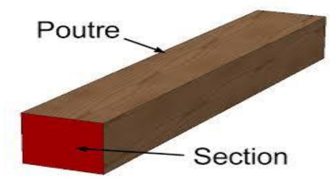
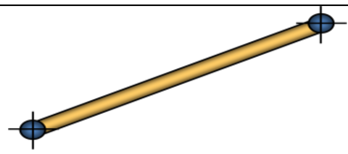
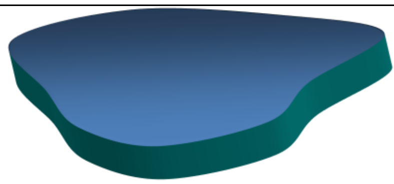
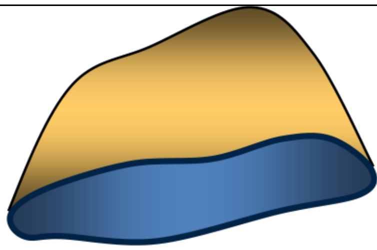
1.1. INTRODUCTION

La résistance des matériaux est la mécanique des solides déformables. Elle permet de :

- Caractériser les matériaux ;
- Dimensionner une pièce à partir des efforts qu'elle supporte ;
- Déterminer la déformation d'une pièce à partir des efforts qu'elle supporte ;
- Déterminer les efforts maximums que peut supporter une pièce.

1.2. CLASSIFICATION DES SOLIDES

***Poutre* :** on appelle poutre un corps qui a la caractéristique essentielle d'avoir une dimension nettement plus grande que les deux autres. Une poutre est donc une *structure linéaire*, qui peut être identifiée avec son axe : c'est un *corps*	
barre : c'est une poutre droite, normalement à section constante, qui a la particularité d'avoir des rotules aux extrémités.	
Plaque : on appelle plaque un corps plan qui a une dimension, l'épaisseur, beaucoup plus petite que les deux autres. Une plaque est donc une structure plane qui peut être identifiée avec son plan moyen ; c'est un corps bidimensionnel. Normalement, les plaques ont une épaisseur constante.	
Coque : on appelle coque un corps qui, comme une plaque, a une dimension, l'épaisseur, beaucoup plus petite que les deux autres, mais qui n'est pas plane.	

1.3. HYPOTHESES DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX

1.3.1. Hypothèses sur le matériau

• **Continuité :** La matière est continue. Autrement, les propriétés sont des fonctions continues de l'espace, les discontinuités microscopiques dues à la nature des matériaux de construction (grains,mailles…) sont négligées.

• **Homogénéité :** On admettra que tous les éléments du matériau, aussi petits soient-ils, ont une structure identique. Ses propriétés sont identiques en chaque point.

• **Isotropie :** On admettra, qu'en tous les points et dans toutes les directions autour de ces points, les matériaux possèdent les mêmes propriétés mécaniques.

1.3.2. Hypothèses sur la géométrie - Hypothèse de la poutre

On utilise le modèle de la poutre pour étudier la RDM (Fig. 1.1).

Définition de la poutre

Une poutre est un solide engendré par une surface plane (Σ) dont le centre G décrit une courbe appelée ligne moyenne. Le rayon de courbure de la ligne moyenne est grand par rapport aux dimensions de la section droite (Σ).

La section droite (Σ) de centre de surface G est constante ou varie progressivement.

- La poutre a une grande longueur par rapport aux dimensions transversales.
- La poutre possède un plan de symétrie.
- Les points disposés de façon identique sur les sections droites constituent des lignes appelées fibres (Fig. 1.1).
- La ligne moyenne est aussi appelée fibre neutre.
- Lorsque la ligne moyenne est une droite, alors la poutre est appelée poutre droite (Fig. 1.2).
- Les sections droites des poutres étudiées ont un plan de symétrie et qu'elles sont chargées dans ce plan.

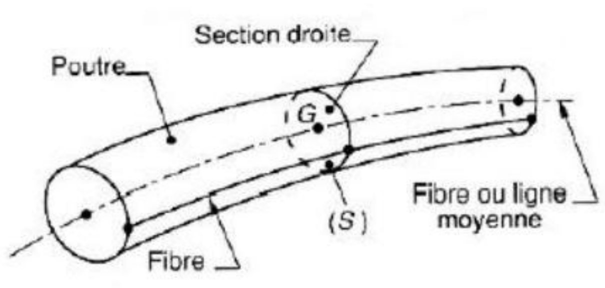


Fig. 1.1*- Modèle de poutre.*

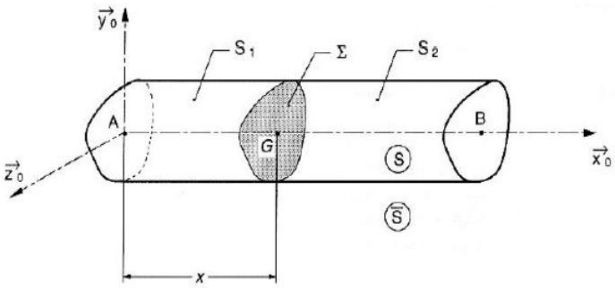


Fig. 1.2*- Poutre droite.*

1.3.3. Hypothèses sur les déformations

On fera l'hypothèse que les déformations sont petites par rapport à toutes les dimensions de la poutre. Ainsi, on assimilera la géométrie en configuration déformée à la géométrie en configuration non déformée (Fig. 1.4).

Les efforts sont donc considérés invariants en dépit de la déformation des poutres.

1.3.4. Hypothèses de Navier-Bernoulli

- Les sections planes, normales aux fibres avant déformation restent planes et normales aux fibres après déformation.
- Les sections droites normales à la fibre neutre restent donc perpendiculaires à la fibre neutre après déformation. Si l'on connaît la déformée de la fibre neutre, on peut donc en déduire le déplacement de n'importe quel point de la poutre. Dans la suite, on ne représentera donc que la fibre neutre pour représenter une poutre (Fig. 1.3).

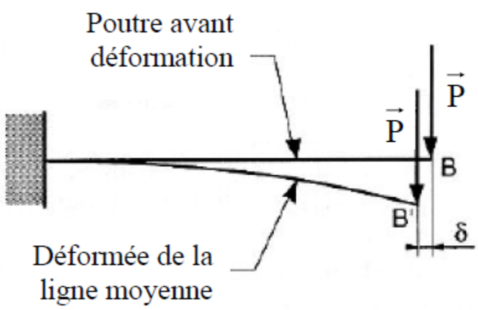


Fig. 1.3*- Poutre droite déformée.*

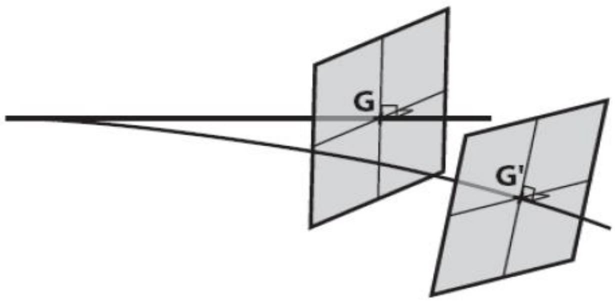


Fig. 1.4*- Schématisation de l'hypothèse de Navier - Bernoulli.*

1.4. CLASSIFICATION DES ACTIONS MECANIQUES OU CHARGES.

On appelle effort (ou action) extérieur appliqué à un système matériel isolé, toutes les actions mécaniques agissant sur ce système, dont l'origine est à l'extérieur du système. Ces actions sont : soit des actions mécaniques de contact ; soit des actions à distances (gravité).

Les efforts intérieurs sont les efforts que s'exercent mutuellement les différentes parties du système isolé.

1.4.1. Actions mécaniques à distance (ou volumiques)

On appelle action à distance toute action qui s'applique sur les solides ou les fluides sans contact. Comme exemples, nous citons :

- Action de la pesanteur (Poids ou pesanteur)

1.4.2. Actions mécaniques de contact (ou surfaciques)

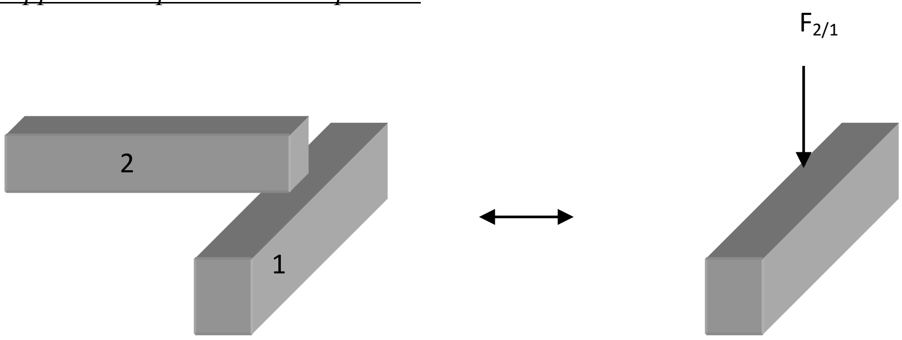
On appelle action surfacique ou action de contact, toute action mécanique qu'exercent deux solides l'un sur l'autre ou un solide et un fluide au niveau de leur surface de contact commune.

A Actions de contact ponctuelles (charges concentrées)

Si deux solides sont en contact en un point ou sur une très petite surface, l'action de contact est représentée par un vecteur force dont le point d'application est le point de contact.

Exemple : Appui d'une poutre sur une poutre.

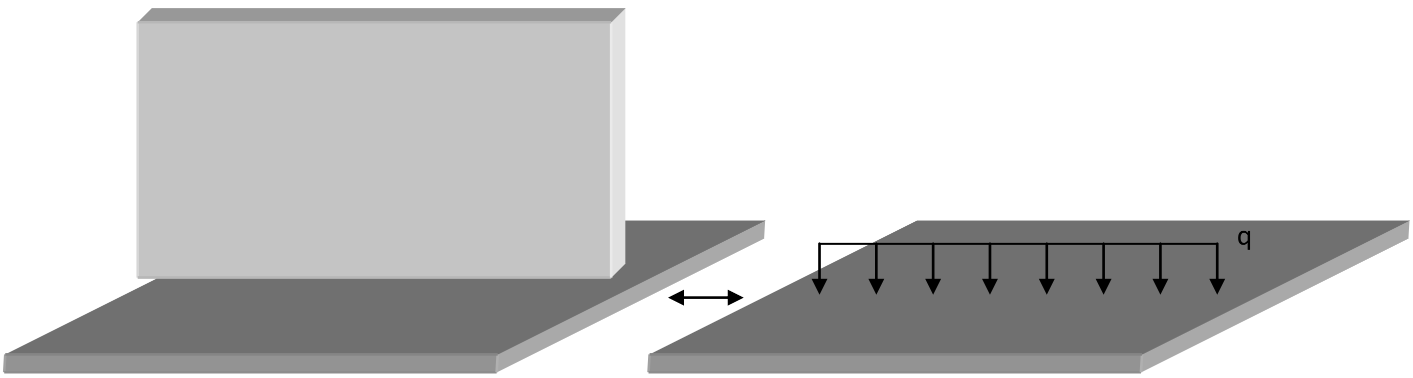
Unité : N



B Actions de contact linéiques (charges réparties)

Si deux solides sont en contact suivant une ligne, l'action est schématisée par un vecteur force q appliqué sur toute la ligne de contact.

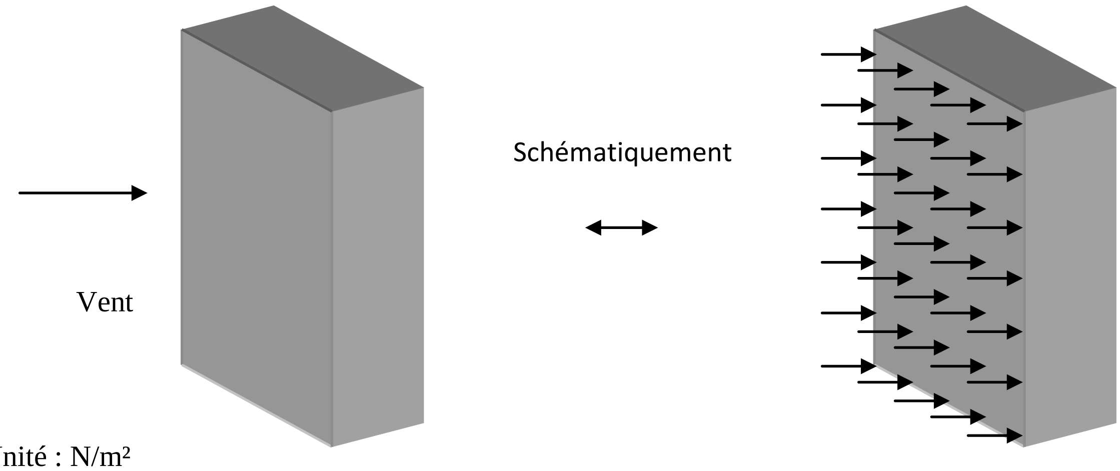
Exemple : Cloison sur plancher.



Unité : N/ml

C Actions de contact ou charges réparties sur une surface

Exemple : Vent sur mur.



Unité : N/m²

1.4.3. Types de charges et liaisons

Les actions extérieures (forces extérieures) s'appliquant sur les solides sont, au niveau mathématique, de nature différente.

1.4.4. 1. Les efforts connus

On retrouve les efforts modélisant, les actions du poids propre des éléments, les actions climatiques (vent, neige, houle) et les actions d'exploitation (poids des machines,.....)

1.4.4. 2. Les efforts inconnus

Ils sont développés par les liaisons du solide étudié avec les éléments de transfert des charges. Les liaisons servent à bloquer certains ***degrés de liberté (ddl)*** des solides.

1.5. LIAISONS ET EFFORTS DE LIAISONS

Les liaisons, pour bloquer les déplacements, génèrent des efforts inconnus appelés ***efforts de liaison***. On associera à la liaison un torseur d'efforts lié à ses caractéristiques cinématiques.

Les mouvements élémentaires possibles dans le plan sont: deux translations (Δ_x et Δ_y) ; une rotation: Ω=Ω_k.

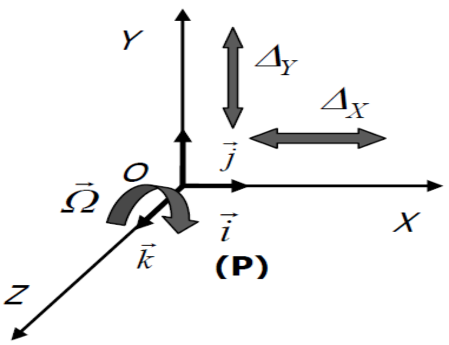


Fig. 1.5- *Liaisons.*

Les principales liaisons sont:

- L'appui simple: – 1ddl bloqué – (1 inconnue de liaison)
- L'appuidouble (articulation): – 2ddl bloqué – (2 inconnues de liaison)
- L'encastrement: – 3ddl bloqué – (3 inconnues de liaison)

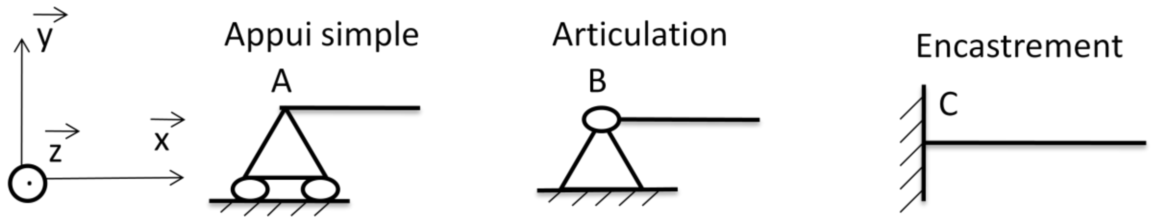


Fig. 1.6- Les principales liaisons

1.5. 1. Appui simple

L'appui simple bloque la translation dans la direction de l'appui, il permet une translation Δ**x** dans la direction perpendiculaire et une rotation **Ω** autour de l'axe perpendiculaire au plan de la liaison.

Modélisation : La modélisation d'un appui simple est schématisée sur la figure 1.7.

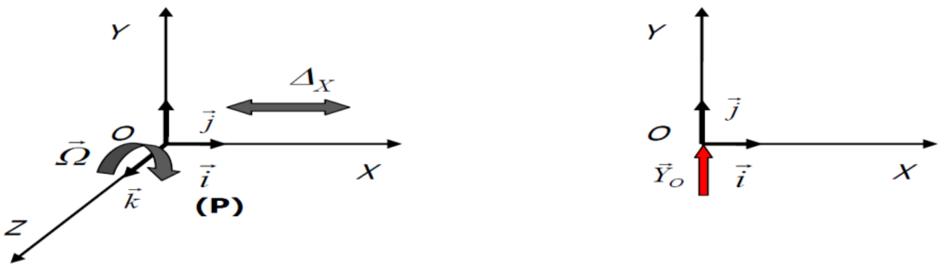


Fig. 1.7*- Schématisation d'un appui simple.*

Eléments de réduction du torseur au centre de la liaison : Le torseur au centre de la liaison s'écrit :

$$\{\vec{\tau}\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}_O = Y_O\vec{j} \\ \\ \vec{M}_O = 0\vec{k} \end{Bmatrix}$$

1.5. 2. L'appui double (articulation)

L'articulation permet de bloquer les deux translations possibles dans le plan. Elle permet donc une rotation libre **Ω** .

Modélisation : L'articulation est modélisée comme le montre la figure 1.8.

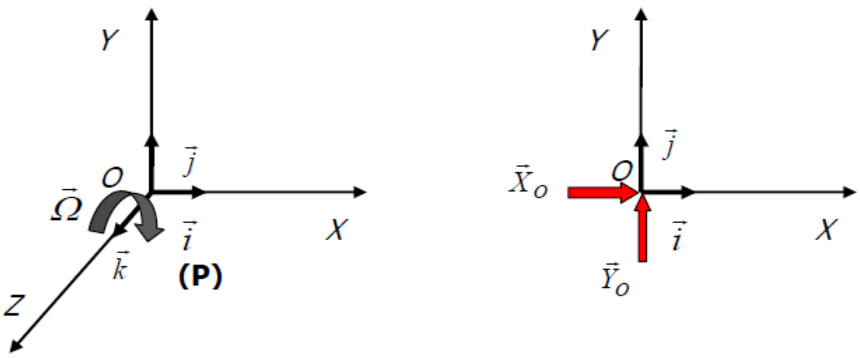


Fig. 1.8*- Schématisation d'une articulation.*

Eléments de réduction du torseur au centre de la liaison : Le torseur au centre de la liaison s'écrit:

$$\{\vec{\tau}\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}_O = X_O\vec{i} + Y_O\vec{j} \\ \\ \vec{M}_O = 0\vec{k} \end{Bmatrix}$$

1.5.3. Encastrement

Cette liaison bloque les trois degrés de liberté possibles: deux translations élémentaires et une rotation.

Modélisation : L'encastrement est modélisé comme le montre la figure 1.9.

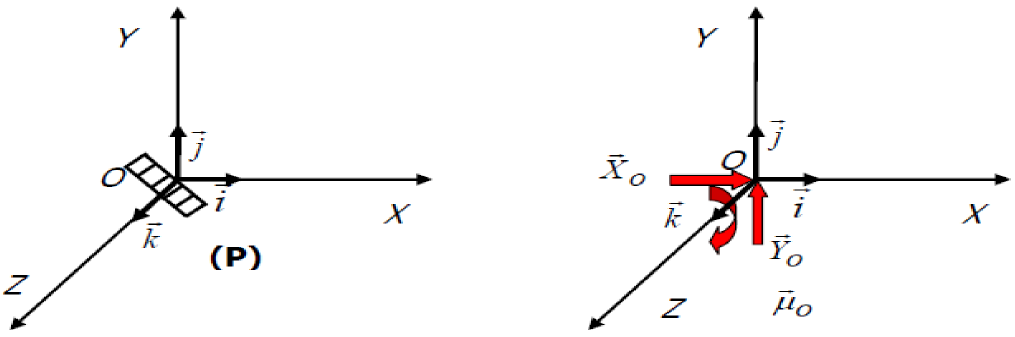


Fig. 1.9- *Schématisation d'un encastrement.*

Eléments de réduction du torseur au centre de la liaison : Le torseur au centre de la liaison s'écrit:

$$\{\vec{\tau}\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}_O = X_O\vec{i} + Y_O\vec{j} \\ \vec{M}_O = \mu_O\vec{k} \end{Bmatrix}$$

Récapitulation sur la modélisation des liaisons

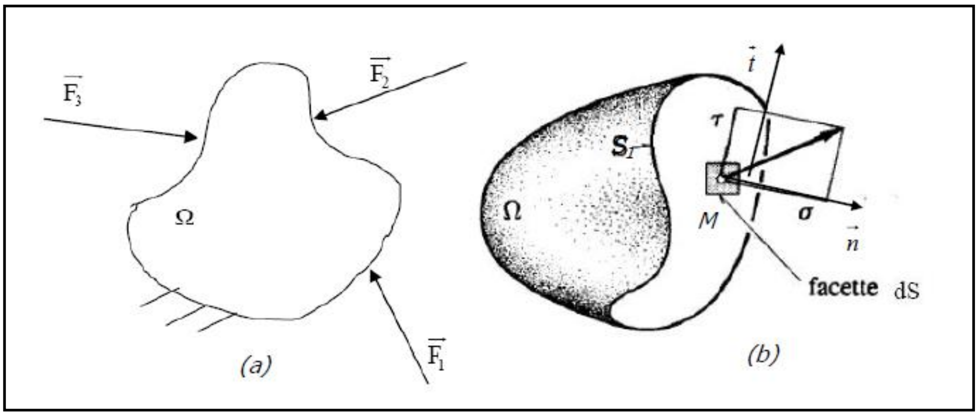
Tab. 1.1- *Représentations simplifiées des différentes liaisons.*

Modélisation	Inconnues de liaison	
appui mobile	RY	1 inconnue
appui fixe	RY, RX	2 inconnues
encastrement	RY, RX, M	3 inconnues

1.6. NOTION DE CONTRAINTE

Une contrainte est un effort par unité de surface qui s'exerce dans le matériau. Soit un solide Ω soumis à des forces (concentrées ou réparties) schématisé par la figure 1.10-a.

Fig. 1.10- *Schématisation d'un solide contraint.*



On coupe le solide Ω en deux parties S_1 et S_2. Considérons un point M entouré Par une surface ΔS. Le solide S_2 exerce une action mécanique sur le solide $S_1 \overrightarrow{\Delta F}_{S2/S1}$ que l'on peut modéliser par un effort réparti et on a:

$$\overrightarrow{\Delta F}_{S_2/S_1} = \vec{C}(M,\vec{n})\Delta S \quad (1)$$

Le vecteur $\vec{C}$(M,$\vec{n}$) est appelé vecteur contrainte au point M et de normale $\vec{n}$(où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à ΔS sortant).

Le vecteur contrainte au point M relativement à l'élément de surface ΔS orienté par sa normale extérieure $\vec{x}$, est défini par:

$$\vec{C}(M,\vec{x}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta f}}{\Delta S} = \frac{\overrightarrow{df}}{dS} \quad (2)$$

On peut décomposer le vecteur contrainte sur les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$ ($\vec{t}$ est un vecteur unitaire contenu dans le plan tangent à ΔS) (Figs. 1.10-b, 1.11) sous la forme :

$$\vec{C}(M,\vec{n}) = \sigma\vec{n} + \tau\vec{t} \quad (3)$$

σ :est appelée la contrainte normale

τ :est appelée la contrainte tangentielle.

La contrainte normale et la contrainte tangentielle s'expriment en Pa (ou MPa).

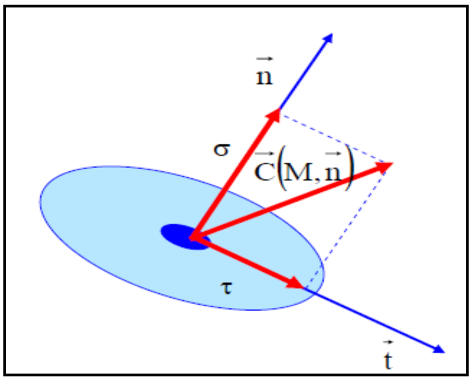


Fig. 1.11*- Décomposition du vecteur contrainte sur la normale $\vec{n}$ et le vecteur tangent $\vec{t}$.*

Lorsque la normale est $\vec{x}$, on munit le plan tangent de deux vecteurs $\vec{y}$et $\vec{z}$ tels que la base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) soit orthonormale directe (Fig. 1.12). On décompose la contrainte comme étant:

$$\vec{C}(M,\vec{n}) = \sigma_{xx}\vec{x} + \sigma_{xy}\vec{y} + \sigma_{xz}\vec{z}$$

σ_{xx} est la contrainte normale et la contrainte tangentielle est égale à: $\tau = \sqrt{\sigma_{xy}^{\ 2} + \sigma_{xz}^{\ 2}}$

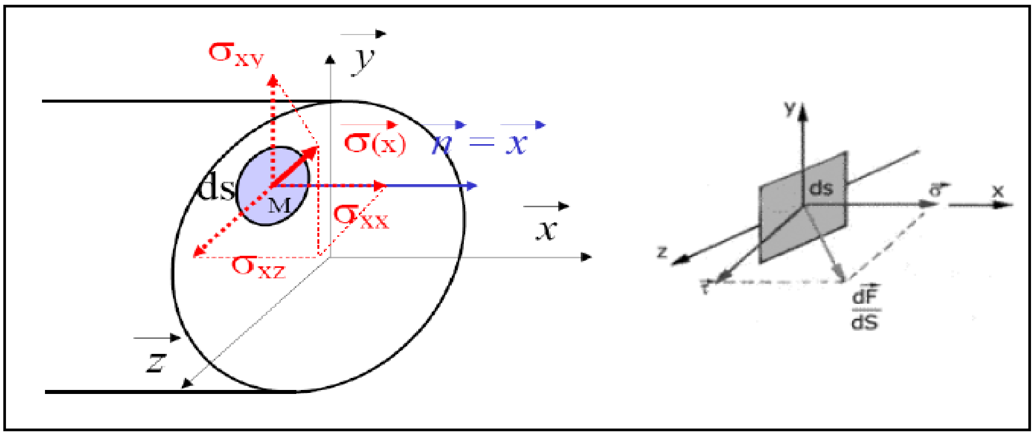


Fig. 1.12*- Décomposition du vecteur contrainte sur la base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$).*

- On peut dire en simplifiant, qu'une contrainte est une force intérieure appliquée à l'unité de surface au point donné de la section donnée.
- Expérimentalement, on définit pour chaque matériau une contrainte limite admissible, notée **[σ]**, au-delà de laquelle la pièce subit des dommages de ses caractéristiques mécaniques, dimensionnelles, voire une rupture. Le calcul de résistance des matériaux consiste à vérifier que les contraintes engendrées par les sollicitations extérieures ne dépassent pas la contrainte limite admissible par le matériau **[σ]**.
- Une contrainte est un outil de calcul; on ne peut pas l'observer directement, par contre on peut observer ses effets: études des déformations par exemple.
- La contrainte dépend de la valeur de la sollicitation et de la surface du solide. Pour une même sollicitation, la contrainte sera d'autant plus faible que la surface est grande et inversement (Fig. 1.13).

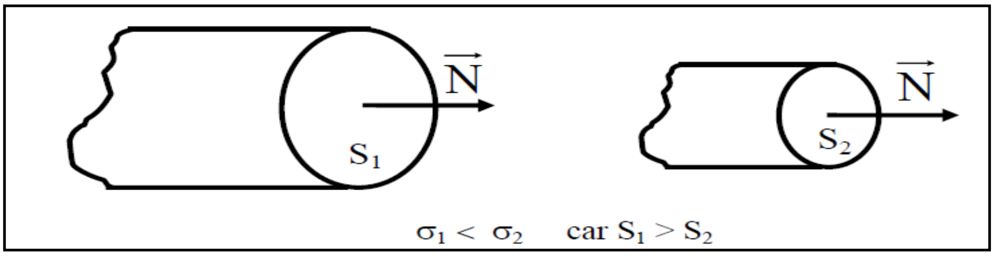


Fig. 1.13*- Comparaison de contraintes.*

1.7. NOTION DE DEFORMATION

Tout solide soumis à un effort se déforme. Les déformations résultent et varient avec les charges appliquées sur les objets. Elles sont mises en évidence par la variation des dimensions, et peuvent être élastiques ou plastiques.

1.7.1. Déformation élastique

La déformation est dite élastique si le solide reprend sa forme initiale après arrêt de l'action des forces (cas d'un ressort chargé normalement).

1.7.2. Déformation plastique

La déformation est dite plastique si le solide reste déformé après arrêt de l'action des forces (cas d'une pâte à modeler).

Limite élastique

• Aucun matériau n'est parfaitement élastique. Généralement la déformation est élastique pour les efforts suffisamment faibles, puis devient plastique à partir d'un certain seuil de contrainte $\boldsymbol{\sigma_e}$ appelé **limite élastique.**

• La limite d'élasticité est une contrainte caractéristique du matériau. Elle ne dépend ni des dimensions de la pièce ni des sollicitations qui lui sont appliquées. Dans notre cours, nous nous intéresserons exclusivement aux matériaux élastiques.

1.8. SOLLICITATIONS SIMPLES

Les sollicitations couramment rencontrées sont la traction ou la compression, la flexion, la torsion et le cisaillement. Quelques types de sollicitations simples sont donnés sur le tableau 1.2. La figure 1.14 schématise ces types de sollicitations.

Tableau 1.2: Quelques types de sollicitations

Sollicitations	Effort Normal	Effort Tranchant	Moment de Torsion	Moment de Flexion
Traction/compression	**$N \neq 0$**	$T = 0$	$M_t = 0$	$M_f = 0$
Cisaillement (1)	$N = 0$	**$T \neq 0$**	$M_t = 0$	$M_f = 0$
Torsion	$N = 0$	$T = 0$	**$M_t \neq 0$**	$M_f = 0$
Flexion pure (2)	$N = 0$	$T = 0$	$M_t = 0$	**$M_f \neq 0$**

(1) Suivant l'orientation des sollicitations, l'effort T_Y ou T_Z peut être nul.

(2) Suivant l'orientation des sollicitations, le moment Mf_Y ou Mf_Z peut être nul.

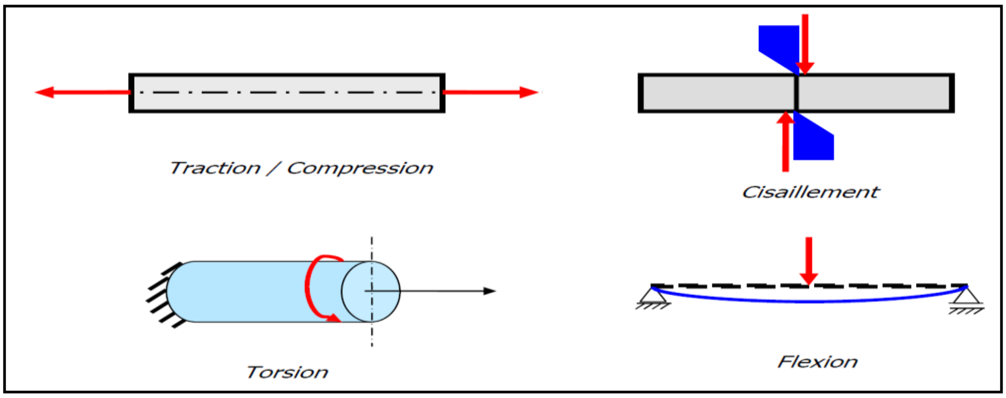


Fig. 1.14*- Poutre soumise à une sollicitation simple.*

1.9. NOTION D'EFFORT INTERIEUR

Les efforts intérieurs en un point G de la ligne moyenne d'une poutre sont les composantes des éléments de réduction *du torseur des efforts intérieurs*. Ces efforts intérieurs prennent les notations suivantes (Fig. 1.15):

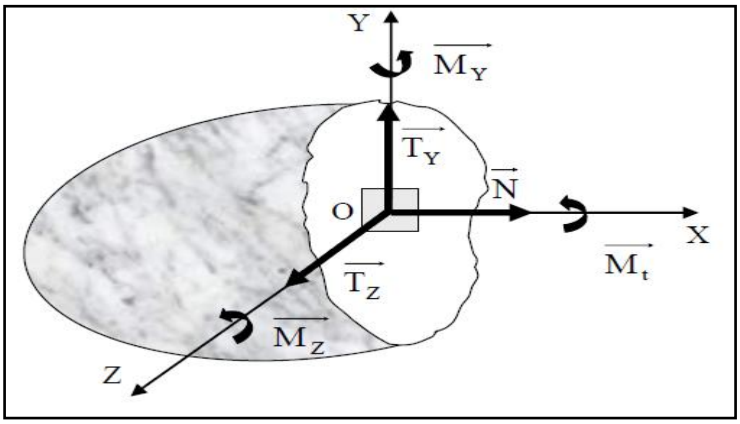


Fig. 1.15*- Efforts intérieurs en un point de la ligne moyenne d'une poutre.*

N : est l'effort normal (dans la direction $\vec{x}$)

$\boldsymbol{T_Y}$: est l'effort tranchant dans la direction $\vec{y}$

$\boldsymbol{T_z}$: est l'effort tranchant dans la direction $\vec{z}$

$\vec{T} = T_Y\vec{y} + T_z\vec{z}$: est l'effort tranchant

$\boldsymbol{M_t}$: est le moment de torsion (autour de l'axe $\vec{x}$)

$\boldsymbol{M_y}$: est le moment de flexion ou fléchissant (autour de l'axe $\vec{y}$)

$\boldsymbol{M_z}$: est le moment de flexion ou fléchissant (autour de l'axe $\vec{z}$)

$\vec{M} = M_Y\vec{y} + M_Z\vec{z}$: est le moment de flexion

1.10. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (PFS)

Soit un solide (S) soumis à un système de forces extérieures (directement appliquées+ réactions d'appuis) modélisé par le torseur $\{\overrightarrow{F}_{ext}\}$. (S) est en équilibre si et seulement si: $\{\overrightarrow{F}_{ext}\} = (\vec{o})$

autre écriture :

$$(S)\ en\ équilibre \Leftrightarrow \begin{cases} \sum \overrightarrow{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \overrightarrow{M}_{\vec{F}_{ext/M}} = \vec{0} \end{cases}$$

1.9.1. Equations d'équilibre

Dans le plan :

1/$\sum$ F(x) = 0

2/$\sum$ F(y) = 0

3/$\sum$ M(z) = 0

3 équations de la statique $\Rightarrow$ 3 inconnues.

Dans l'espace :

1/$\sum$ F(x) = 0	**4/**$\sum$ M(x) = 0
2/$\sum$ F(y) = 0	**5/**$\sum$ M(y) = 0
3/$\sum$ F(z) = 0	**6/**$\sum$ M(z) = 0

6 équations de la statique $\Rightarrow$ 6 inconnues.

1.10.2. Résolution d'un problème de statique :

Etablir le schéma mécanique

Un schéma mécanique est un schéma modélisé (simplifié) de la structure sur lequel seules apparaissent les forces extérieures agissant directement sur le système.

A Modéliser le système :

Consiste à simplifier le dessin du système tout en gardant statiquement équivalent :

- Garder la forme générale du solide (ou les solides) et le représenter par sa fibre moyenne.
- Schématiser les différentes liaisons.

B Isoler le système matériel à étudier :

- "couper "au niveau des liaisons du système à étudier avec l'extérieur
- remplacer les liaisons coupées par les actions mécaniques associées.

C Ajouter les actions extérieures :

- représenter les actions extérieures (charges d'exploitation, charges permanentes) par des vecteurs forces (charges ponctuelles, charges réparties) ou des vecteurs moments.
- indiquer toutes les cotes nécessaires.

***) Faire le bilan**

- Faire le bilan des inconnues (I)
- Faire le bilan des équations possibles (E) dans notre exemple :

Si : I $\leq$ E résoluble.

I > E non résoluble.

Remarque :

a/ Actions extérieures (à un système) : Actions directement appliquées sur le système (dont poids) et actions des liaisons coupées

b/ Les coupures devront être choisies de façon à faire apparaître les actions recherchées (⇒ choix de l'élément à isoler).

Exemple :

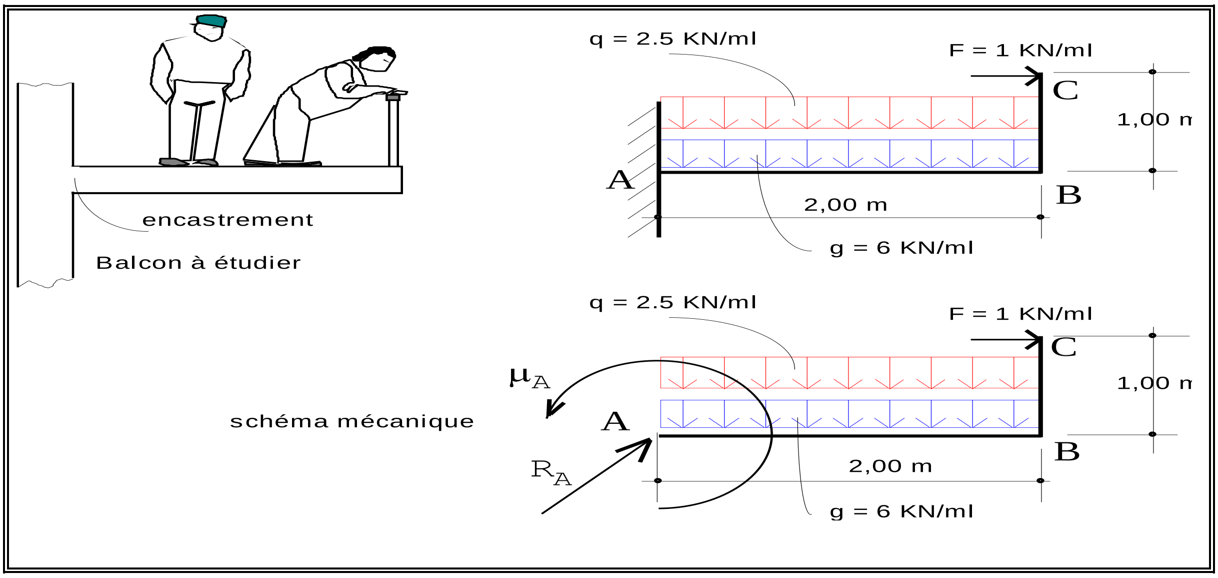


Fig. 1.16-

Dans cet exemple :g charge permanente : poids propre.

q charge d'exploitation : poids des personnes.

F charge d'exploitation horizontale.

1.11. NOTION DE COUPURE :

Considérons une poutre droite en équilibre soumise à des efforts extérieurs quelconques Fi et à des réactions de liaison quelconque Ri.

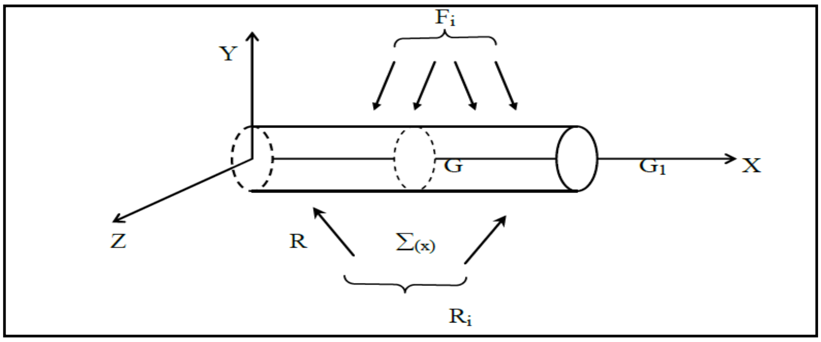


Fig. 1.18-Notion de coupure

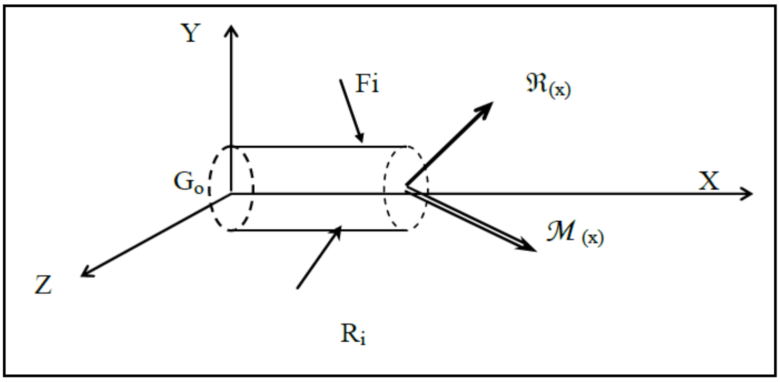
Et effectuons par la pensée ***une coupure fictive*** à l'abscisse x que nous noterons $\sum_{(x)}$. Isolons à présent le tronçon (1) située à gauche de la section fictive $\sum_{(x)}$.

Le tronçon est en équilibre sous l'action :

- des forces extérieures qui lui sont appliquées ;
- des éventuelles actions de liaison ;
- des forces que le tronçon de droite (2) exerce sur (1). (Ces forces se développent à l'intérieure de la matière).

Nous pouvons exprimer ces « forces intérieures » sous la forme d'un torseur, écrit au centre de gravité de la section $\sum_{(x)}$. Nous adopterons donc la représentation suivante :

Fig. 1.19-



1.12.1. Convention de signe :

À ce stade du calcul, les sollicitations N, T(V) et M sont inconnues ; c'est pourquoi nous les représentons par convention par un vecteur orienté dans le sens positif des axes.

Cela nous conduit à définir un sens positif pour les couples et le moment fléchissant portés par **z**. Nous conviendrons que ce sens positif est le sens ***trigonométrique direct*** :

- Il peut être plus facile d'appliquer le principe fondamental au tronçon de droite(Fig. 1.20). D'après les conventions que nous avons adoptées et en vertu du ***théorème des actions réciproques***, nous représenterons le système à étudier de la façon suivante :

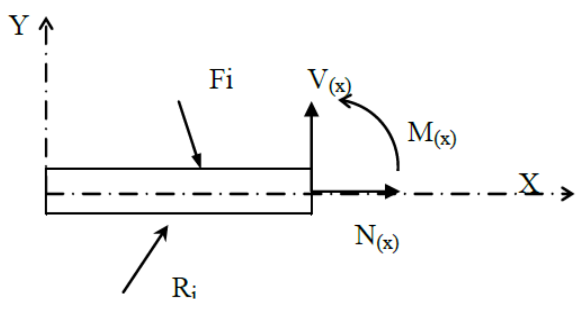


Fig. 1.19*-cas du tronçon gauche*

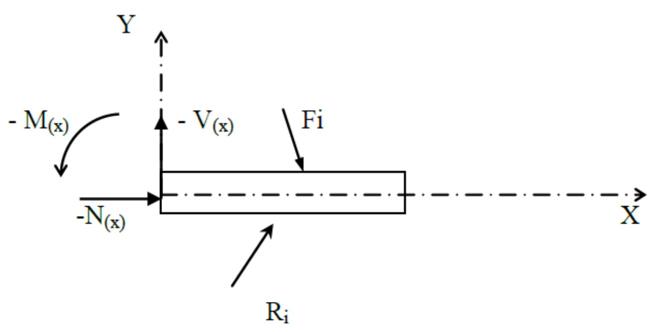


Fig. 1.20*-cas du tronçon droite*

- Connaissant les sollicitations dans une section quelconque, il suffit alors de faire varier **x** le long de la poutre pour connaître les sollicitations dans toutes les sections. On obtient alors des diagrammes des sollicitations N, T(V) et M en fonction de x.

1.12.2. Tracé des diagrammes :

Pour étudier la structure on procède comme suit :

- faire la représentation mécanique de la structure sans oublier de mettre les actions et les réactions (suivant le type d'appui) ;

- appliquer le PFS pour déterminer les réactions d'appuis ;

- faire la coupure pour chaque intervalle (on appelle intervalle, la zone dans laquelle on a le même chargement), et écrire le torseur à gauche ou à droite des sollicitations.

- tracer les diagrammes des sollicitations en fonction des équations déjà trouvées.

1.13. SYSTEME ISOSTATIQUE, SYSTEME HYPERSTATIQUE, MECANISME

Soit **k** le nombre d'équations d'équilibre (6 dans l'espace, 3 dans le plan). Soit **r** le nombre d'inconnues (résultantes de liaison et moments de liaison).

Si r = k : Les actions de liaison sont déterminées par les équations de la statique. La structure est dite **isostatique** (Fig. 1.21-a).

Si r> k : Le nombre d'équations d'équilibre est alors insuffisant à la détermination des actions de liaison inconnues. La structure est dite **hyperstatique** de degré r – k (Fig. 1.21-b).

Si r < k : l'équilibre est impossible en général. Le système est **hypostatique (mécanisme)**. L'étude des mécanismes déborde du cadre de la résistance des matériaux (Fig. 1.21-c).

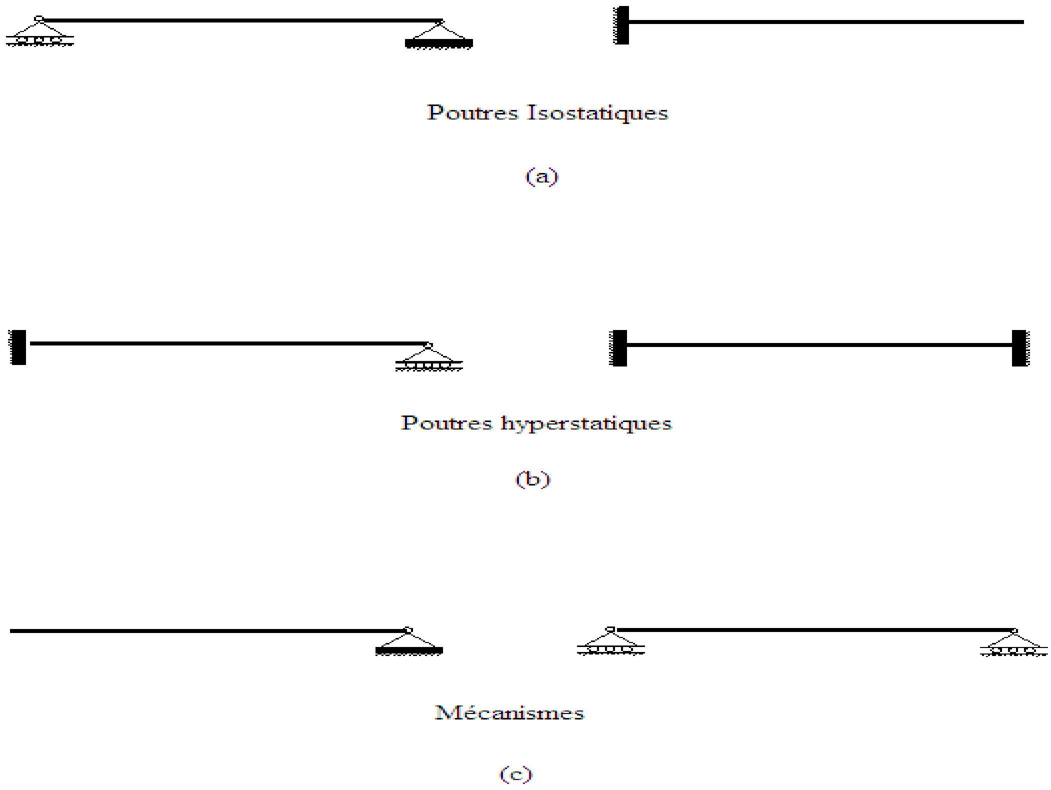


Fig. 1.21- Exemples de Poutres : (a) isostatiques, (b) hyperstatiques, (c) mécanismes.