6.2 Valeur moyenne

La notion de valeur moyenne temporelle d'un signal s'applique aux signaux variables. La valeur moyenne d'un signal, sur un intervalle de temps T , est définie par :

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

6.3 Valeur efficace

La notion de valeur efficace d'un signal, ou valeur quadratique moyenne, s'applique aux signaux variables. Le carré de la valeur efficace d'un signal, sur un intervalle de temps T , est définie par :

$$x_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$$

La valeur efficace d'un signal est une grandeur physiquement mesurable. Nous verrons l'importance de la notion de valeur quadratique moyenne dans la théorie du bruit.

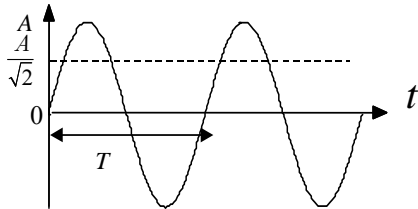


Fig. 1.6: Valeur efficace d'un signal sinusoïdal.

7. Opérations sur les signaux

Plusieurs opérations peuvent être effectuées sur un signal, comme la translation (décalage), l'amplification ou l'atténuation, le rabattement. Pour voir ça, considérons le signal suivant.

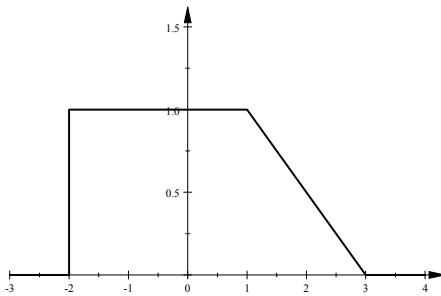


Fig. 1.7: signal type.

7.1 Rabattement

Le rabattement consiste à inverser l'échelle de temps pour avoir le signal $x(-t)$.

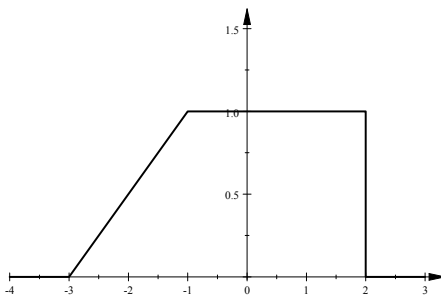


Fig. 1.8: Rabattement.

Pour un signal pair: $x(-t) = x(t)$, et pour un signal impair: $x(-t) = -x(t)$.

7.2 Amplification et Atténuation

C'est la multiplication du signal par un facteur A pour avoir le signal $Ax(t)$. Si $|A| < 1$ c'est une atténuation, et si $|A| > 1$ c'est amplification.

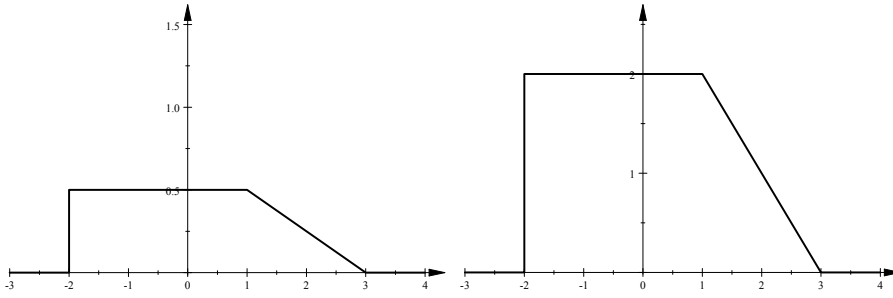


Fig. 1.9: Atténuation et amplification.

7.3 Translation

Consiste à déplacer le signal sur l'échelle du temps pour avoir $x(t - t_0)$. Si t_0 est positif la translation est dans le sens positif, et vice versa.

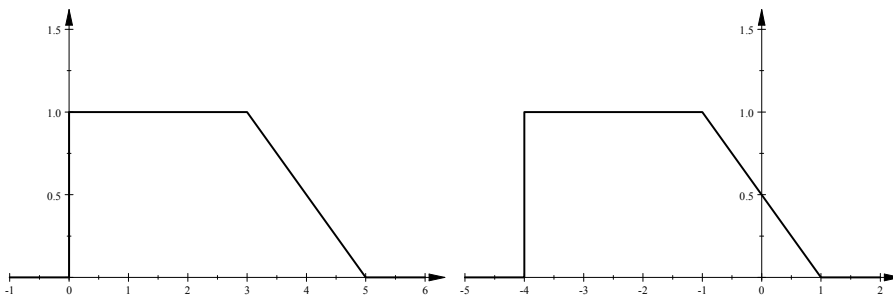


Fig. 1.9: Décalage.

7.4 Sinus cardinal

C'est une fonction très importante dans les calculs effectués en traitement du signal. La fonction sinus cardinal est définie par:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

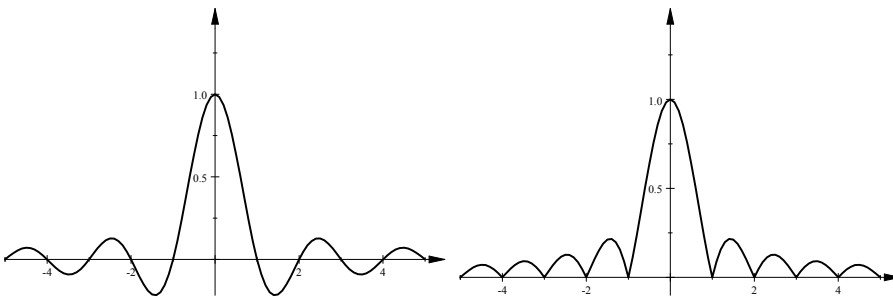


Fig. 1.10: Sinus cardinal.

8. Signaux singuliers

Les signaux singuliers sont des signaux idéaux utilisés pour approcher des phénomènes physiques. Les signaux singuliers sont un outil très important dans les calculs effectués en traitement du signal.

8.1 Fonction signe

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

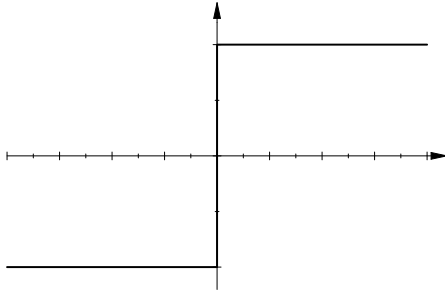


Fig. 1.11: la fonction signe.

8.2 Echelon

L'échelon unité est défini par

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

avec les propriétés suivantes:

$$u(t) + u(-t) = 1$$

$$u^2(t) = u(t)$$

L'échelon n'est pas défini à l'origine.

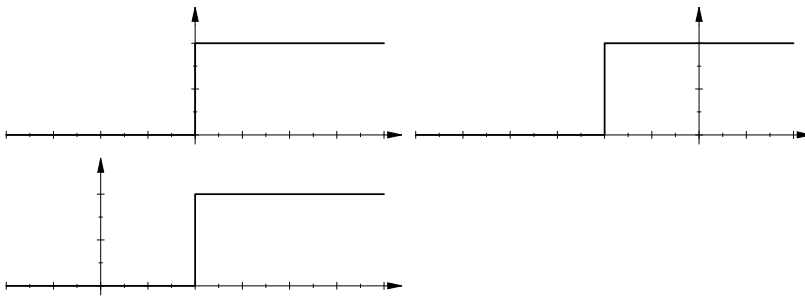


Fig. 1.12: Echelon unité.

Beaucoup d'autres signaux peuvent être définis comme les intégrales ou les dérivées de l'échelon..

8.3 Rampe

La rampe est définie par

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

ou par l'intégrale:

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(v) dv = tu(t)$$

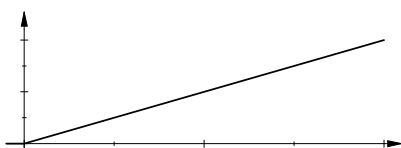


Fig. 1.13: Rampe.

8.4 Parabole

Ce signal est défini par:

$$quad(t) = \int_{-\infty}^t r(v)dv = \frac{t^2}{2!} u(t)$$

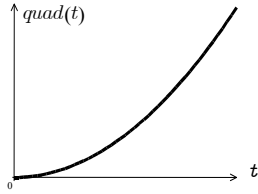


Fig. 1.14: Fonction quadratique.

8.5 Porte (rectangle)

Le rectangle est défini par:

$$rec_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

Le rectangle peut être aussi écrit en fonction de l'échelon, soit:

$$\begin{aligned} rec_a(t) &= u\left(t + \frac{a}{2}\right) - u\left(t - \frac{a}{2}\right) \\ &= u\left(t + \frac{a}{2}\right) \cdot u\left(-t + \frac{a}{2}\right) \end{aligned}$$

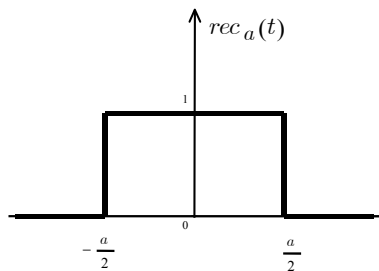


Fig. 1.15: Fonction rectangle.

8.5 Triangle

Défini par:

$$tri_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{si } |t| \leq a \\ 0 & \text{si } |t| > a \end{cases}$$

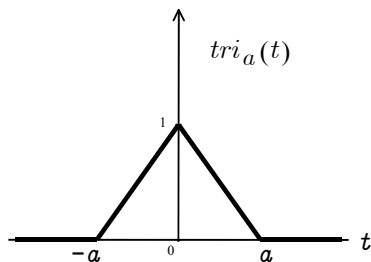


Fig. 1.16: Fonction triangle.

8.6 Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac est définie par:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et l'aire de l'impulsion est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

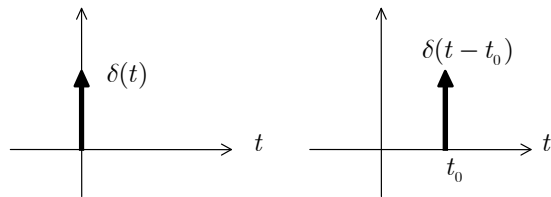


Fig. 1.17: Impulsion de Dirac.

L'impulsion de Dirac peut être vue comme la limite de plusieurs signal, par exemple:

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \text{rec}_a(t)$$

pour vérifier, on calcule l'aire de (1.33)

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} \text{rec}_a(t) dt = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a} dt = 1$$

On représente le signal (1.33) pour plusieurs valeurs de a .

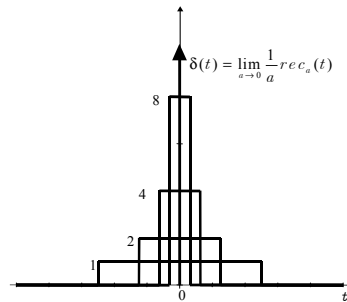


Fig. 1.18: L'impulsion de Dirac comme limite d'une fonction rectangle.

Définition formelle. La fonction de Dirac est définie par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0)$$

avec $x(t)$ continu à l'origine.

Propriétés

1) On peut montrer que

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

Si $a = -1$ nous aurons $\delta(-t) = \delta(t)$ se qui implique que $\delta(t)$ est pair.

2) Décalage:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

si $t_1 < t_0 < t_2$.

Pour prouver le résultat (1.37), on pose $\lambda = t - t_0$ d'où $d\lambda = dt$, on remplaçant dans (1.35), on a :

$$\int_{t_1-t_0}^{t_2-t_0} x(\lambda + t_0)\delta(\lambda)d\lambda = x(t_0)$$

3) Sélection: ou échantillonnage,

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

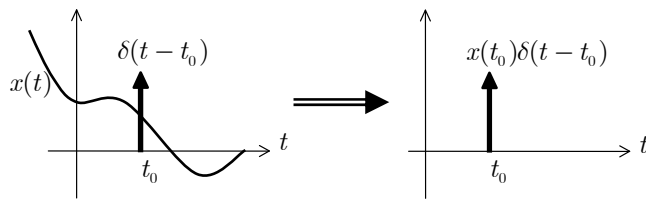


Fig. 1.19: Propriété de sélection.

4) Dérivation:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x(t)\delta(t - t_0)] &= \dot{x}(t)\delta(t - t_0) + x(t)\dot{\delta}(t - t_0) \\ &= \dot{x}(t_0)\delta(t - t_0) + x(t)\dot{\delta}(t - t_0) \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [x(t)\delta(t - t_0)] dt = x(t)\delta(t - t_0) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

En utilisant (1.40) et (1.41), nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t_0)\delta(t - t_0)dt + \int_{t_1}^{t_2} x(t)\dot{\delta}(t - t_0)dt &= 0 \\ \dot{x}(t_0) + \int_{t_1}^{t_2} x(t)\dot{\delta}(t - t_0)dt &= 0 \end{aligned}$$

Enfin, nous avons:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\dot{\delta}(t - t_0)dt = -\dot{x}(t_0)$$

Généralisation :

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta^{(n)}(t - t_0)dt = (-1)^{(n)} x^{(n)}(t_0)$$

$\dot{\delta}(t)$ est appelée doublet unité.

8.7 Peigne de Dirac

C'est une somme infinie d'impulsions de Dirac régulièrement espacées de T

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

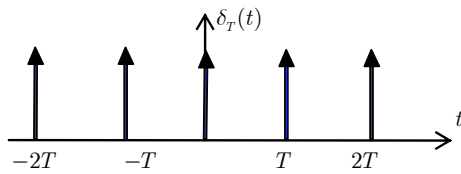


Fig. 1.20: Peigne de Dirac.

Propriété:

$$x(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

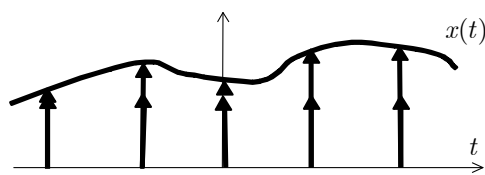


Fig. 1.21: Propriété d'échantillonnage.

9. Représentation des signaux est dérivation

Les signaux singuliers sont très utiles dans la représentation des signaux de formes complexes..

Le signal de la fig.1.22 peut être vu comme une porte $x(t) = rec_2(t - 2)$ ou à l'aide des échelons comme

$$x(t) = u(t - 1) - u(t - 3)$$

ou encore

$$x(t) = u(t - 1) * u(-t - 3)$$

Un deuxième exemple est celui de la fig.1.22. Se signal peut être représenté comme:

$$x(t) = r(t + 1) - r(t) + u(t + 2) - r(t - 4) + r(t - 6)$$

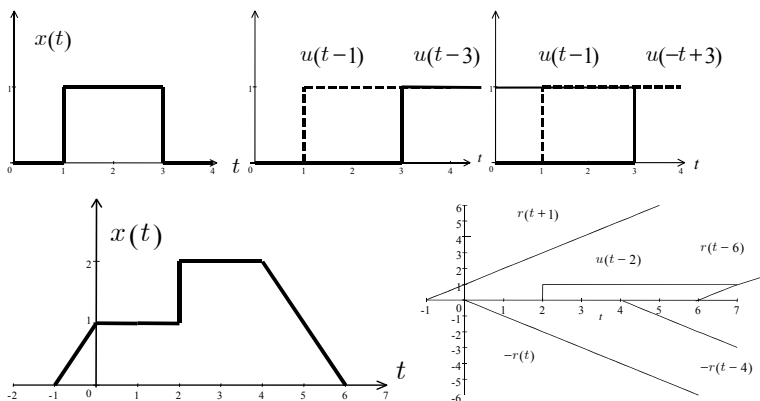


Fig. 1.22: représentation des signaux analytique par les signaux singuliers.

La représentation par signaux singuliers est très utile dans le calcul des dérivées d'ordre supérieur, pour les signaux qui n'ont pas de dérivées dans le sens classique. Elle est aussi très utile dans le calcul des transformées de Fourier (chapitre 2).

Soit à calculer la dérivée d'ordre 1 du premier signal (fig. 1.22). Nous avons:

$$\dot{x}(t) = \delta(t - 1) - u(t - 3)$$

Calculons, maintenant la dérivée d'ordre 2 du deuxième signal (fig. 1.22):

$$\dot{x}(t) = u(t + 1) - u(t) + \delta(t + 2) - u(t - 4) + u(t - 6)$$

et

$$\ddot{x}(t) = \delta(t + 1) - \delta(t) + \dot{\delta}(t + 2) - \delta(t - 4) + \delta(t - 6)$$

10. Energie et puissance des signaux

Energie totale :

L'énergie d'un signal est donnée par

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

et la puissance moyenne est donnée par

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

- 1) Si $E < \infty$ alors $x(t)$ est signal à énergie finie (alors $P = 0$). Ces signaux sont dits de carré intégrable (sommable), leur puissance moyenne est nulle. Dans cette catégorie entrent les signaux transitoires.
- 2) Si $P < \infty$ alors $x(t)$ est signal à puissance moyenne finie. Les signaux périodiques, quasi périodiques, et signaux aléatoires permanents. Ces signaux satisfont à la condition suivante $|x(t)| < \infty$

Ces signaux ne sont pas physiquement réalisables puisqu'ils devraient exister d'une manière permanente. Ils constituent toutefois des modèles idéalisés commodes à utiliser.

Soit le signal $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$, alors l'énergie est

$$\begin{aligned} E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 e^{-2\alpha t} u(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T/2} A^2 e^{-2\alpha t} dt \\ &= \frac{A^2}{2\alpha} \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{T/2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2\alpha} (e^{-\alpha T} - 1) = \frac{A^2}{2\alpha} \end{aligned}$$

On peut montrer que la puissance moyenne est nulle,

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2 (e^{-\alpha T} - 1)}{2\alpha T} = 0$$

Soit le signal $x(t) = Au(t)$, l'énergie est:

$$E = \int_0^{T/2} A^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} A^2 \frac{T}{2} = \infty$$

La puissance moyenne est:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 u(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A^2 dt = \frac{A^2}{2}$$

C'est un signal à puissance moyenne finie.