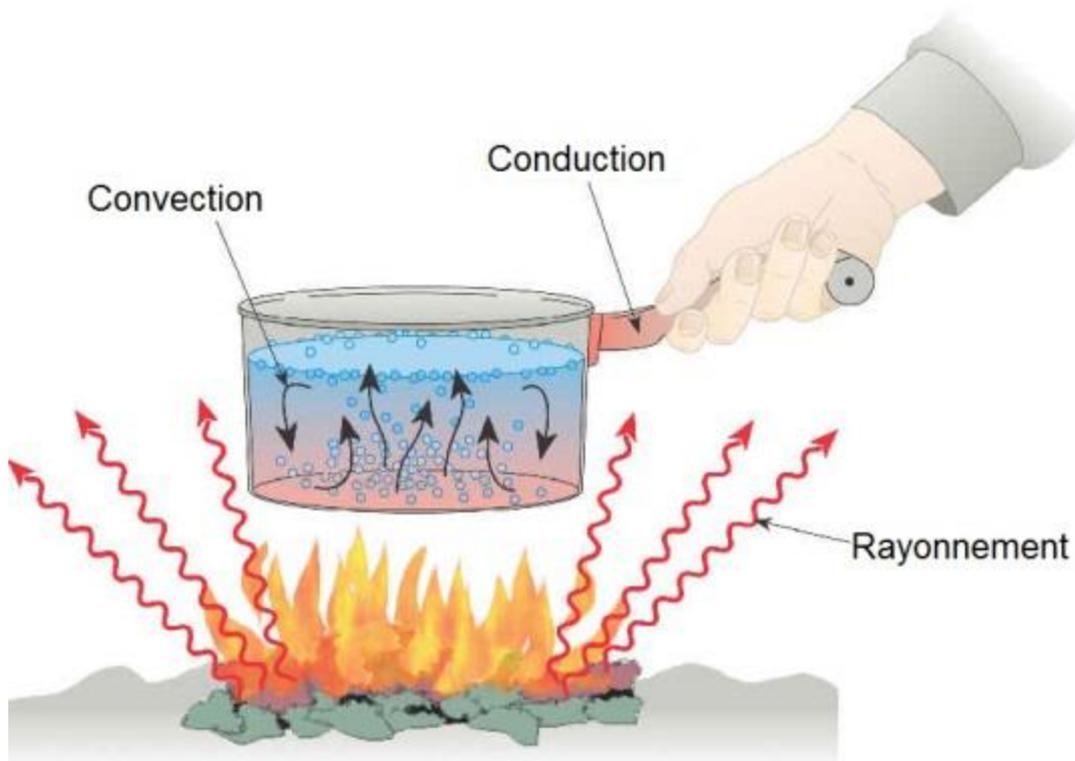


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences et Sciences Appliquées Ain Beida
Département de Génie Mécanique

« Cours Transfert Thermique »

Destiné aux étudiants
3^{èmes} Année Licence Energétique

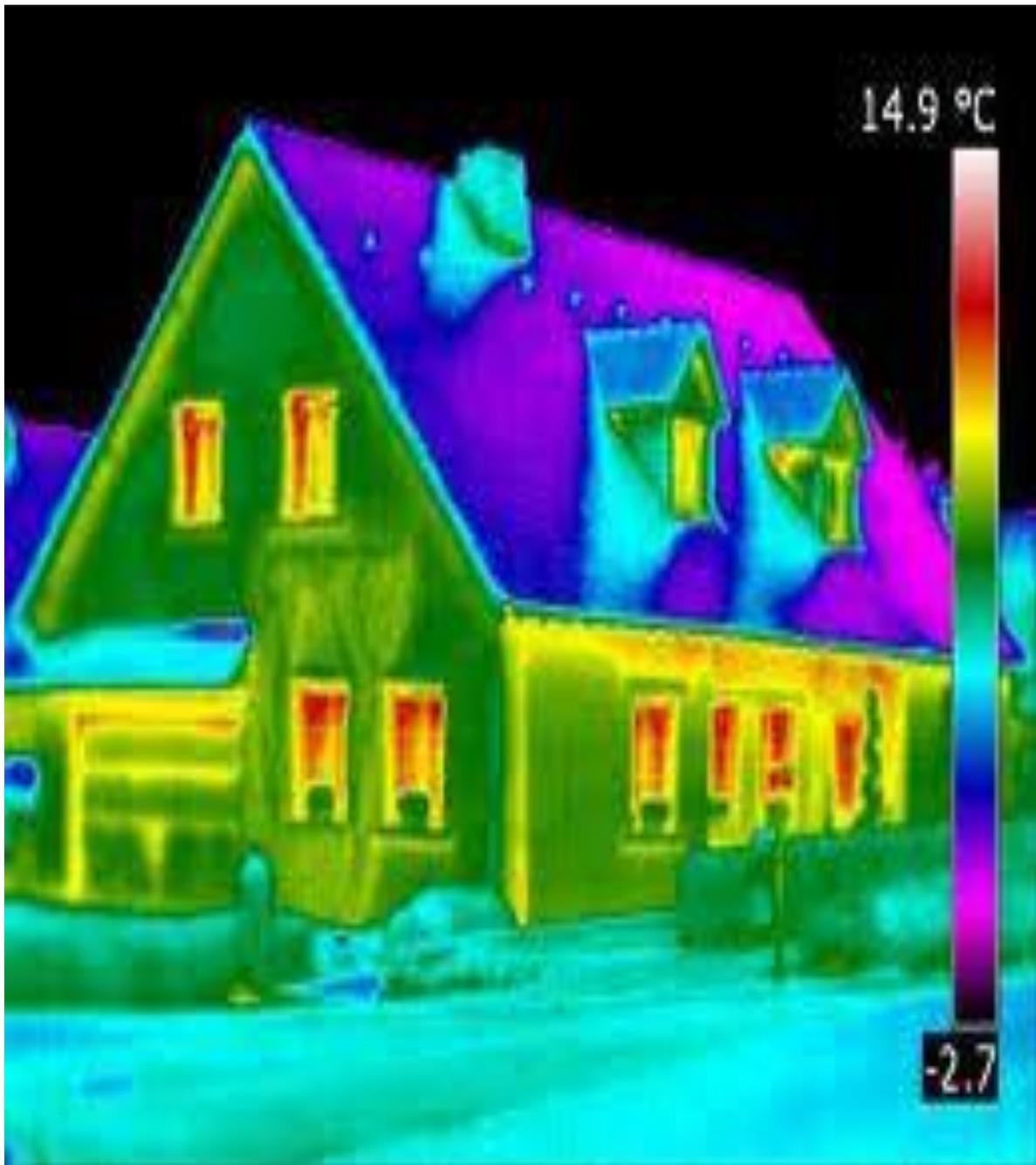
Présenté par : Dr Tayeb OUKSEL



Année universitaire 2016-2017

« Aucun sujet n'a des rapports plus étendus avec les progrès de l'industrie et ceux des sciences naturelles ; car l'action de la chaleur est toujours présente, elle pénètre tous les corps et les espèces, elle influe sur les procédés des arts, et concourt à tous les phénomènes de l'univers »

Joseph Fourier, « *Théorie Analytique de la Chaleur* », 1822



SOMMAIRE

Chapitre 1 : Introduction aux transferts thermiques	P5
1.1 Les différents modes de transferts	P5
1.1.1 La conduction	P5
1.1.2 Le rayonnement	P5
1.1.3 La convection	P6
1.2 Combinaison des différents modes de transferts	P7
Chapitre 2 : La conduction de la chaleur	P8
2.1 La loi de Fourier	P8
2.1.1 Définitions	P8
2.1.2 Enoncé de la loi de Fourier	P10
2.1.3 Orthogonalité du gradient et de l'isotherme	P11
2.2 La conductivité thermique	P12
2.2.1 Généralités	P12
2.2.2 Matériaux anisotropes	P13
2.3 Equations générales de la conduction	P14
2.3.1 Bilan énergétique	P15
2.3.2 Equations de la chaleur pour un solide homogène et isotrope	P16
2.3.3 Différentes formes de l'équation de la chaleur	P16
2.4 Expressions analytiques de l'équation de la chaleur	P17
2.5 Conditions aux limites spatio-temporelles	P17
2.5.1 Conditions initiales	P18
2.5.2 Conditions aux limites (Conditions aux surfaces)	P18
Chapitre 3 : Conduction en régime permanent	P20
3.1 Murs simples, murs accolés, murs composites, résistances thermiques conductives et convectives	P20
3.1.1 Cas d'un mur simple à faces isothermes	P20
3.1.2 Cas d'un mur simple en contact avec 2 fluides	P23
3.1.3 Cas des murs accolés en contact avec 2 fluides	P24
3.1.4 Cas d'un mur où la conductivité varie avec la température	P27
3.2 Cylindre et sphère creux à surfaces isothermes	P28
3.2.1 Cas d'un cylindre creux à surfaces latérales isothermes	P28
3.2.2 Cas d'une sphère creuse à surfaces latérales isothermes	P32
Chapitre 4: Conduction vive	P34
4.1 Cas d'une plaque plane	P34
4.2 Cas d'un cylindre plein avec source interne de chaleur	P35
4.3 Cas d'une sphère pleine avec source interne de chaleur	P37
Chapitre 5 : Transfert de chaleur par conduction en régime variable	P40
5.1 Conduction unidirectionnelle en régime variable sans changement d'état	P40
5.1.1 Milieu à température uniforme (méthode du gradient nul)	P40
Chapitre 6 : Les ailettes	P43
6.1 Généralités	P43
6.2 Rendement de l'ailette	P45
6.3 Efficacité d'une ailette	P45
6.4 Problème de la barre encastree	P47

Chapitre 7 : La convection	P49
7.1 Généralités – Définitions	P49
7.2 La loi de Newton	P50
7.2.1 Coefficient d'échange par convection	P50
7.2.2 Ordre de grandeur du coefficient h pour différentes configurations	P50
7.3 Convection naturelle	P52
7.4 Bilan des forces agissant sur une particule (P)	P52
7.5 Etude du phénomène de convection	P53
7.5.1 Couches limites ;	P53
7.5.2 Nature du coefficient de convection h_c ;	P55
7.5.3 Détermination de h_c : Analyse dimensionnelle	P55
7.5.4 Méthode pratique de calcul de h_c	P58
Bibliographie	P60

Chapitre 1

Introduction aux transferts thermiques

1.1 Les différents modes de transferts :

Lorsque deux systèmes sont à des températures différentes, le système le plus **chaud** cède de la chaleur au plus **froid**. Il y a échange thermique ou encore transfert thermique entre ces deux systèmes. Cette situation se rencontre dans de nombreuses situations industrielles (moteurs thermiques ou même électriques, centrales électriques au fuel au gaz, etc..., électronique) ou domestique (chauffage de l'habitat). Un transfert d'énergie donne lieu à un flux de chaleur qui correspond à un déplacement de l'énergie du plus chaud vers le plus froid. Comme on le verra par la suite, le flux de chaleur dont la densité locale est notée Φ est une grandeur vectorielle, ce qui signifie qu'un flux de chaleur est caractérisé non seulement par son intensité mais aussi par sa direction. Il est défini en chaque point de l'espace et a l'unité d'une densité surfacique de puissance (W/m²). Il existe trois modes essentiels de transferts de chaleur: la conduction, le rayonnement et la convection.

1.1.1 La conduction :

On sait que la température est une fonction croissante de l'agitation moléculaire dans un corps, qu'il soit solide, liquide ou gazeux. Considérons pour l'instant un corps solide au sein duquel la température varie. L'agitation moléculaire élevée de la zone chaude communiquera de l'énergie cinétique aux zones plus froides par un phénomène appelé **conduction** de la chaleur.

La conduction est un phénomène de diffusion qui permet donc à la chaleur de se propager à l'intérieur d'un corps solide.

Il en est de même pour un liquide ou un gaz mais on verra par la suite que pour eux, la convection est un autre mode de transfert de chaleur possible. Notons enfin que la conduction de la chaleur n'est pas possible dans le vide puisqu'il n'y a pas de support moléculaire pour cela.

1.1.2 Le rayonnement :

La chaleur du soleil frappe pourtant notre planète alors qu'il n'y a aucun support solide, liquide ou gazeux au delà de l'atmosphère terrestre. Ceci signifie donc que l'énergie thermique peut tout de même traverser le vide. Ce mode de transfert s'appelle le rayonnement. Il correspond à un flux d'ondes électromagnétiques émises par tout corps, quelle que soit sa température. Comme on l'imagine, le rayonnement électromagnétique est d'autant plus élevé que sa température est grande.

Comme pour la conduction, ce sont les interactions entre atomes et molécules qui sont à l'origine de ce rayonnement. Elles peuvent le générer, ce qui diminue leur énergie, ou encore l'absorber, ce qui l'augmente. De par sa nature, le rayonnement n'intervient que dans les milieux transparents (gaz, verre, vide) ou semi-opaque (gaz + fumées de CO₂, gaz + vapeur d'eau).

1.1.3 La convection :

Un débit ou une circulation de liquide ou de gaz peut transporter avec lui une certaine quantité d'énergie thermique. Ce transport de chaleur porte le nom de CONVECTION thermique. Ce transport de l'énergie par un écoulement est analogue au transport d'autres quantités scalaires (non vectorielles): transport d'une concentration de sel par de l'eau, transport de l'humidité par l'air, ... On retiendra donc que dans la convection, la chaleur se sert du fluide comme véhicule pour se déplacer.

Sans entrer dans les détails, notons qu'il existe deux types de transferts convectifs:

- La convection forcée dans laquelle l'écoulement du fluide est forcé par un dispositif mécanique quelconque (pompe ou gravité pour un liquide, ventilateur pour de l'air).
- La convection naturelle: lorsqu'il existe une différence de température entre deux points d'un fluide, le fluide chaud, qui aura une masse volumique plus faible que le fluide froid aura tendance à monter sous l'effet de la poussée d'Archimède.

Il y aura ainsi circulation naturelle du fluide sous l'effet de la chaleur qui, par ailleurs, sera transportée avec lui: on parle de convection naturelle. Si l'on prend l'exemple d'un chauffage domestique, l'eau chaude qui arrive dans les radiateurs circule par convection forcée, entretenue par le circulateur (petite pompe située dans la chaufferie) tandis que l'air des pièces de la maison circule par convection naturelle depuis le radiateur autour duquel il s'échauffe jusqu'au plafond vers lequel il s'élève avant de redescendre pour former un circuit fermé.

En convection on caractérise le flux de chaleur Φ qui est extrait par le fluide de température T_0 d'une paroi de surface S à la température T_P par :

$$\Phi = h \cdot S \cdot (T_P - T_0)$$

Où Φ est en Watt, S en m², T en Kelvin et où h désigne le coefficient d'échange entre la paroi et le fluide (en W.m⁻².K⁻¹).

1.2 Combinaison des différents modes de transferts

Dans beaucoup de situations, il y a coexistence de 2 ou même 3 des modes de transferts thermiques décrits précédemment.

Fort heureusement, il est fréquent qu'un mode soit prépondérant et simplifie l'analyse. Avant de finir ce paragraphe, signalons que certains échanges de chaleur s'accompagnent d'un changement d'état (vaporisation, condensation, fusion, congélation).

Ces phénomènes se comportent alors comme une source (ex. de la condensation) ou un puits de chaleur (ex. de la vaporisation).

Chapitre 2

La conduction de la chaleur

2.1 La loi de Fourier :

Rappelons que la conduction est le seul mode de transfert de chaleur possible dans un solide (sauf pour quelques solides transparents comme le verre qui laissent passer un rayonnement électromagnétique). C'est un mode de transfert sans transport de matière.

2.1.1 Définitions :

- **Température T**: elle se définit en chaque point d'un corps liquide, solide ou gazeux. C'est une fonction scalaire de l'espace et du temps lorsque le problème en dépend (problème instationnaire). L'unité de température est le degré Kelvin [K] ou encore le degré Celsius [C].
- **Flux de chaleur Φ** : c'est la quantité de chaleur qui traverse une surface S par unité de temps:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \text{ en Watt}$$

- **Densité de flux**: elle représente la puissance qui traverse l'unité de surface.

Pour une surface perpendiculaire au flux de chaleur :

$$\varphi = \frac{d\Phi}{dS}$$

Si le flux est homogène en tout point de la surface alors :

$$\varphi = \frac{\Phi}{S}$$

φ s'exprime en W.m^{-2} .

Pour une surface dont la normale \vec{n} est orientée de manière quelconque par rapport au flux (**Figure 2.1**) alors :

$$d\Phi = \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot dS = \varphi \cdot dS \cdot \cos\alpha$$

Le flux à travers une surface quelconque s'écrira donc :

$$\Phi = \int_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

L'exemple de la **Figure 2.2** illustre l'importance de l'orientation de la surface par rapport à la densité de flux : soit un solide carré dont les deux faces (ABCD et EFGH) sont maintenues à une température constante (respectivement T^+ et T^-) et dont les 4 autres sont isolées $\vec{\varphi}$ (par de la laine de verre par exemple). Un flux de chaleur Φ_0 circulera de la face ABCD vers la face EFGH. En tout point du cube, la densité de flux $\vec{\varphi}$ est donc parallèle à Ox et vaut :

$$\varphi = \frac{\Phi_0}{S}$$

Le flux à travers les 4 faces isolées est nul. Comme on le verra par la suite, s'il n'y a pas de sources de chaleur internes au cube, le flux de chaleur se conserve. Ainsi, si l'on calcule le flux Φ_1 qui traverse la surface diagonale DCEF inclinée à 45° on trouvera $\Phi_1 = \Phi_0$.

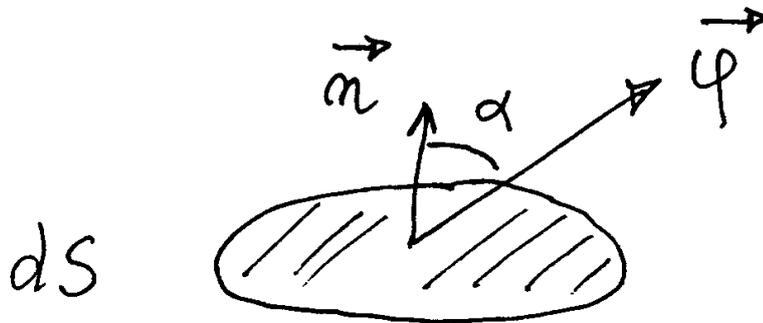


Figure 2.1 : Densité de flux de chaleur à travers une surface élémentaire

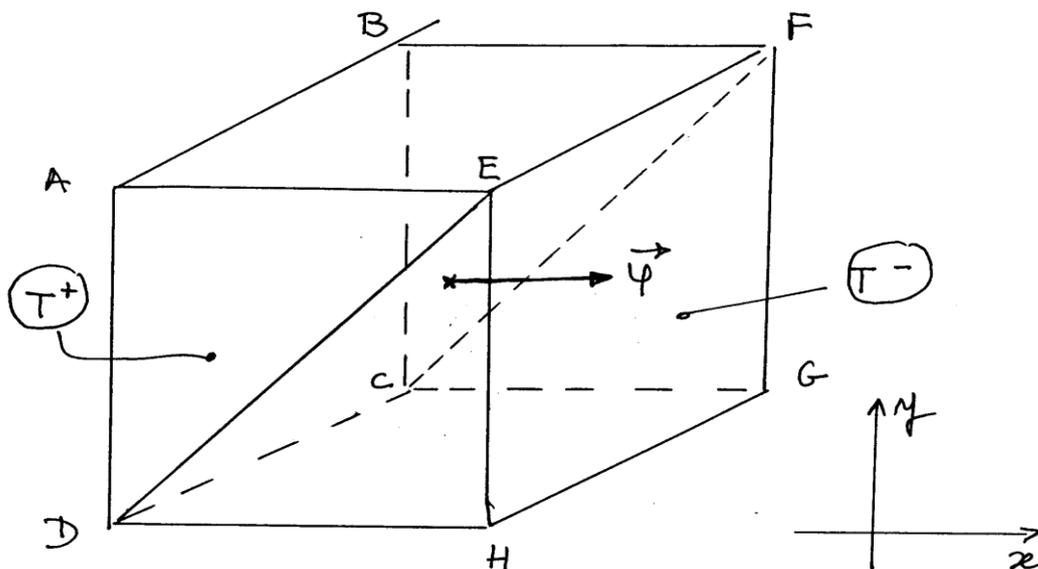


FIG. 2.2 - Exemple

Figure 2.2 : L'importance de l'orientation de la surface par rapport à la densité de flux

- **Surface isotherme :** si dans un milieu on relève les températures en tout point à un instant donné et qu'on relie entre eux les points de même température on obtient des surfaces isothermes en 3D et des lignes isothermes en 2D (voir **Figure 2.3**).

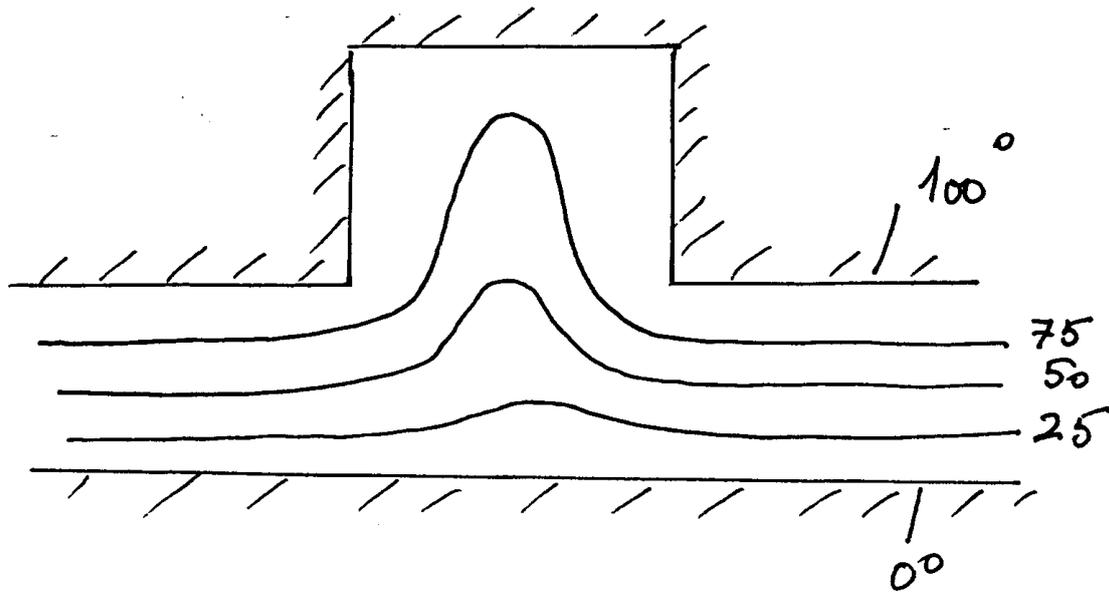


FIG. 2.3 – Exemples de courbes isothermes

2.1.2 Enoncé de la loi de Fourier :

Considérons à nouveau le montage de la figure 2.2. Imposons une différence de température $T^+ - T^- = \Delta T_0$ entre les deux faces non isolées : un flux de chaleur Φ_0 circulera. Doublons cette différence de température : un flux égal à $2\Phi_0$ circulera alors. Pour une valeur donnée de l'écart de température, remplaçons le cube par un matériau différent. La valeur du flux en sera affectée. Ceci donne l'intuition que le flux qui circule par conduction est proportionnel à la différence de température et à l'aptitude du matériau à conduire la chaleur.

En **1811**, **Fourier** propose une formulation locale de cette loi, donc valable en tout point :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad } T}$$

qui relie la densité de flux $\vec{\varphi}$ en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ à la conductivité thermique λ du matériau ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) et au gradient local de température. Le signe $-$ de la loi de Fourier résulte d'une convention qui rend positif un flux de chaleur s'écoulant du chaud vers le froid, donc dans le sens d'un gradient négatif.

Cette loi est l'analogie thermique de la loi **d'Ohm** : $\vec{J} = \sigma \cdot \overrightarrow{\text{grad } V}$ où \vec{J} est la densité de courant électrique, σ la conductivité électrique du métal et V le potentiel électrique. Le flux thermique est l'analogie du courant électrique et la température est l'analogie du potentiel électrique. Comme on définit la résistance électrique $R_e = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S}$ d'un conducteur de longueur l et de section S , on définit la résistance thermique par :

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{l}{S}$$

Telle que

$$\Delta T = R_{th} \cdot \Phi$$

2.1.3 Orthogonalité du gradient et de l'isotherme :

Considérons le dessin de la **Figure 2.4**. Entre les points M et M' distants de \overrightarrow{dM} , la différence de température vaut : $dT = \overrightarrow{gradT} \cdot \overrightarrow{dM}$

Si l'on place le point M' sur la même isotherme que M, on obtient : $\overrightarrow{gradT} \cdot \overrightarrow{dM} = 0$ ce qui signifie que le gradient de température en chaque point est perpendiculaire à l'isotherme passant par ce point. On en déduit aussi que les lignes de flux Φ sont elles aussi perpendiculaires aux isothermes. Ceci permet de définir la notion de tube de flux. Sur la **Figure 2.5** les courbes fermées C_1, C_2, C_3 appartiennent aux surfaces isothermes T_1, T_2 et T_3 et sont liées entre elles par une même ligne de flux. Les lignes de flux étant par définition des surfaces adiabatiques (aucun flux ne les traverse), les surfaces C_1, C_2, C_3 sont donc traversées par le même flux. Le tube ainsi formé s'appelle un tube de flux. Il laisse passer un flux Φ . On peut définir la résistance thermique R_{th} de ce tube entre les isothermes T_1 et T_2 par exemple, telle que :

$$T_1 - T_2 = R_{th} \cdot \Phi$$

Cette loi est l'analogie de la loi d'Ohm : $\Delta V = R_e \cdot I$

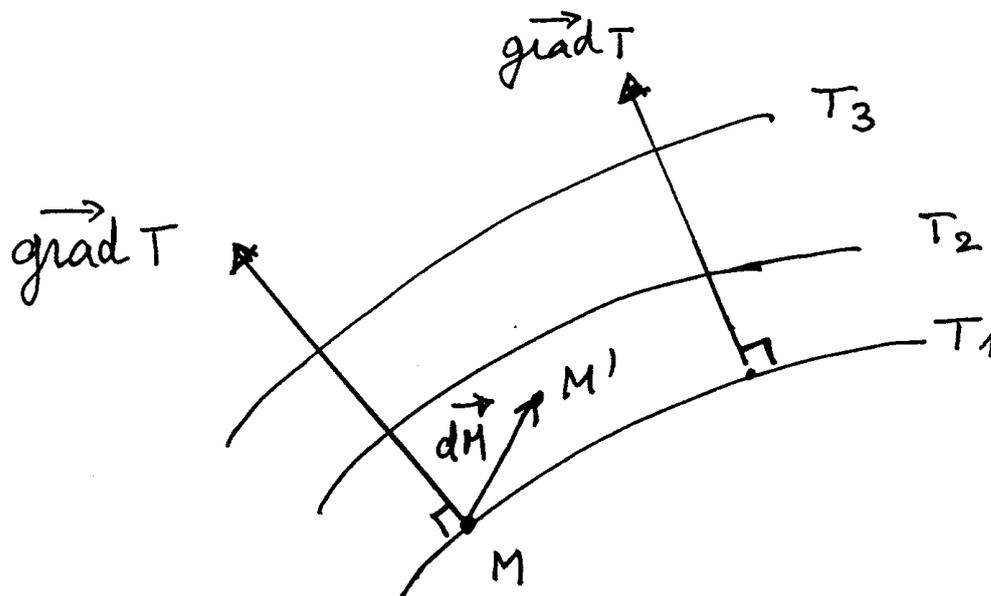


Figure 2.4: Gradient de température

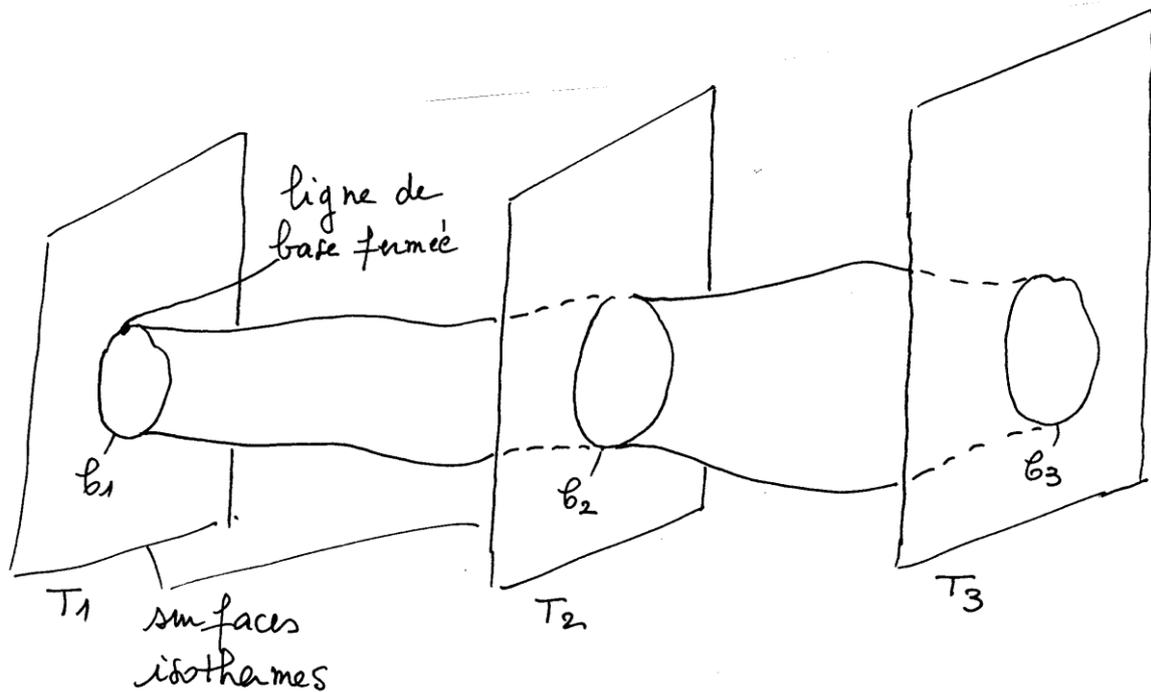


Figure 2.5: Définition d'un tube de flux.

2.2 La conductivité thermique :

2.2.1 Généralités :

La conductivité thermique λ (souvent notée k dans les pays anglo-saxons) exprime, de par sa définition, l'aptitude d'un matériau à conduire la chaleur.

Définition : la conductivité thermique est le flux de chaleur qui traverse une surface unité pour un matériau soumis à un gradient de température égal à l'unité.

La conductivité thermique s'exprime en $\mathbf{W.m^{-1}.K^{-1}}$.

La conductivité thermique dépend de :

- La nature physico-chimique du matériau
- La nature de la phase considérée (solide, liquide, gaz)
- La température
- L'orientation dans les matériaux anisotropes

Tableau 2.1 : Ordre de grandeur de la Conductivité thermique à température ambiante (20°C)

Type de matériau	Conductivité thermique λ (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)
Gaz à la pression atmosphérique	0.006-0.18
Matériaux isolants	0.025-0.25
Liquides non métalliques	0.1-1.0
Solides non métalliques	0.025-3
Liquides métalliques	8.5-85
Alliages métalliques	10-150
Métaux purs	20-400

La conductivité thermique dépend de la température lorsque l'on considère des plages étendues de température. Dans ce cas on pourra cependant souvent considérer une variation linéaire avec T, sous la forme : $\lambda = \lambda_0 \cdot (1 + b \cdot T)$

Où : λ_0 désigne la conductivité à $T=T_0$ et b est une constante expérimentale.

La dépendance en température de différents matériaux est illustrée dans la figure ci-dessous (Fig 2.6), (extraite de J. Crabol – transfert de chaleur- ed. Masson 1989).

Dans la suite de ce cours on considérera systématiquement la conductivité thermique λ comme un scalaire constant ce qui revient à se placer dans le **cas de matériaux homogènes et isotropes**. Cette simplification n'est cependant pas abusive car il est souvent difficile de procéder différemment et même dans le cas de matériaux typiquement inhomogènes (béton par exemple) on considère une conductivité moyenne appelée conductivité effective.

2.2.2 Matériaux anisotropes :

Certains matériaux ont une structure qui rend la conductivité thermique différente selon la direction de propagation de la chaleur. C'est le cas des matériaux fibreux par exemple (fibre de verre, fibre de carbone). Dans ces matériaux, qu'on appelle anisotropes, le flux de chaleur aura donc une direction privilégiée.

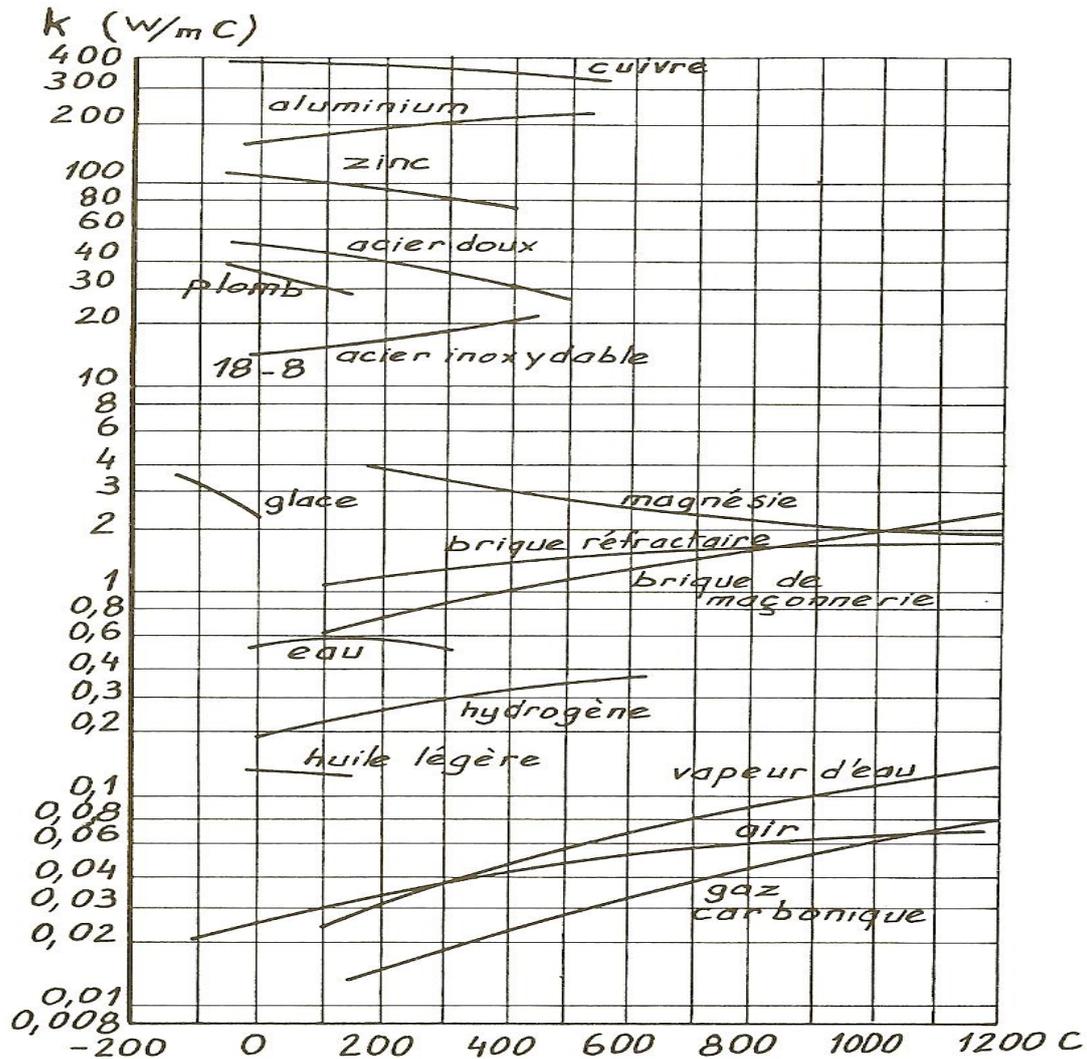


Fig. 2 - Conductivité thermique.

Fig 2.6 : Conductivité thermique de différents matériaux en fonction de la température

(Extraite de J. Crabol – transfert de chaleur- ed. Masson 1989)

2.3 Equations générales de la conduction :

Considérons un solide de volume V . Soient $\gamma = \rho.c$ sa chaleur volumique, λ sa conductivité thermique, et p la puissance générée par unité de volume due aux sources internes.

Les caractéristiques thermiques γ et λ peuvent être fonction du point considéré et de la température en ce point. De plus, p peut être une fonction du temps.

2.3.1 Bilan énergétique :

On applique le premier principe de la Thermodynamique à un volume fini v , de surface S , contenu dans V (voir **Fig.2.7**)

Avec les conventions habituelles, on Compte positivement les énergies reçues par ce système. \vec{n} Etant la normale extérieure à la surface S , la puissance algébrique reçue par v , traverse S dans le sens opposé de \vec{n} , d'où l'expression de la puissance échangée sur la surface limite S .

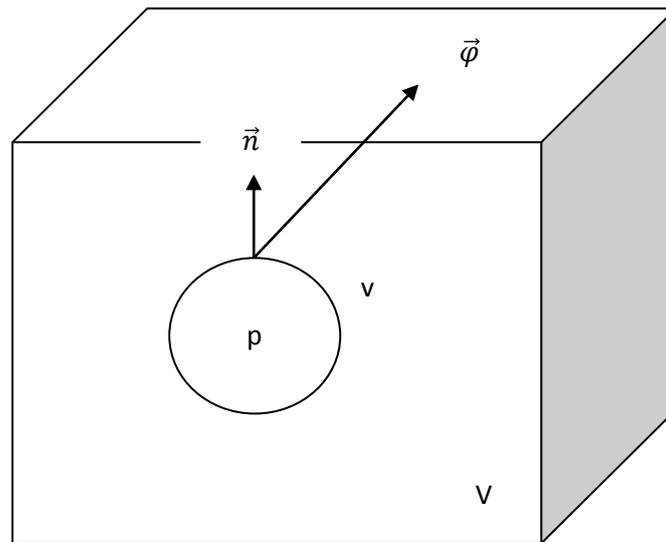


Fig.2.7 : Bilan énergétique appliqué à l'élément de volume v

$$\int_S -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS$$

La puissance générée par les sources internes est donnée par l'intégrale.

$$\int_v p \cdot dv$$

Le solide considéré étant indéformable, seule la variation de la température intervient dans l'expression de la variation instantanée d'énergie interne, soit :

$$\frac{dU}{dt} = \int_v \gamma \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dv$$

L'équation traduisant le premier principe s'écrit alors :

$$\int_S -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS + \int_v p \cdot dv = \int_v \gamma \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dv$$

La formule d'OSTROGRADSKY permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume :

$$\int_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS = \int_V \text{div} \vec{\varphi} dv$$

On obtient alors :

$$\int_V \left[-\text{div} \vec{\varphi} + p - \gamma \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \right] \cdot dv = 0$$

v étant un volume arbitraire de V, on a donc en chaque point de V :

$$\boxed{\text{div} \vec{\varphi} + \gamma \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - p = 0}$$

2.3.2 Equations de la chaleur pour un solide homogène et isotrope :

Pour un solide homogène et isotrope, les caractéristiques thermiques λ et $\gamma = \rho \cdot c$ ne dépendent que de la température.

La dernière équation s'écrira alors sous la forme ci-dessous:

$$-\text{div}[\lambda(T) \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}] + \gamma(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - p(M, t) = 0$$

Ou encore en introduisant la diffusivité thermique du solide :

$$D_{th} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \text{ (m}^2/\text{s)}$$

$$\boxed{\Delta T - \frac{1}{D_{th}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \cdot (\overrightarrow{\text{grad}T}) \cdot \frac{d\lambda}{dT} \cdot (\overrightarrow{\text{grad}T})^2 + \frac{p(M, t, T)}{\lambda} = 0}$$

A fin de linéariser cette dernière équation, on suppose que caractéristiques thermiques λ et $\gamma = \rho \cdot c$ sont indépendantes de la température et que la puissance volumique p générée au sein du solide est une fonction linéaire de T. c-à-d : $p = A(M, t) + B(M, t) \cdot T$

2.3.3 Différentes formes de l'équation de la chaleur :

Pour un solide de caractéristiques thermiques λ et $\gamma = \rho \cdot c$ sont constantes et pour lequel la puissance volumique p est indépendante de la température, on obtient l'équation linéaire classique de la chaleur :

$$\Delta T - \frac{1}{D_{th}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p(M, t)}{\lambda} = 0$$

1/ **Milieu avec sources internes, en régime permanent :**

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0 \quad (\text{Equation de POISSON})$$

2/ **Milieu sans sources internes, en régime permanent :**

$$\Delta T = 0 \quad (\text{Equation de LAPLACE})$$

3/ **Milieu sans sources internes, en régime variable :**

$$\Delta T = \frac{1}{D_{th}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{Equation de FOURIER})$$

2.4 **Expressions analytiques de l'équation de la chaleur :**

En introduisant les expressions du **laplacien** Δ en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, on obtient respectivement les équations suivantes :

1- **En coordonnées cartésiennes :** (x, y, z, t)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{D_{th}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p(x, y, z, t)}{\lambda} = 0$$

2- **En coordonnées cylindriques :** (r, z, t)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{D_{th}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p(r, z, t)}{\lambda} = 0$$

3- **En coordonnées sphériques :** (r, t)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{D_{th}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p(r, t)}{\lambda} = 0$$

2.5 **Conditions aux limites spatio-temporelles :**

L'équation générale de la chaleur traduit ,par une relation entre les variables x, y, z, t et la température ,le mécanisme du phénomène conductif, en tout point de coordonnées x, y, z à tout instant t .

Cette équation aux dérivées partielles, linéaire, du deuxième ordre, admet en principe une infinité de solutions, faisant intervenir des constantes ou des fonctions arbitraires. Mais cette

équation phénoménologique n'a de sens physique que pour de conditions définies. Ces conditions sont les causes qui déterminent l'évolution du phénomène. En effet, l'équation de la chaleur décrivant un phénomène irréversible, ceci implique que le milieu considéré a été soumis à un instant initial à une rupture de son équilibre thermique. Il est alors nécessaire de connaître la répartition initiale des températures en tout point du milieu et aussi la loi de variation de la fonction T ou/et, de sa dérivée normale $\frac{\partial T}{\partial n}$ sur la surface frontière.

2.5.1 Conditions initiales :

La distribution des températures à l'intérieur du solide et sur sa surface est supposée connue à l'instant $t=0$ c-à-d : $T(x,y,z,t=0)=T_0(x,y,z)$

2.5.2 Conditions aux limites (Conditions aux surfaces) :

Les conditions que l'on impose sur la surface frontière c-à-d à la paroi du solide pour $t>0$, seront affectées de l'indice p . Elles sont la traduction mathématique des conditions physiques réelles.

1- Température imposée : (Condition de **DIRICHLET**)

La température est une fonction donnée du point M_P sur la paroi et/ou du temps : $T_p=f(M_P, t)$

2- Densité de flux imposée : (Condition de **NEUMANN**)

La densité de flux thermique est une fonction donnée du point M_P sur la paroi et/ou du temps, soit algébriquement :

$$\varphi = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_p = f(M_P, t)$$

Où $\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_p$ = dérivée normale de T , calculée à la paroi

Remarque : Si le corps est thermiquement isolé, la densité de flux est nulle en tout point de sa surface (adiabaticité).

3 Transfert linéaire à la surface et condition mixte : (Condition de **FOURIER**)

La densité de flux traversant la surface frontière est proportionnelle à la différence de température entre la paroi et le milieu environnant, soit :

$$\varphi = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_p = h \cdot (T_p - T_\infty)$$

4- **Transfert de chaleur par rayonnement :**

Un corps de température absolue T_1 , placé dans une enceinte à la température absolue T_2 , échange avec celle-ci la densité de flux thermique :

$$\varphi = A \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

Où A= paramètre qui tient compte des propriétés radiatives, émissivité, des corps en présence et de la géométrie des diverses surfaces et de leurs aires.

$$\varphi = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_p = A \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

5- **Transfert de chaleur à l'interface de 2 solides de natures différentes :**

Lorsque 2 solides de conductivités respectives λ_1 et λ_2 possèdent une frontière S commune, la conservation du flux s'écrit :

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{grad}T_1 = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{grad}T_2 \quad \text{sur } S$$

Remarque: Dans le cas d'un contact parfait (égalité des températures des 2 corps à l'interface S):

$$T_1 = T_2$$

Chapitre 3

Conduction en régime permanent

En régime permanent, la température en chaque point du milieu est indépendante du temps. L'équation générale se réduit à l'équation de **POISSON** (conduction vive) dans le cas où le milieu comporte des sources internes, ou à l'équation de **LAPLACE** (conduction morte) pour un milieu sans sources.

3.1 Murs simples, murs accolés, murs composites, résistances thermiques conductives et convectives

Le mur simple est un milieu limité par 2 plans parallèles, dans lequel la chaleur se propage uniquement suivant la normale à ces plans. $\vec{n} = \vec{i}$. (Fig 3.1).

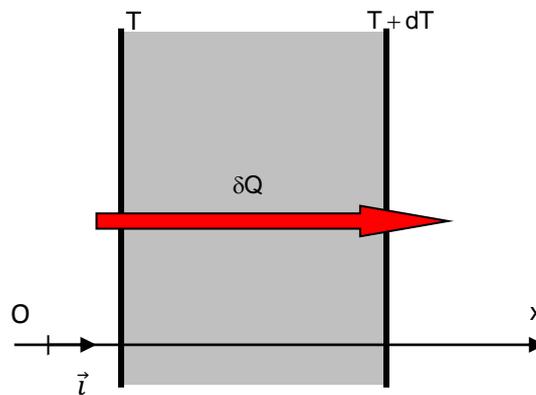


Fig 3.1 : Mur simple

Le gradient de température est porté par cette normale.

$$\overrightarrow{grad}T = \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right) \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \cdot \vec{i} = \frac{dT}{dx} \cdot \vec{i}$$

Les isothermes ($T=Cste$) sont des plans parallèles aux faces. Un tel champ thermique est unidimensionnel (la température n'est fonction que de x : $T=T(x)$)

3.1.1 Cas d'un mur simple à faces isothermes :

Les parois du mur sont maintenues à des températures T_1 et T_2 uniformes, constantes et connues (**Fig 3.2**).

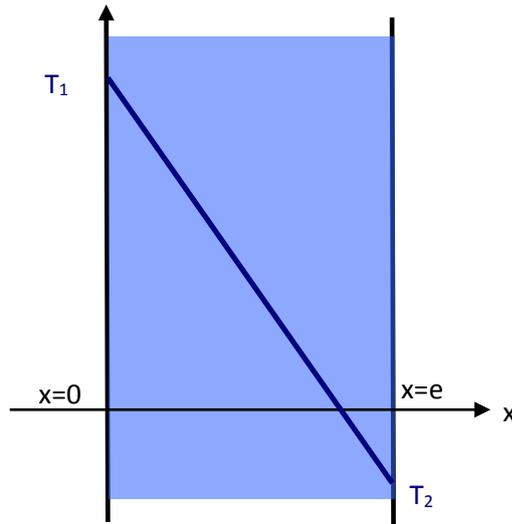


Fig 3.2 : Mur simple à faces isothermes

Le système fondamental donnant la température est donné par :

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \\ T(x=0) = T_1 \\ T(x=e) = T_2 \end{cases}$$

En intégrant une première fois, on obtient le gradient de température :

$$\frac{dT}{dx} = Cste = A$$

$$T(x) = A \cdot x + B$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées à partir des conditions aux limites.

$$A = \frac{(T_2 - T_1)}{e}$$

$$B = T_1$$

$$T(x) = \frac{(T_2 - T_1)}{e} \cdot x + T_1$$

Si $T_1 > T_2$ la densité de flux $\vec{\varphi}$ s'écrit :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{grad T} = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \cdot \vec{i}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{(T_2 - T_1)}{e} < 0$$

Donc $\vec{\varphi}$ est orienté dans le sens des x positifs (dans le sens de \vec{i}). C'est-à-dire dans le sens de la propagation de la chaleur.

$$\vec{\varphi} = \frac{\lambda(T_2 - T_1)}{e} \cdot \vec{i}, \text{ or } \vec{S} = S \cdot \vec{i}$$

Donc, le flux de chaleur s'écrit :

$$\phi = \vec{\varphi} \cdot \vec{S} = \frac{\lambda \cdot (T_2 - T_1)}{e} \cdot \vec{i} \cdot S \cdot \vec{i} = \frac{\lambda \cdot S \cdot (T_2 - T_1)}{e}$$

Or d'après la définition de la résistance thermique on a :

$$\Delta T = R_{th,conduction \text{ du mur}} \cdot \phi$$

$$\text{D'où : } R_{th,conduction \text{ du mur}} = \frac{e}{\lambda \cdot S}$$

Exemple d'application :

- Calculer le flux traversant une vitre de 1 m² de surface et de 3,5 mm d'épaisseur. La température de la face interne de la vitre est égale à 10°C, celle de la face externe est égale à 5°C.
- En déduire la résistance thermique de la vitre ?
- Pour les mêmes températures de paroi, calculer le flux traversant un m² de mur de briques de 26 cm d'épaisseur. En déduire la résistance thermique ?

Données :

Conductivité thermique du verre : $\lambda_v = 0,7 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Conductivité thermique des briques : $\lambda_b = 0,52 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Réponse :

Flux traversant 1m² de vitre :

$$\phi_{verre} = \frac{\lambda \cdot S \cdot (\theta_1 - \theta_2)}{e} = \frac{0,7 \cdot 1 \cdot (5 - 0)}{3,5 \cdot 10^{-3}} = 1000 \text{ W}$$

Résistance thermique d'1m² de vitre :

$$R_{verre} = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{\phi} = \frac{(10 - 5)}{1000} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ C.W}^{-1} \text{ ou bien } R_{verre} = \frac{e}{\lambda \cdot S} = \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{0,7 \cdot 1} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ C.W}^{-1}$$

Flux traversant 1m² de mur de briques :

$$\phi_{briques} = \frac{\lambda \cdot S \cdot (\theta_1 - \theta_2)}{e} = \frac{0,52 \cdot 1 \cdot (10 - 5)}{0,26} = 10 \text{ W}$$

Résistance thermique d'1m² de mur de briques :

$$R_{briques} = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{\phi} = \frac{(10 - 5)}{10} = 0,5 \text{ C.W}^{-1} \text{ ou bien } R_{briques} = \frac{e}{\lambda \cdot S} = \frac{0,26}{0,52 \cdot 1} = 0,5 \text{ C.W}^{-1}$$

Analyse des résultats : Pour une même surface et un même écart de température, le flux perdu par la vitre est 100 fois plus élevé que celui perdu par le mur de briques dont la conductivité est plus faible et dont l'épaisseur est beaucoup plus élevée que celle de la vitre.

3.1.2 Cas d'un mur simple en contact avec 2 fluides :

Considérons un mur en contact avec 2 fluides de température constantes $T_{\infty 1}$ et $T_{\infty 2}$: (on suppose que $T_{\infty 1} > T_{\infty 2}$) (voir **Fig.3.3**).

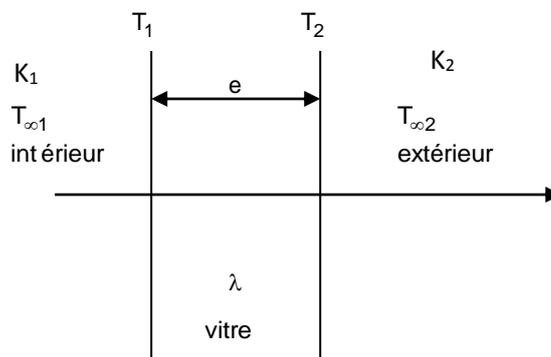


Fig 3.3 : Mur simple en contact avec 2 fluides

Entre les parois du mur et les 2 fluides s'établit un échange convectif. Le problème est unidimensionnel, la conservation du flux se traduit par l'égalité des flux : cédé par le fluide chaud au mur, traversant le mur, et reçu par le fluide froid.

$$\phi = \phi \cdot S = (T_{\infty 1} - T_1) \cdot K_1 \cdot S = \lambda \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{L} \cdot S = (T_2 - T_{\infty 2}) \cdot K_2 \cdot S$$

Ou encore :

$$\phi = \frac{(T_{\infty 1} - T_1)}{\underbrace{\frac{1}{K_1 \cdot S}}_{R_{c1}}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\underbrace{\frac{L}{\lambda \cdot S}}_R} = \frac{(T_2 - T_{\infty 2})}{\underbrace{\frac{1}{K_2 \cdot S}}_{R_{c2}}}$$

On définit ainsi les résistances thermiques convectives R_c semblables à la résistance thermique conductive $R = \frac{L}{\lambda \cdot S}$, telle que :

$$R_{c1} = \frac{1}{K_1 \cdot S} \quad \text{et} \quad R_{c2} = \frac{1}{K_2 \cdot S}$$

L'équation permet d'exprimer le flux échangé entre les fluides 1 et 2 en fonction des températures des fluides, des caractéristiques du mur et des coefficients d'échange convectifs :

$$\phi = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{(R_{c1} + R + R_{c2})}$$

Cette dernière équation traduit l'analogie avec la loi d'**Ohm** pour 3 résistances en série.

Le coefficient global d'échange « k » entre les 2 fluides a pour expression :

$$k = \frac{1}{(R_{c1} + R + R_{c2}) \cdot S}$$

La température en un point d'abscisse « x » est donnée par :

$$T_{\infty 1} - T(x) = [R_{c1} + R(x)] \cdot \phi = \left[R_{c1} + \frac{x}{\lambda \cdot S} \right] \cdot \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{(R_{c1} + R + R_{c2})}$$

Ou encore :

$$T(x) = T_{\infty 1} - \left[R_{c1} + \frac{x}{\lambda \cdot S} \right] \cdot \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{(R_{c1} + R + R_{c2})}$$

3.1.3 Cas des murs accolés en contact avec 2 fluides :

Considérons plusieurs murs simples accolés, d'épaisseur e_i , de conductivité λ_i , en contact parfait. Les faces extrêmes sont en contact avec 2 fluides à des températures $T_{\infty 1}$ et $T_{\infty 2}$ (voir **Fig.3.4**)

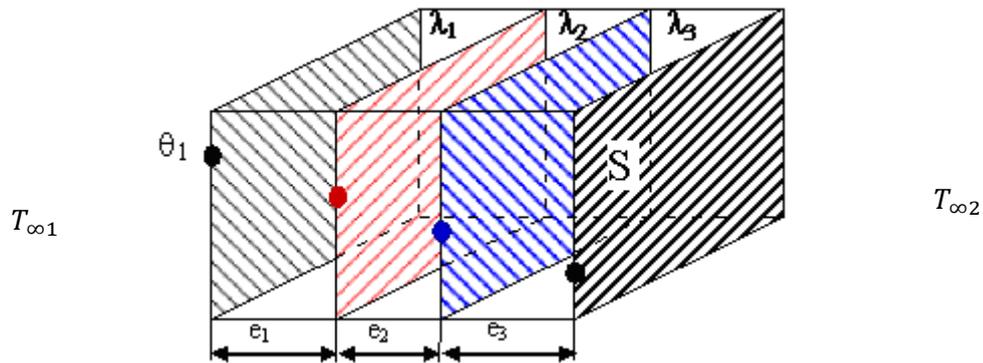


Fig.3.4 : Murs accolés en contact avec 2 fluides

Par un raisonnement identique au précédent on obtient de même :

$$\phi = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{(R_{c1} + \sum_{i=1}^n R_i + R_{c2})} \quad \text{avec : } R_i = \frac{e_i}{\lambda_i \cdot S}$$

Et

$$T(x) = T_{\infty 1} - \left[R_{c1} + \sum_{i=1}^{i-1} R_i + \frac{x_i}{\lambda_i \cdot S} \right] \cdot \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{(R_{c1} + \sum_{i=1}^n R_i + R_{c2})}$$

Exemple d'application : Etude des pertes par conduction à travers un double vitrage.

Un double vitrage est constitué de deux plaques de verre séparées par une couche d'air immobile (**Fig 3.5**). L'épaisseur de chaque vitre est de 3,5 mm et celle de la couche d'air est de 12 mm. La conductivité thermique du verre est égale à $0,7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ est celle de l'air est de $0,024 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ sur le domaine de température étudié. Pour une chute de température de 5°C entre les deux faces externes du double vitrage, calculez les pertes thermiques pour une vitre de 1 m^2 .

Note : Ce calcul néglige l'effet du coefficient de convection de part et d'autre de chaque vitre). Comparez ces pertes thermiques à celles qui seraient obtenues avec une seule vitre d'épaisseur égale à 3,5 mm.

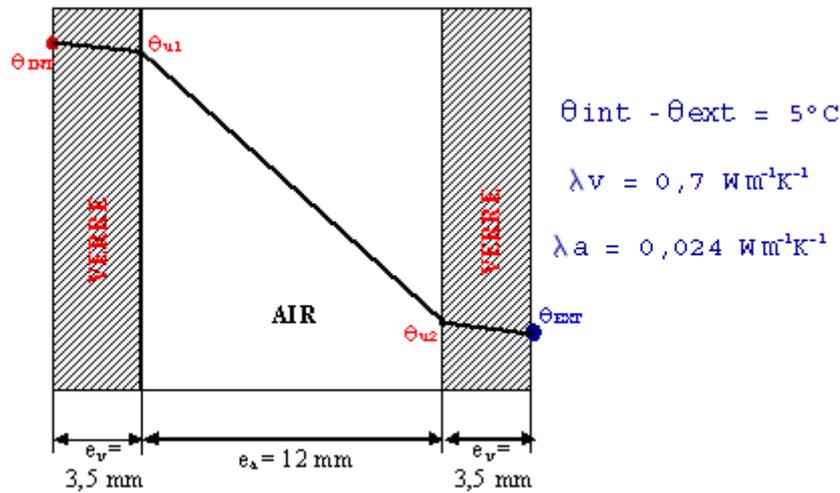


Fig.3.5 : Les pertes par conduction à travers un double vitrage

Réponse :

Le double vitrage est constitué de **trois résistances thermiques en série**.

Le flux traversant ce double vitrage est donné par :

$$\phi = \frac{(\theta_{int} - \theta_{ext})}{R_{tot}} = \frac{(\theta_{int} - \theta_{ext})}{R_v + R_a + R_v} = \frac{(\theta_{int} - \theta_{ext})}{\frac{e_v}{\lambda_v \cdot S} + \frac{e_a}{\lambda_a \cdot S} + \frac{e_v}{\lambda_v \cdot S}} = \frac{(\theta_{int} - \theta_{ext}) \cdot S}{2 \cdot \frac{e_v}{\lambda_v} + \frac{e_a}{\lambda_a}}$$

$$\phi = \frac{5.1}{\frac{2.3 \cdot 10^{-3}}{0,7} + \frac{12 \cdot 10^{-3}}{0,024}} = 9,8 \text{ W}$$

Donc : $\phi_{double\ vitrage} = 9,8 \text{ W}$

Remarque sur le profil de température (voir Figure 3.5) :

La résistance thermique de la lame d'air est 100 fois plus élevée que celle de chaque vitre, la chute de température dans l'air sera 100 fois plus élevée que dans chaque vitre, c-à-d :

$$\theta_{int} - \theta_{v1} = R_v \cdot \phi = 0,005 \cdot 9,8 = 0,049^{\circ}\text{C}$$

$$\theta_{v1} - \theta_{v2} = R_a \cdot \phi = 0,5 \cdot 9,8 = 4,9^{\circ}\text{C}$$

$$\theta_{v2} - \theta_{ext} = R_v \cdot \phi = 0,005 \cdot 9,8 = 0,049^{\circ}\text{C}$$

Comparons le flux traversant le double vitrage à celui traversant une seule vitre en verre pour une même surface et une même différence de température.

$$\phi_{1 \text{ seule vitre}} = \frac{(\theta_{int} - \theta_{ext})}{R_v} = \frac{\lambda_v \cdot S}{e_v} \cdot (\theta_{int} - \theta_{ext}) = \frac{0,7.1}{3,5 \cdot 10^{-3}} \cdot 5 = 1000 \text{ W}$$

Conclusion : Si on considère uniquement les échanges par conduction (on verra au chapitre suivant que le résultat est modifié du fait des échanges par convection), le double vitrage permet de réduire 100 fois les pertes thermiques à travers la vitre. Ceci est surtout dû à la résistance thermique très élevée de la couche d'air car l'air a une faible conductivité thermique.

3.1.4 Cas d'un mur où la conductivité varie avec la température :

Si la gamme des températures rencontrées dans un problème de conduction est telle que les valeurs de λ sont différentes d'une extrémité à l'autre de cette gamme on ne peut plus faire l'hypothèse de λ constant.

Dans ce cas, on peut faire l'approximation que la conductivité thermique varie linéairement avec la température, soit $\lambda = \lambda_0 \cdot (1 + b \cdot T)$ avec λ_0 la conductivité à $T=0$, et b dépend du matériau.

Pour un mur, problème unidimensionnel, il faut alors revenir à l'équation générale de la conduction dans le cas d'une conductivité thermique non uniforme :

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (\text{Conduction morte } p=0, \text{ en régime permanent } \frac{dT}{dt} = 0)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda_0 \cdot (1 + b \cdot T) \cdot \frac{dT}{dx} \right) = 0$$

$$\lambda_0 \cdot (1 + b \cdot T) \cdot \frac{dT}{dx} = E$$

$$\lambda_0 \cdot T + \frac{\lambda_0 \cdot b \cdot T^2}{2} = E \cdot x + D$$

Les constantes E et D se déterminent expérimentalement.

La distribution des températures est donc parabolique au sein du mur.

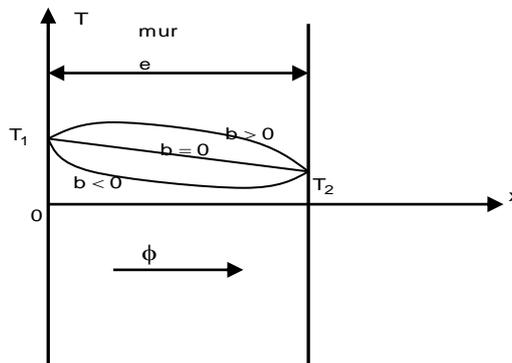


Fig 3.6 : Mur simple à faces isothermes mais à conductivité thermique variable

On peut résoudre le problème en considérant deux conditions de **Dirichlet** :

$$\begin{array}{l} x=0 \quad T=T_1 \quad T_1 > T_2 \\ x=e \quad T=T_2 \end{array}$$

Qui conduisent à $D = \lambda_0 \cdot \left(T_1 + \frac{b \cdot T_1^2}{2} \right)$ et $E = \frac{\lambda_0}{e} \cdot \left[\frac{b}{2} \cdot (T_2^2 - T_1^2) + (T_2 - T_1) \right]$

En reportant dans (1) et en exprimant $T(x)$ on tire :

$$T(x) = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_1 \right)^2 + \frac{2 \cdot E \cdot x}{b \cdot \lambda_0}}$$

Trois cas sont à envisager : $b > 0$, $b = 0$ et $b < 0$

$b = 0$: $\lambda = \lambda_0$: cas linéaire entre T_1 et T_2 (cas déjà traité)

$b > 0$: concavité vers le haut (voir Fig 3.6)

$b < 0$: concavité vers le bas (voir Fig 3.6)

3.2 Cylindre et sphère creux à surfaces isothermes :

3.2.1 Cas d'un cylindre creux à surfaces latérales isothermes :

Considérons un cylindre creux de très grande longueur par rapport aux rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 ($L \gg R_1$ et $L \gg R_2$) et dont les surfaces cylindriques sont à des températures uniformes et constantes T_1 et T_2 . Les isothermes sont des surfaces cylindriques coaxiales, le gradient de température est radial, le problème à 2 dimensions géométriques mais la température n'est fonction que du rayon « r ».

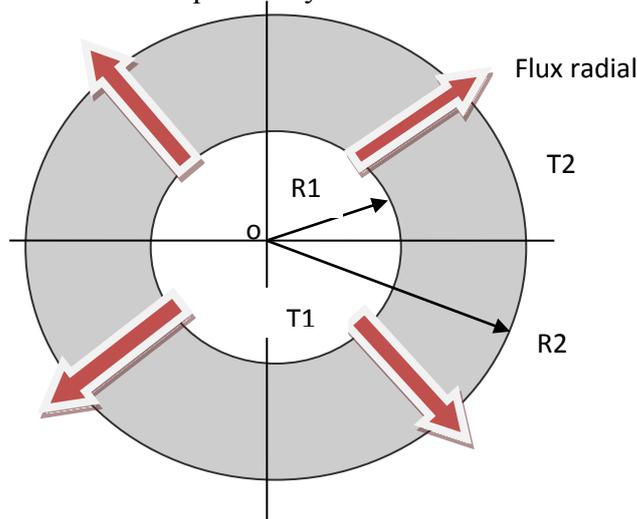


Fig 3.7 : Cylindre creux à surfaces latérales isothermes

Le système fondamental s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0 \\ T(R_1) = T_1 \\ T(R_2) = T_2 \end{cases}$$

En posant $u = \frac{dT}{dr}$, on obtient l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$r \cdot \frac{du}{dr} + u = 0$$

Dont la solution est $u = \frac{C}{r}$ fournit après intégration, l'expression de la distribution radiale des températures :

$$T(r) = \int \frac{C}{r} \cdot dr = C \cdot \ln r + \ln D = \ln(D \cdot r^C)$$

Les constantes d'intégration C et D sont déterminées à partir des conditions aux limites sur R_1 et R_2 .

Soit finalement :

$$T(r) = T_1 + \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

On déduit de la loi de Fourier la densité de flux :

$$\varphi_r = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} = -\lambda \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\phi = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \varphi_r = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$$

D'où la résistance thermique du cylindre creux :

$$R = \frac{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda}$$

Cas particulier : (Cas d'un cylindre mince)

Si le cylindre est mince, d'épaisseur « e », en utilisant l'approximation $\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) \approx \frac{e}{R_1}$, les résultats précédents se simplifient en :

$$\varphi_r = \frac{\lambda}{e} \cdot (T_1 - T_2) \cdot \frac{R_1}{r}$$

et $\phi = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot R_1 \cdot \lambda}{e} \cdot (T_1 - T_2)$

Application :

Il s'agit du cas courant d'isolation thermique de canalisations. A titre d'exemple citons les canalisations d'eau de chauffage central que l'on calorifuge dans les parties froides (caves, sous-sols) des habitations.

Considérons un tube cylindrique de rayon r_i , r_e . Supposons qu'autour de ce tube soit placé un isolant de rayon extérieur r et de conductivité thermique λ .

A l'intérieur de la canalisation, un milieu (eau par exemple). A l'extérieur de la canalisation calorifugée, de l'air ambiant caractérisé par un coefficient de convection rayonnement noté K et une température T_∞ .

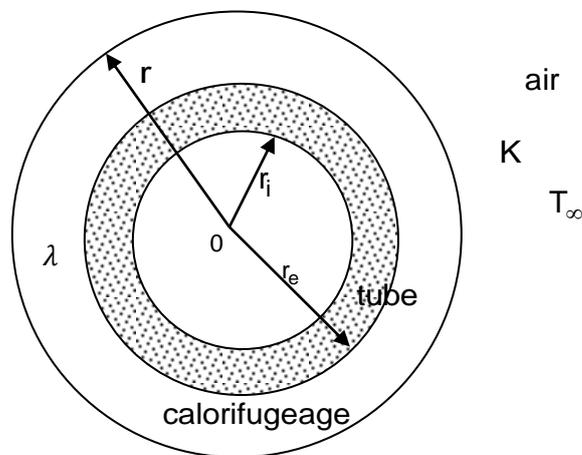


Fig 3.8 : Calorifugeage d'une canalisation dans l'air

La résistance thermique du système est :

$$R = R_{eau} + R_{canalisation} + R_{calorifugeage} + R_{air\ exterieur}$$

L'ensemble $R_{eau} + R_{canalisation}$ est constant et sera noté R_0 .

La résistance totale peut donc s'exprimer par :

$$R = R_0 + \frac{\ln\left(\frac{r}{r_e}\right)}{2\pi\lambda L} + \frac{1}{K \cdot 2\pi \cdot r \cdot L} \quad (L : \text{longueur du tuyau})$$

Examinons comment varie R avec le rayon extérieur du calorifugeage. Pour cela on étudie la fonction $R(r)$.

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{2\pi \cdot L} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{K \cdot 2\pi \cdot r \cdot L} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{2\pi \cdot \lambda \cdot L \cdot r^2} \cdot \left(r - \frac{\lambda}{K}\right)$$

$$\text{D'où } \frac{dR}{dr} = 0 \text{ si } r = \frac{\lambda}{K} = r_{crit}$$

r_{crit} est appelé **rayon critique**, il correspond à une **résistance thermique extrême**.

$$\text{On a donc } \frac{dR}{dr} = \frac{1}{2\pi\lambda L r^2} \cdot (r - r_{crit})$$

$$\text{Soit } \frac{dR}{dr} > 0 \text{ si } r > r_{crit} \text{ et } \frac{dR}{dr} < 0 \text{ si } r < r_{crit}$$

Cependant il faut faire attention que le calorifugeage est une épaisseur surajoutée à la conduite, on a donc forcément $r_e \leq r < \infty$.

2 cas peuvent alors se produire en fonction de la valeur prise par le rayon critique par rapport à r_e

1. Si $r_{crit} \leq r_e (\leq r)$ $\frac{dR}{dr} > 0$. C'est le cas des grosses conduites. Le calorifugeage conduit « naturellement » à une augmentation de la résistance thermique d'ensemble. Il est donc efficace.
2. Si $r_{crit} \geq r_e$ Lorsque
 - $r_e < r < r_c$ $\frac{dR}{dr} < 0$ R décroît avec r
 - $r > r_c$ $\frac{dR}{dr} > 0$ R croît avec r

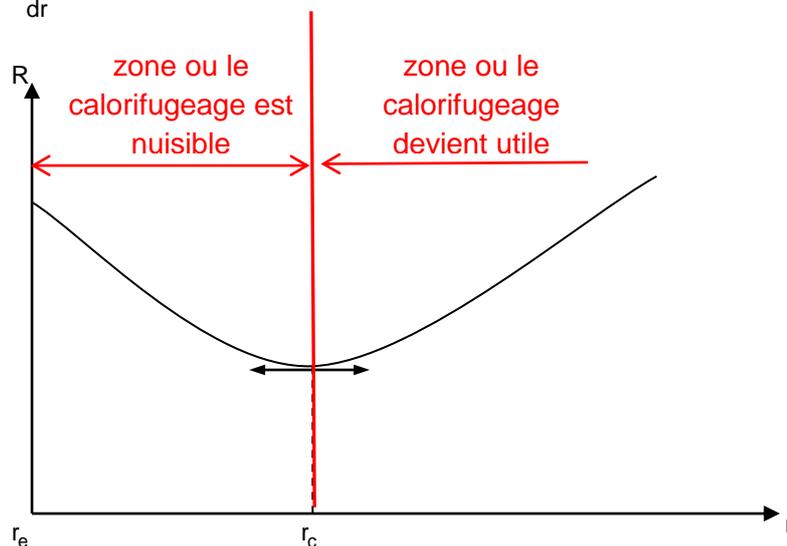


Fig 3.9 : Variation de la résistance thermique totale R avec le rayon extérieur du calorifugeage

Conclusion : Pour calorifuger, il faut augmenter la résistance thermique. Si le rayon externe du calorifugeage est inférieur à r_{crit} , il est non seulement inutile, mis nuisible d'ajouter un calorifugeage. En fait comme l'illustre la figure ci-dessus, il faut largement dépasser r_{crit} avant

que le calorifugeage ne devienne utile. C'est le cas classique des calorifugeages de petites conduites.

3.2.2 Cas d'une sphère creuse à surfaces latérales isothermes :

Ce problème est semblable au précédent. Une sphère creuse, de rayons intérieur R_1 , et extérieur R_2 , a ses surfaces limites à des températures uniformes et constantes T_1 et T_2 . Les isothermes sont des sphères concentriques. La température n'est fonction que du rayon « r ». Le système s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0 \\ T(R_1) = T_1 \\ T(R_2) = T_2 \end{cases}$$

En posant $u = \frac{dT}{dr}$, on obtient l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$r \cdot \frac{du}{dr} + 2 \cdot u = 0$$

Dont la solution est $u = \frac{C}{r^2}$ fournit après intégration, l'expression de la distribution radiale des températures :

$$T(r) = A + \frac{B}{r}$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées à partir des conditions aux limites sur R_1 et R_2 .

$$T_1 = A + \frac{B}{R_1} \text{ et } T_2 = A + \frac{B}{R_2}$$

Soit finalement :

$$T(r) = T_1 + (T_1 - T_2) \cdot \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

On déduit de la loi de Fourier la densité de flux :

$$\varphi_r = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} = +\lambda \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Puis le flux thermique ϕ traversant chaque surface sphérique de rayon « r »:

$$\phi = \pi \cdot r^2 \cdot \varphi_r = \frac{\pi \cdot \lambda}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \cdot (T_1 - T_2)$$

D'où la résistance thermique de la sphère creuse :

$$R = \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{\pi \cdot \lambda}$$

Cas particulier : (Cas d'une sphère mince)

Si la sphère est mince, d'épaisseur « e », on obtient :

$$\varphi_r = +\lambda \cdot \frac{(T_1 - T_2) \cdot R_1 \cdot (R_1 + e)}{e} \cdot \frac{1}{r^2}$$

De même :

$$\phi = \frac{\pi \cdot \lambda \cdot R_1 \cdot (R_1 + e)}{e} \cdot (T_1 - T_2)$$

Chapitre 4

Conduction vive :

Ce phénomène peut être présenté dans les différents cas suivants :

- Fil conducteur traversé par un courant électrique ;
- Plaque chauffante ; une source de chaleur par unité de volume uniforme ;
- Réacteur nucléaire.

Cette chaleur dégagée de la source peut être uniforme ou non uniforme (liée au temps, à l'espace, etc...).

Dans notre cas, on étudie la conduction vive avec une source de chaleur par unité de volume uniforme ($p = \text{Constante}$).

4.1 Cas d'une plaque plane :

L'équation générale de la conduction de la chaleur en régime permanent (stationnaire) avec source de chaleur (conduction vive) se réduit donc à l'équation de **POISSON** :

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0$$

Ou encore : $\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{p}{\lambda} = 0$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) = -\frac{p}{\lambda}$$

$$d \left(\frac{dT}{dx} \right) = -\frac{p}{\lambda} \cdot dx$$

$$\left(\frac{dT}{dx} \right) = -\frac{p}{\lambda} \cdot x + A$$

$$T(x) = -\frac{p}{2 \cdot \lambda} \cdot x^2 + A \cdot x + B$$

Remarque : On remarque que l'allure de $T(x)$ est parabolique contrairement à l'allure linéaire dans le cas d'une conduction morte ($p=0$).

Les constantes d'intégration A et B sont calculées à partir des conditions aux limites (Conditions de **DIRICHLET** c-à-d des températures imposées).

$$\left\{ \begin{array}{ll} T = T_{p1} & \text{pour } x = 0 \\ T = T_{p2} & \text{pour } x = e \end{array} \right.$$

$$B = T_{p1}$$

$$A = \frac{(T_{p2} - T_{p1})}{e} + \frac{p \cdot e}{2 \cdot \lambda}$$

Donc : $T(x) = \frac{p \cdot e^2}{2 \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{x}{e} - \frac{x^2}{e^2} \right) + (T_{p2} - T_{p1}) \cdot \frac{x}{e} + T_{p1}$

Remarque :

D'après l'allure de $T(x)$ qui est parabolique, on peut avoir une valeur de température maximale ou minimale suivant qu'on a une source de chaleur ($p > 0$ chauffage) ou un puits de chaleur ($p < 0$ refroidissement).

La température est maximale pour la position tel que :

$$x_{max} = \frac{e}{2} - \frac{1}{p \cdot e} (T_{p1} - T_{p2})$$

Le flux thermique ϕ_x traversant la plaque est :

$$\phi_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{dT}{dx} = -\lambda \cdot S \cdot \left\{ \frac{p \cdot e^2}{2 \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{1}{e} - \frac{2 \cdot x}{e^2} \right) + \frac{(T_{p2} - T_{p1})}{e} \right\}$$

Ou encore :

$$\phi_x = p \cdot S \cdot x + S \cdot \left(\frac{\lambda \cdot (T_{p2} - T_{p1})}{e} - \frac{p \cdot e}{2} \right)$$

Remarque : On remarque que le flux de chaleur varie linéairement avec « x ».

4.2 Cas d'un cylindre plein avec source interne de chaleur :

On suppose que $p = \text{constante}$, le régime est permanent et que le transfert de chaleur est radial. L'équation de la chaleur s'écrira alors :

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0 \quad \text{Équation de POISSON}$$

Puisque le transfert de chaleur est radial, alors le **laplacien** en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = -\frac{p}{\lambda}$$

Pour résoudre cette équation différentielle, on utilise le changement de variable suivant :

En posant : $z = \frac{dT}{dr}$, on obtient l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{dz}{dr} + \frac{z}{r} = -\frac{p}{\lambda}$$

Cette dernière est une équation différentielle du premier ordre mais à coefficients variables.

Pour la résoudre, on utilise alors la méthode de superposition des solutions :

$$z = z_{homogène} + z_{particulière}$$

Où $z_{homogène}$ représente la solution de l'équation homogène (sans second membre) ;

$$\frac{dz}{dr} + \frac{z}{r} = 0$$

En séparant les variables, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dr}{r}$$

En intégrant, on obtient : $z_{homogène} = \frac{A}{r}$ où A est une constante strictement positive.

Pour déterminer la solution particulière $z_{particulière}$, on utilise la méthode de variation de

la constante d'intégration : c-à-d, on pose $A = A(r)$ donc $z_{particulière} = \frac{A(r)}{r}$

$$\frac{dz_{part}}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dA}{dr} - \frac{A(r)}{r^2}$$

Par substitution des équations x et y dans z , on obtient :

$$\left(\frac{A'(r)}{r} - \frac{A(r)}{r^2} \right) + \frac{A(r)}{r^2} = -\frac{p}{\lambda}$$

En séparant les variables, on trouve :

$$dA(r) = -\frac{p}{\lambda} \cdot r \cdot dr$$

Par intégration, on a :

$$A(r) = -\frac{p}{2 \cdot \lambda} \cdot r^2 + B$$

Donc, la solution particulière devient :

$$z_{part} = \frac{A(r)}{r} = \frac{\left(-\frac{p}{2 \cdot \lambda} \cdot r^2 + B \right)}{r} = -\frac{p}{2 \cdot \lambda} \cdot r + \frac{B}{r}$$

La superposition des solutions homogènes et particulière, nous donne :

$$z = z_h + z_{part} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r} - \frac{p}{2 \cdot \lambda} \cdot r = \frac{C}{r} - \frac{p}{2 \cdot \lambda} \cdot r$$

Où C=A+B une nouvelle constante

$$\text{Or } z = \frac{dT}{dr} = \frac{C}{r} - \frac{p}{2 \cdot \lambda} \cdot r$$

$$\text{Donc : } T(r) = C \cdot \ln r - \frac{p}{4 \cdot \lambda} \cdot r^2 + D$$

Où C et D sont 2 constantes d'intégration à déterminer par les conditions aux limites.

a- Au centre du cylindre (pour $r=0$), la température doit être finie $\Rightarrow C=0$.

b- Pour $r = R$ (où R rayon extérieur du cylindre), $T = T_2$. $\Rightarrow D = T_2 + \frac{p}{4 \cdot \lambda} \cdot R^2$

Le profil radial de température s'écrit alors :

$$T(r) = T_2 + \frac{p}{4 \cdot \lambda} \cdot (R^2 - r^2)$$

La température au centre du cylindre s'obtient en substituant dans la dernière équation r par 0 :

$$T_{max} = T(r = 0) = T_0 = T_2 + \frac{p}{4 \cdot \lambda} \cdot R^2$$

Le profil radial de température s'écrira donc en fonction de T_{max} comme suit:

$$T(r) = T_{max} - \frac{p}{4 \cdot \lambda} \cdot r^2$$

Le flux thermique à travers une surface $S(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L$ du cylindre (où L est la longueur du cylindre) est donné par :

$$\phi_r = \underbrace{(\pi \cdot r^2 \cdot L)}_{\text{volume}} \cdot \underbrace{p}_{\text{puissance volumique}} = -\lambda \cdot \underbrace{(2 \cdot \pi \cdot r \cdot L)}_{\text{surface}} \cdot \frac{dT}{dr}$$

On remarque que le flux radial varie en fonction de r .

4.3 Cas d'une sphère pleine avec source interne de chaleur :

On suppose que $p = \text{constante}$, le régime est permanent et que le transfert de chaleur est radial. L'équation de la chaleur s'écrira alors :

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0 \quad \text{Équation de POISSON}$$

Puisque le transfert de chaleur est radial, alors le **laplacien** en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = -\frac{p}{\lambda}$$

Pour résoudre cette équation différentielle, on utilise le **changement de variable** suivant :

En posant : $z = \frac{dT}{dr}$, on obtient l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{dz}{dr} + 2 \cdot \frac{z}{r} = -\frac{p}{\lambda}$$

Cette dernière est une équation différentielle du premier ordre mais à coefficients variables.

Pour la résoudre, on utilise alors la méthode de superposition des solutions :

$$z = z_{\text{homogène}} + z_{\text{particulière}}$$

Où $z_{\text{homogène}}$ représente la solution de l'équation homogène (sans second membre) ;

$$\frac{dz}{dr} + 2 \cdot \frac{z}{r} = 0$$

En séparant les variables, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{dz}{z} = -2 \cdot \frac{dr}{r}$$

En intégrant, on obtient : $z_{\text{homogène}} = \frac{A}{r^2}$ où A est une constante strictement positive.

Pour déterminer la solution particulière $z_{\text{particulière}}$, on utilise **la méthode de variation de la constante d'intégration** : c-à-d, on pose $A = A(r)$ donc $z_{\text{particulière}} = \frac{A(r)}{r^2}$

$$\frac{dz_{part}}{dr} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dA}{dr} - 2 \cdot \frac{A(r)}{r^3}$$

Par substitution des équations x et y dans z , on obtient :

$$\left(\frac{A'(r)}{r^2} - 2 \cdot \frac{A(r)}{r^3} \right) + 2 \cdot \frac{A(r)}{r^3} = -\frac{p}{\lambda}$$

En séparant les variables, on trouve :

$$dA(r) = -\frac{p}{\lambda} \cdot r^2 \cdot dr$$

Par intégration, on a :

$$A(r) = -\frac{p}{3 \cdot \lambda} \cdot r^3 + B$$

Donc, la solution particulière devient :

$$z_{part} = \frac{A(r)}{r^2} = \frac{\left(-\frac{p}{3 \cdot \lambda} \cdot r^3 + B \right)}{r^2} = -\frac{p}{3 \cdot \lambda} \cdot r + \frac{B}{r^2}$$

La superposition des solutions homogènes et particulière, nous donne :

$$z = z_h + z_{part} = \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^2} - \frac{p}{3 \cdot \lambda} \cdot r = \frac{C}{r^2} - \frac{p}{3 \cdot \lambda} \cdot r$$

Où C=A+B une nouvelle constante

Or
$$z = \frac{dT}{dr} = \frac{c}{r^2} - \frac{p}{3 \cdot \lambda} \cdot r$$

Donc :

$$T(r) = -\frac{c}{r} - \frac{p}{6 \cdot \lambda} \cdot r^2 + D$$

Où C et D sont 2 constantes d'intégration à déterminer par les conditions aux limites.

c- Au centre de la sphère (pour r=0), la température doit être finie $\Rightarrow C=0$.

d- Pour $r = R$ (où R rayon extérieur de la sphère), $T = T_2 \Rightarrow D = T_2 + \frac{p}{6 \cdot \lambda} \cdot R^2$

Le profil radial de température s'écrit alors :

$$T(r) = T_2 + \frac{p}{6 \cdot \lambda} \cdot (R^2 - r^2)$$

La température au centre du cylindre s'obtient en substituant dans la dernière équation r par 0 :

$$T_{max} = T(r = 0) = T_0 = T_2 + \frac{p}{6 \cdot \lambda} \cdot R^2$$

Le profil radial de température s'écrira donc en fonction de T_{max} comme suit:

$$T(r) = T_{max} - \frac{p}{6 \cdot \lambda} \cdot r^2$$

Le flux thermique à travers une surface $S(r) = 2. \pi. r. L$ du cylindre (où L est la longueur du cylindre) est donné par :

$$\phi_r = \underbrace{\left(\frac{4}{3} \pi. r^3\right)}_{\text{volume}} \cdot \underbrace{p}_{\text{puissance volumique}} = -\lambda. \underbrace{(4. \pi. r^2)}_{\text{surface}} \cdot \frac{dT}{dr}$$

On remarque que le flux radial varie en fonction de r .

Chapitre 5

Transfert de la chaleur par conduction en régime variable

5.1 Conduction unidirectionnelle en régime variable sans changement d'état :

5.1.1 Milieu à température uniforme (méthode du gradient nul) :

On va étudier le transfert de chaleur vers un milieu à température uniforme, ce qui est a priori contradictoire car il est nécessaire qu'il y ait un gradient thermique pour qu'il se produise un transfert de chaleur. Cette approximation du milieu à température uniforme peut néanmoins être justifiée dans certains cas que l'on va préciser. Soit par exemple la trempe d'une bille métallique qui consiste à immerger une bille initialement à la température T_i dans un bain à température T_0 maintenue constante. Si l'on suppose que la température à l'intérieur de la bille est uniforme, ce qui sera d'autant plus vrai que sa dimension est petite et sa conductivité thermique élevée, on peut écrire le bilan thermique de cette bille entre deux instants t et $t + dt$:

$$-h \cdot S \cdot (T - T_0) = \rho \cdot V \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} \text{ soit } \frac{dT}{(T-T_0)} = -\frac{h \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c} \cdot dt$$

D'où :

$$\boxed{\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-\frac{h \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c} \cdot t\right)}$$

On remarque que le groupement $\frac{\rho \cdot V \cdot c}{h \cdot S}$ est homogène à un temps, on l'appellera τ la constante de temps du système :

$$\boxed{\tau = \frac{\rho \cdot V \cdot c}{h \cdot S}}$$

Cette grandeur est fondamentale dans la mesure où elle donne l'ordre de grandeur de temps du phénomène physique, on a en effet :

$$\boxed{\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Il est toujours intéressant en physique de présenter les résultats sous forme adimensionnelle, deux nombres adimensionnels sont particulièrement important en régime variable :

Le nombre de Biot : $Bi = \text{nombre de Biot} = \frac{\text{Résistance thermique interne (Conduction)}}{\text{Résistance thermique externe (Convection)}} = \frac{l_c}{\frac{\lambda \cdot S}{1}}$

Où : l_c est la dimension caractéristique du milieu. $l_c = \frac{\text{Volume corps}}{\text{Surface d'échange}}$

Tableau 2 : Exemple de dimensions caractéristiques de quelques corps

Forme géométrique du corps	Dimension caractéristique l_c
Plaque d'épaisseur « 2.L »	L
Cylindre long de rayon « r »	$r/2$
Sphère de rayon « r »	$r/3$
Cube d'arrêt « a »	$a/6$

Remarque importante :

- L'hypothèse d'uniformité de la température est justifiée lorsque $Bi < 0,1$ (le corps est dit alors mince), alors $T = T(t)$
- Si $Bi > 0.1$ le corps est dit épais, alors $T = T(x, t)$

Le nombre de Fourier : $Nombre\ de\ Fourier = Fo = \frac{D_{th} \cdot t}{l_c^2}$

Le nombre de Fourier caractérise la pénétration de la chaleur en régime variable. La définition de ces deux nombres permet d'écrire l'expression de la température de la bille sous la forme :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp(-Bi \cdot Fo)$$

La connaissance du produit des nombres de Biot et de Fourier permet de déterminer l'évolution de la température de la sphère. On considère généralement qu'un système tel que $Bi < 0,1$ peut être considéré comme étant à température uniforme, le critère $Bi < 0,1$ est appelé le critère d'« accommodation thermique ».

Exemple d'application :

Déterminer le temps nécessaire pour qu'une petite pièce d'aluminium moulée initialement à 16 °C soit portée à 510 °C par les gaz d'un haut fourneau à 1204 °C. La dimension caractéristique de la pièce $l_c = \frac{V}{S}$ est égale à 15 cm et le coefficient de convection entre la pièce et les gaz est 85 W/m² K. On prendra comme valeur de conductivité thermique de l'alliage d'aluminium 210 W/mK. De plus : $\rho_{aluminium} = 2700 \text{ Kg}/m^3$ et $c_{aluminium} = 940 \text{ J}/Kg.K$

Solution :

Calcul du nombre de Biot : $Bio = \frac{h \cdot l_c}{\lambda} = \frac{h \cdot (\frac{V}{S})}{\lambda} = \frac{85 \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{210} = 0.0607 \Rightarrow Bio < 0.1$

La résistance interne est négligeable.

Prenons la formule du solide soumis à une réponse indicielle (méthode du gradient nul)

$$\frac{T(t)-T_0}{T_i-T_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \Rightarrow t = -\tau \cdot \ln\left(\frac{T(t)-T_0}{T_i-T_0}\right)$$

Calcul de τ :

$$\tau = \frac{\rho \cdot V \cdot c}{h \cdot S} = \frac{\rho \cdot c \cdot l_c}{h} = \frac{2700 \cdot 940 \cdot 0.15}{85} = 4479 \text{ s}$$

Calcul du temps t :

$$t = -\tau \cdot \ln\left(\frac{T(t)-T_0}{T_i-T_0}\right) = -4479 \cdot \ln\left(\frac{510-1204}{16-1204}\right) = 2408 \text{ s} = 0.668 \text{ h}$$

Le temps nécessaire pour chauffer brusquement la pièce moulée de 16 °C à 510 °C est 2408 s.

Chapitre 6

Les ailettes

6.1 Généralités :

L'ailette comme son nom l'indique est un appendice que l'on dispose sur un dispositif que l'on désire refroidir ou chauffer efficacement. L'idée est d'augmenter la surface d'échange. On peut voir des ailettes sur les radiateurs de chauffage domestique, sur le radiateur de voitures, sur les microprocesseurs dans les systèmes électroniques.

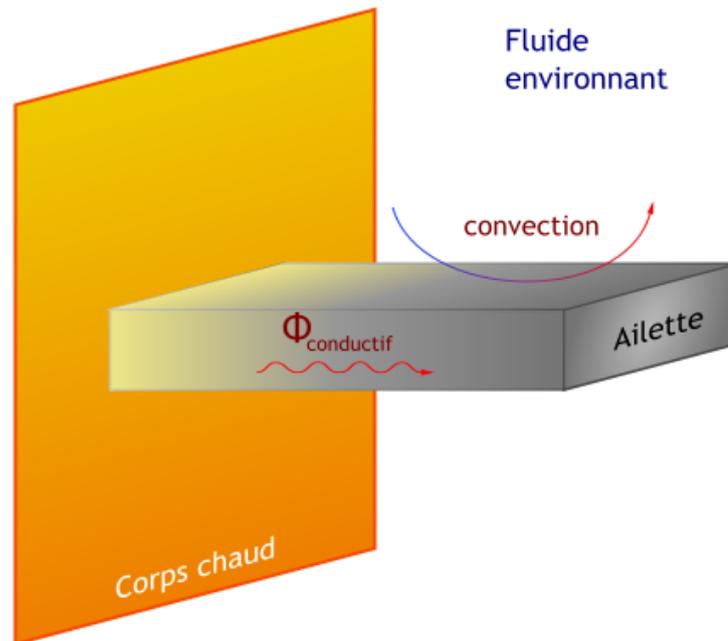


Fig 6.1 : Schéma d'une ailette à section constante

$$q(x) - q(x + dx) - qv = 0$$

Ou encore :

$$-\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_x dt + \lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} dt - h \cdot dS_p \cdot (T(x) - T_f) \cdot dt = 0$$

où $dS_p = p \cdot dx$ Avec p : périmètre de la section latérale de l'ailette

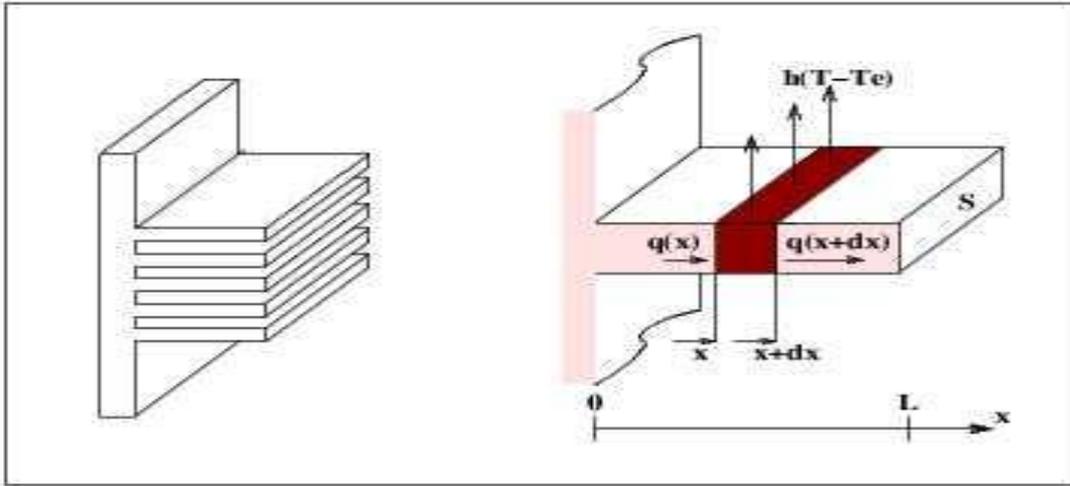


FIG. 1.2 – Géométrie et modélisation d'une ailette de radiateur.

Fig 6.2 : Géométrie et modélisation d'une ailette de radiateur

Ou encore :

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{h \cdot p}{\lambda \cdot S} \cdot (T(x) - T_f) = 0$$

Posons : $\theta = T - T_F$ et $\omega = \sqrt{\frac{h \cdot p}{\lambda \cdot S}}$

L'équation devient finalement :

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - \omega^2 \cdot \theta = 0}$$

La solution de l'équation différentielle du second ordre est du type :

$$\theta = B_1 \cdot ch(\omega \cdot x) + B_2 \cdot sh(\omega \cdot x)$$

On détermine B_1 et B_2 à partir des conditions aux limites suivantes :

- $x=0$ implique $\theta = T_0 - T_F = \theta_0$ donc $B_1 = \theta_0$
- $x=L$ en bout de l'ailette, on fait une hypothèse simplificatrice : $\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0$ (on néglige l'échange de chaleur en bout d'ailette) , ce qui implique que :

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = \theta_0 \cdot sh(\omega \cdot L) + B_2 \cdot ch(\omega \cdot L) = 0 \text{ donc : } B_2 = -\theta_0 \cdot th(\omega \cdot L)$$

La distribution de température s'écrit alors :

$$\theta = \theta_0 \cdot \left[ch(\omega \cdot x) - \frac{sh(\omega \cdot L)}{ch(\omega \cdot L)} \right] = \theta_0 \cdot \frac{ch[\omega(L-x)]}{ch(\omega \cdot L)}$$

$$T(x) = T_F + (T_0 - T_F) \cdot \frac{ch[\omega(L-x)]}{ch(\omega \cdot L)}$$

La température à l'extrémité ($x=L$) s'écrit :

$$T_L = T_F + (T_0 - T_F) \cdot \frac{1}{ch(\omega \cdot L)}$$

L'écoulement de chaleur à l'intérieur de l'ailette, pour $x=0$ est donné par :

$$\phi_0 = -\lambda \cdot S \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \lambda \cdot S \cdot \omega \cdot (T_0 - T_F) \cdot th(\omega \cdot L)$$

6.2 Rendement de l'ailette :

Le rendement d'une ailette est défini comme étant le rapport entre la chaleur réellement transmise à travers l'ailette et la chaleur qui serait transmise par convection à partir de la surface de base de la tige si l'ailette était supprimée.

$$\eta = \frac{\lambda \cdot S \cdot \omega \cdot (T_0 - T_F) \cdot th(\omega \cdot L)}{h \cdot S \cdot (T_0 - T_F)} = \sqrt{\frac{P \cdot \lambda}{h \cdot S}} \cdot th(\omega \cdot L)$$

6.3 Efficacité d'une ailette:

L'efficacité peut être définie comme le rapport entre la chaleur réellement transmise à travers l'ailette et la chaleur qui serait transmise par convection si toute l'ailette était à la température du mur T_0 .

$$\epsilon = \frac{\lambda \cdot S \cdot \omega \cdot (T_0 - T_F) \cdot th(\omega \cdot L)}{h \cdot P \cdot L \cdot (T_0 - T_F)} = \frac{th(\omega \cdot L)}{\omega \cdot L}$$

Remarquons que « ϵ » tend vers 1 lorsque $\omega \cdot L$ devient grand ce qui limite quelque peu l'intérêt pratique de cette notion d'efficacité.

6.4 Problème de la barre encastrée : La barre encastrée se traite comme l'ailette avec quelques nuances. En général on ne néglige pas la transmission de chaleur en bout de barre.

Considérons une barre cylindrique encastrée de longueur L et de rayon R

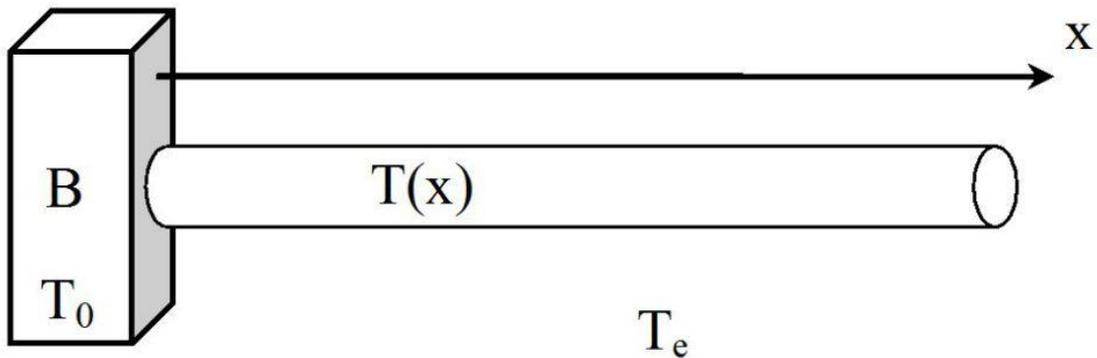


Fig 6.3 : Problème de la barre encastrée

On néglige toutes les variations de température sur une section droite de la barre et on suppose que T est fonction de la seule distance x par rapport au mur (voir **Fig.6.3**).

On pose :

- T_e température du fluide entourant la barre
- T_0 température du mur, et donc de la barre en $x=0$
- λ conductivité thermique de la barre
- h coefficient d'échange moyen entre la barre et le fluide

Considérons le petit volume en forme de cylindre de rayon R et de longueur dx :

- Il reçoit de la chaleur par conduction du côté du mur, sur une surface $S = \pi \cdot R^2$.
- Il cède de la chaleur par conduction par la face opposée, sur la même surface S .
- Il cède de la chaleur par convection sur une surface $S_p = P \cdot dx$ où $P = 2 \cdot \pi \cdot R$ est le périmètre.

Sur ce petit volume, le bilan thermique va s'écrire :

$$\varphi_x \cdot S - \varphi_{x+dx} \cdot S - h \cdot S_p \cdot (T - T_e) = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h \cdot P}{\lambda \cdot S} (T - T_e) = 0$$

En posant : $\theta = (T - T_e)$, $\omega = \sqrt{\frac{h.P}{\lambda.S}}$ et $\xi = \frac{x}{\omega}$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} - \theta = 0$$

La solution de l'équation du second ordre est du type :

$$\theta = A.ch(\xi) + B.sh(\xi)$$

On détermine les constantes A et B à partir des conditions aux limites :

- $x=0$ donne $\xi = 0$ et $\theta = (T_0 - T_e) = \theta_0$ donc $A = \theta_0$
- $x=L$ donne $\xi = \frac{L}{\omega}$ mais cette fois, on ne néglige pas le transfert de chaleur en bout de la barre.

On écrit que le flux de chaleur qui arrive par conduction à travers la section S est évacué par convection à travers la surface de l'extrémité S_L . Lorsque la barre est pleine, et que l'extrémité est plate S et S_L sont égaux, mais ils peuvent être différents (voir le doigt de gant). De même le coefficient convectif h_L peut être différent de h.

$$\varphi_L.S = h_L.S_L.(T_L - T_e) = -\lambda.S. \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L}$$

Si l'on remarque que :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\theta}{d\xi} \quad \text{Alors : } h_L.S_L.\theta_L = -\frac{\lambda.S}{\omega} \cdot \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=\frac{L}{\omega}}$$

$$h_L.S_L.\left(\theta_0.ch\left(\frac{L}{\omega}\right) + B.sh\left(\frac{L}{\omega}\right)\right) = -\frac{\lambda.S}{\omega}.\left(\theta_0.sh\left(\frac{L}{\omega}\right) + B.ch\left(\frac{L}{\omega}\right)\right)$$

On pose :

$\beta = \frac{h_L.\omega}{\lambda} \cdot \frac{S_L}{S}$ (Nombre sans dimension) et on trouve :

$$B = -\theta_0 \cdot \frac{sh\left(\frac{L}{\omega}\right) + \beta.ch\left(\frac{L}{\omega}\right)}{\beta.sh\left(\frac{L}{\omega}\right) + ch\left(\frac{L}{\omega}\right)}$$

Finalement :

$$\theta = \theta_0 \cdot \frac{\beta \cdot \text{sh}\left(\frac{L}{\omega} - \xi\right) + \text{ch}\left(\frac{L}{\omega} - \xi\right)}{\beta \cdot \text{sh}\left(\frac{L}{\omega}\right) + \text{ch}\left(\frac{L}{\omega}\right)}$$

$$T(x) = T_e + (T_0 - T_e) \cdot \frac{\beta \cdot \text{sh}\left(\frac{L-x}{\omega}\right) + \text{ch}\left(\frac{L-x}{\omega}\right)}{\beta \cdot \text{sh}\left(\frac{L}{\omega}\right) + \text{ch}\left(\frac{L}{\omega}\right)}$$

La température à l'extrémité ($x=L$) s'écrit :

$$T_L = T_e + \frac{(T_0 - T_e)}{\beta \cdot \text{sh}\left(\frac{L}{\omega}\right) + \text{ch}\left(\frac{L}{\omega}\right)}$$

Le calcul de l'écoulement de la chaleur pour $x=0$ donne :

$$\phi_0 = -\lambda \cdot S \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \lambda \cdot S \cdot \frac{(T_0 - T_e)}{\omega} \cdot \frac{\beta \cdot \text{ch}\left(\frac{L}{\omega}\right) + \text{sh}\left(\frac{L}{\omega}\right)}{\beta \cdot \text{sh}\left(\frac{L}{\omega}\right) + \text{ch}\left(\frac{L}{\omega}\right)}$$

Ou encore :

$$\phi_0 = \frac{\lambda \cdot S}{\omega} \cdot (T_0 - T_e) \frac{\beta + \text{th}\left(\frac{L}{\omega}\right)}{1 + \beta \cdot \text{th}\left(\frac{L}{\omega}\right)}$$

Chapitre 7

La convection

7.1 Généralités – Définitions :

Lorsque le transfert de chaleur s'accompagne d'un transfert de masse, il est appelé transfert par convection. Ce mode d'échange de chaleur existe au sein des milieux fluides ou lorsque un fluide circule autour d'un solide.

L'étude du transfert de chaleur par convection permet de déterminer les échanges de chaleur se produisant entre un fluide et une paroi.

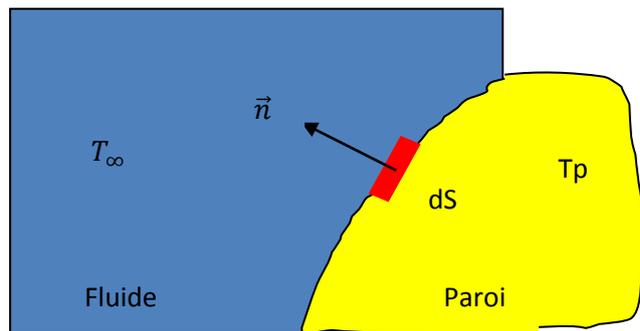


Fig 7.1 : Echange convectif entre une paroi et un fluide

La quantité de chaleur échangée par unité de temps dépend de plusieurs paramètres :

- la différence de température entre la paroi et le fluide ;
- la vitesse du fluide ;
- la capacité thermique massique du fluide ;
- la surface d'échange ;
- l'état de surface du solide ;
- sa dimension etc . . .

1- Selon le mécanisme qui génère le mouvement du fluide, on distingue :

- la convection naturelle ;
- la convection forcée.

La convection naturelle ou libre : Le fluide est mis en mouvement sous le seul effet : ☐ des différences de masses volumiques résultant des différences de températures sur les frontières ; d'un champ de forces extérieures (la pesanteur).

La convection forcée : Le mouvement du fluide est induit par une cause indépendante des différences de température (pompe, ventilateur...).

Compte tenu du lien entre le transfert de masse et le transfert de chaleur, il est nécessaire de considérer la nature du régime d'écoulement.

On distingue :

- Ecoulement en régime turbulent ;
- Ecoulement en régime laminaire

7.2 La loi de Newton : La loi de Newton donne l'expression de la quantité de chaleur δQ échangée entre la surface d'un solide à la température T_s et le fluide à la température T_f .

7.2.1 Coefficient d'échange par convection :

L'étude du transfert de chaleur par convection permet de déterminer les échanges de chaleur se produisant entre un fluide et une paroi.

La quantité de chaleur δQ qui traverse dS pendant l'intervalle de temps dt , peut s'écrire :

$$\delta Q = h \cdot (T_p - T_\infty) \cdot dS \cdot dt$$

Où h est le coefficient d'échange par convection, il s'exprime en $W/(m^2.K)$;
 δQ s'exprime en Joules et $\delta Q/dt$ en Watts ;

Quelque soit le type de convection (libre ou forcée) et quelque soit le régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent), le flux de chaleur transmis est donné par la relation dite **loi de Newton** :

$$\frac{\delta Q}{dt} = h \cdot (T_p - T_\infty) \cdot dS$$

Le problème majeur à résoudre avant le calcul du flux de chaleur consiste à déterminer h qui dépend de nombreux paramètres :

- caractéristiques du fluide,
- nature de l'écoulement,
- la température,
- la forme de la surface d'échange,...

7.2.2 Ordre de grandeur du coefficient h pour différentes configurations :

Tableau.3 : Ordre de grandeur du coefficient « h » pour différentes configurations

Configurations	h ($W.m^{-2}.K^{-1}$)
Convection naturelle:	
- Plaque verticale de hauteur 0,3 m dans l'air	4,5
- Cylindre horizontal de diamètre 5 cm dans l'air.	6,5
- Cylindre horizontal de diamètre 5 cm dans l'eau	890
Convection forcée:	
- Courant d'air à 2 m/s sur plaque carrée de 2 m de coté	12

- Courant d'air à 35 m/s sur plaque carrée de 0,75 m de coté	75
- Eau à 0,5 kg/s dans un tube de diamètre 2,5 cm.	3500
- Courant d'air à 50 m/s perpendiculaire/tube de 5 cm de diamètre	180
<u>Ébullition de l'eau:</u>	
- Dans un récipient	2500-35000
- En écoulement dans un tube	5000-10000

Ordres de grandeur du coefficient h (W.m⁻².K⁻¹)

- convection libre (air) 5 - 25 \square
- convection libre (eau) 100 - 900 \square
- convection forcée (air) 10 - 500 \square
- convection forcée (eau) 100 - 15 000 \square
- convection forcée (huile) 50 - 2 000 \square
- convection forcée (métaux fondus) 6 000 - 120 000
- \square convection forcée (eau bouillante) 2 500 - 25 000 \square
- Condensation de vapeur d'eau 50 000 - 100 000

7.3 Convection naturelle :

La particule chaude se met en mouvement et assure directement le transfert de la chaleur vers le milieu le plus froid : Le régime devient convectif.

Considérons une surface horizontale (S) à T_s au contact d'un fluide immobile à T_f . Une particule (P) du fluide de volume v au contact de la surface (S) a une température voisine de T_s .

7.4 Bilan des forces agissant sur une particule (P) :

- **La Poussée d'Archimède** : (La Poussée exercée sur un objet est égale au poids du fluide déplacé).

$$\vec{A} = \rho(T_F).V. g. \vec{k}$$

- **Le Poids** : $\vec{P} = -m. \vec{g} = -\rho(T_S).V. g. \vec{k}$

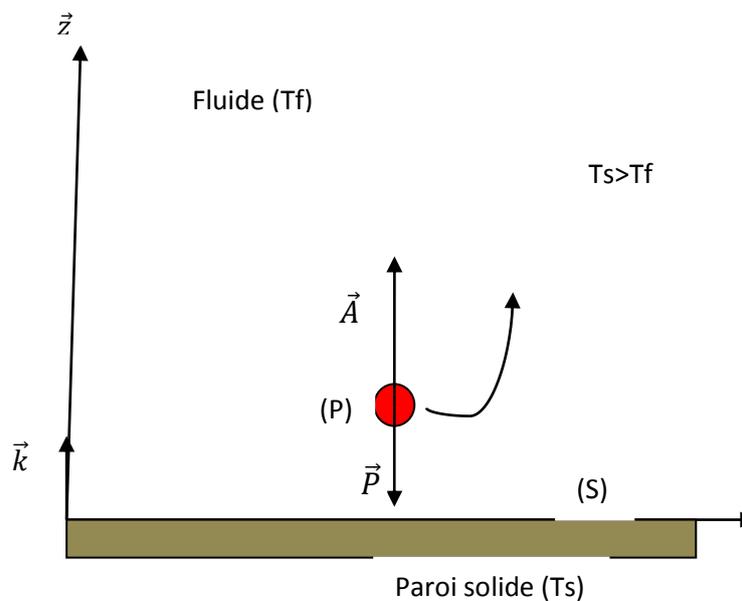


Fig 7.2 : Bilan des forces agissant sur une particule (P) en convection naturelle

Comme $T_s > T_f$ on a bien entendu: $\rho(T_s) > \rho(T_f) \Rightarrow |\vec{A}| > |\vec{P}|$

L'équation du mouvement de la particule au voisinage immédiat de S s'écrit, selon le principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F}_{ext} = m. \vec{\gamma}$

$$[\rho(T_f) - \rho(T_s)].V. g = \rho(T_s).V. \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$D'où : \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\rho(T_f) - \rho(T_s)}{\rho(T_s)} . g$$

L'équilibre mécanique impose que les parties les plus denses soient situées en dessous des moins denses. Les mouvements dans le fluide seront alors favorisés : c'est le phénomène de convection naturelle.

Les applications de la convection naturelle sont nombreuses : Chauffage d'une maison (cas d'un radiateur), Formation de courants océaniques, Formation des vents dans l'atmosphère ...

7.5 Etude du phénomène de convection :

Pour étudier la convection, nous allons traiter les points suivants :

- 1- Couches limites ;
2. Nature du coefficient de convection h_c ;
3. Détermination de h_c : Analyse dimensionnelle

7.5.1 Couches limites :

L'étude des écoulements au voisinage des parois est nécessaire pour la détermination des échanges thermiques par convection entre un solide et le fluide qui l'entoure.

Considérons un fluide qui s'écoule le long d'une surface S. Loin de la surface, le fluide a une vitesse moyenne V_m et une température moyenne T_m . Au voisinage immédiat de la surface, la température du fluide est très voisine de celle de la surface. La vitesse du fluide est celle de la surface. La vitesse du fluide est quasiment nulle.

Les diagrammes des vitesses et des températures, dans la direction y perpendiculaire à la surface, définissent une couche de fluide appelée 'couche limite' dont la température et la vitesse ont l'allure des courbes suivantes :

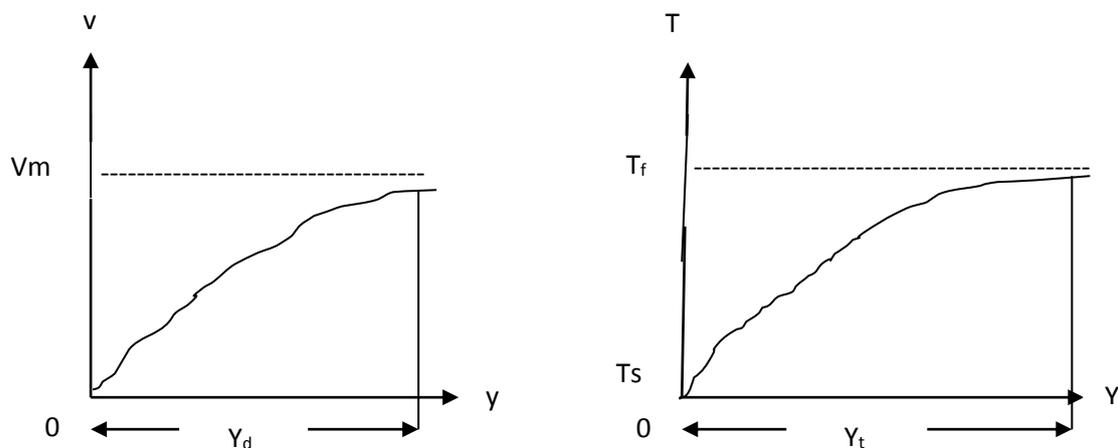


Fig 7.3: Diagramme des couches limites dynamique et thermique

On définit ainsi deux couches limites y_d et y_t de quelques mm d'épaisseur.

Le transfert de chaleur de la plaque vers le fluide résulte de 2 mécanismes :

- Au voisinage immédiat de la surface, le transfert se fait par conduction ;
- Loin de la surface le transfert résulte aussi du déplacement du fluide

Dans la couche limite, si on admet que le transfert de chaleur se fait essentiellement par conduction, donc sans transfert de matière dans la direction y, on peut écrire :

$$\delta Q = -\lambda_s \cdot \frac{\partial T_s}{\partial y} \cdot dA \cdot dt \text{ la quantité de chaleur à travers la surface (S)}$$

$$\delta Q = -\lambda_f \cdot \frac{\partial T_f}{\partial y} \cdot dA \cdot dt \text{ la quantité de chaleur à travers la couche limite}$$

Où :

T_s est la température de la surface du solide et T_f la température moyenne du fluide assez loin de la paroi.

$$T_f = T_f(y)$$

et

$$T_s = T_s(y)$$

T_f et T_s ne sont généralement pas connues pour pouvoir déduire dQ à partir des égalités (1) et (2). La loi de Newton permet de contourner cette difficulté en utilisant seulement la différence de températures ($T_s - T_f$).

$$\delta Q = h_c \cdot (T_s - T_f) \cdot dA \cdot dt$$

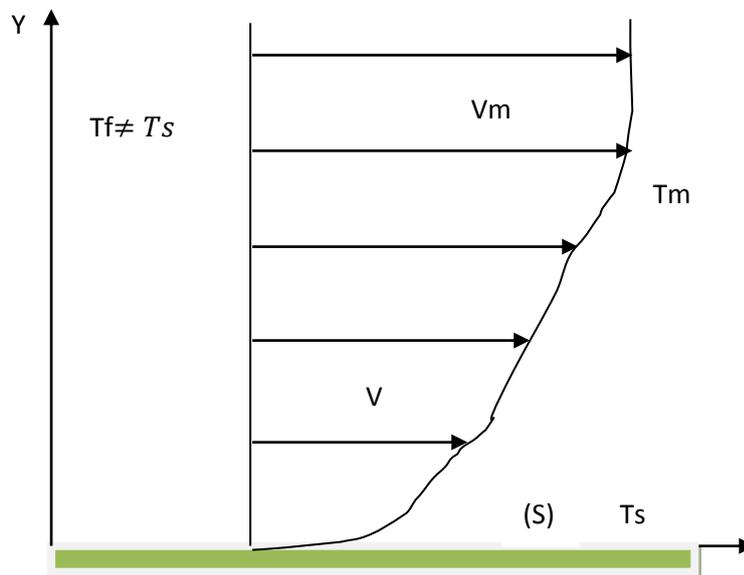


Fig 7.4 : Profil de vitesse au voisinage d'une plaque plane

7.5.2 Nature du coefficient de convection hc :

Le coefficient h_c dépend de plusieurs paramètres et l'échange de chaleur est d'autant plus actif, (h plus grand) lorsque :

- 1- la vitesse v d'écoulement du fluide est plus grande ;
- 2- sa masse volumique ρ est plus grande ;
- 3- sa chaleur spécifique c_p est plus grande ;
- 4- sa conductivité thermique λ (ou sa diffusivité thermique a) est plus forte ;
- 5- sa viscosité cinématique ν ($m^2.s^{-1}$) = μ/ρ est plus faible ;

h_c peut également dépendre des dimensions de la paroi, de sa nature et de sa forme.

En première approximation on peut écrire :

$$h_c = h_c(c_p, \lambda, \mu, D, \rho, \nu)$$

La nature de l'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent) a beaucoup d'importance sur le transfert de chaleur.

L'écoulement turbulent est beaucoup plus favorable aux échanges convectifs car le transfert chaleur par transfert de masse se superpose au Transfert-chaleur par conduction.

Le grand nombre de facteurs influant sur le transfert de chaleur par convection explique la difficulté de toute étude théorique, voire expérimentale, surtout si les coefficients qui caractérisent la matière varient avec la pression et la température. La grande variabilité des valeurs du coefficient de convection obtenues à partir des formules empiriques rendent leurs utilisation difficile voire impossible, sauf dans des domaines très limités et bien déterminés.

Tableau.4 : Valeurs du coefficient « h » pour différentes convections et fluides

Convection libre	5 – 25
Convection forcée (gaz)	25 - 250
Convection forcée (liquide)	50 - 20 000
Conv. chang. de phase (condens. ébul.)	2500 - 100 000

7.5.3 Détermination de hc par la méthode de l'analyse dimensionnelle :

Supposons que h_c soit une fonction des variables :

- c : chaleur spécifique ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)
- λ : conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
- μ : viscosité dynamique ($kg.m^{-1}.s^{-1}$)
- v : vitesse ($m.s^{-1}$)
- d : dimension caractéristique (m)

$\vartheta = \frac{\mu}{\rho}$ viscosité cinématique ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)

$$hc = hc(c, \lambda, \mu, d, v); (\text{W}.\text{m}^{-2}.\text{K}^{-1})$$

hc est aussi fonction implicite de la température T puisque ρ , c et λ en dépendent.

Ces variables n'interviennent pas toutes en même temps.

Utilisons les équations aux dimensions de chaque terme :

$$[\delta Q] = [\text{énergie}] = [\text{force}]. [\text{Déplacement}] = M.L^2.T^{-2}$$

$$[\text{Conductivité thermique } \lambda] = \frac{[\delta Q]}{L.T.\theta} = M.L.T^{-3}.\theta^{-1}$$

$$[\text{Vitesse } v] = \frac{L}{T} = L.T^{-1}$$

$$[\text{Chaleur spécifique } c] = \frac{[\delta Q]}{M.\theta} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{\theta} = L^2.T^{-2}.\theta^{-1}$$

$$[\text{viscosité dynamique } \mu] = \frac{M}{L.T} = M.L^{-1}.T^{-1}$$

L'équation aux dimensions de hc est obtenue à partir de la loi de **Newton** :

$$[h_c] = \frac{[\delta Q]}{[(T_P - T_F)].[dS].[dt]} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{\theta.L^2.T} = M.T^{-3}.\theta^{-1}$$

En écrivant [hc] sous la forme :

$$\boxed{[h_c] = [c]^a.[\lambda]^b.[\mu]^c.[d]^d.[v]^e}$$

$$[h_c] = (L^2.T^{-2}.\theta^{-1})^a.(M.L.T^{-3}.\theta^{-1})^b.(L^2.T^{-2}.\theta^{-1})^c.(L)^d.(L.T^{-1})^e$$

Les grandeurs fondamentales intervenant dans le calcul de hc sont :

la masse M, le temps T, la longueur L, la température θ

L'identification des exposants dans l'équation aux dimensions de hc fournit un système linéaire d'équations permettant de calculer a, b, c, d et e.

$$(L^2.T^{-2}.\theta^{-1})^a.(M.L.T^{-3}.\theta^{-1})^b.(M.L^{-1}.T^{-1})^c.(L)^d.(L.T^{-1})^e = M.T^{-3}.\theta^{-1}$$

Ainsi :

$$\text{l'exposant de M : } b + c = 1$$

$$\text{l'exposant de } \theta : a + b = 1$$

$$\text{l'exposant de L : } 2a + b - c + d + e = 0$$

$$\text{l'exposant de T : } 2a + 3b + c + e = 3$$

La résolution des équations aux dimensions fait apparaître des nombres sans dimension très utiles dans l'étude de la mécanique des fluides et en particulier dans les phénomènes convectifs.

Ces nombres sont en particulier :

- 1 - Le nombre de **Reynolds**
- 2 - Le nombre de **Nusselt**
- 3 - Le nombre d' **Eckert**
- 4 - Le nombre de **Grashof**
- 5 - Le nombre de **Prandtl**

1 Le nombre de Reynolds :

Le régime d'écoulement d'un fluide peut être laminaire ou turbulent. Le passage d'un régime à un autre est caractérisé par **le nombre de Reynolds :**

$$Re = \frac{v \cdot d}{\vartheta}$$

L'expérience montre que pour Re inférieur à une valeur critique Rec, l'écoulement dans une conduite est toujours laminaire.

On peut admettre la valeur 2200 pour Rec.

2 Le nombre de Nusselt :

Il caractérise l'importance de la convection par rapport à la conduction :

C'est le rapport de la quantité de chaleur échangée par convection $h \cdot S \cdot \Delta T$ à une quantité de chaleur échangée par conduction $\lambda \cdot S \cdot \Delta T / d$.

$$Nu = \frac{h \cdot S \cdot \Delta T}{\lambda \cdot S \cdot \frac{\Delta T}{d}} = \frac{h \cdot d}{\lambda}$$

Remarque:

Nu est fonction directe de hc, sa connaissance permet de déterminer la valeur de hc.

3 Le nombre d'Eckert :

Caractérise la dissipation d'énergie par frottement au sein du fluide (dégradation de l'énergie mécanique en chaleur).

$$Ec = \frac{v^2}{c_p \cdot \Delta T}$$

4 Le nombre de Grashof :

Caractérise la force de viscosité du fluide.

$$Gr = \frac{g \cdot d^3 \cdot \beta_p \cdot \Delta T}{\nu^2}$$

Où : β_p : facteur de dilatation volumique du fluide.

5 Le nombre de Prandtl :

Caractérise la distribution des vitesses par rapport à la distribution de la température.

$$Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda}$$

7.5.4 Méthode pratique de calcul de hc :

Avant de procéder au calcul de hc il faut bien savoir :

- 1- si le fluide est liquide ou gaz
- 2- l'intervalle de température du fluide
- 3- s'il s'agit d'une convection naturelle ou forcée
- 4- si le régime d'écoulement est laminaire ou turbulent.
- 5- si le fluide est en contact avec une surface plane, circule entre deux surfaces planes ou circule dans un tube...

Les différentes phases de calcul :

- Calculer Re et le comparer à Rec ;
- Si $Re < Rec$ le régime est dit laminaire, $Re > Rec$ le régime est dit turbulent ;
- Utiliser l'une des formules empiriques données pour déterminer hc ;
- Calculer δQ par la formule de Newton et intégrer pour avoir **Q**.

Formules utilisées :

a - **Écoulement tubulaire** : Nombre de Reynolds critique : **Rec = 2200**

Généralement les écoulements sont forcés et le régime est turbulent et

$$Nu = 0.023 \cdot Re^{4/3} \cdot Pr^{1/3}$$

Formule connue sous le nom '**formule de 'Colburn'**'.

Avec :

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{v \cdot \rho \cdot d}{\mu}$$

Où d est le diamètre du tube.

b - Écoulement plan :

Nombre de Reynolds critique : **Rec = 3.105**

Convection naturelle:

Écoulement laminaire : $Nu = 0,479 \cdot Gr^{1/4}$, $Re < Rec$

Écoulement laminaire : $Nu = 0,13 \cdot (Gr \cdot Pr)^{1/3}$, $Re > Rec$

Convection forcée:

Écoulement turbulent : $Nu = 0,66 Pr^{1/3} Re^{1/2}$, $Re < Re_c$

Écoulement turbulent : $Nu = 0,036 Pr^{1/3} Re^{4/5}$, $Re > Re_c$

Exemple de calcul :

De l'air à 5 °C circule sur une surface plane de 75 cm de long et 30 cm de large à la température 71 °C, avec une vitesse moyenne de 26,8 m/s.

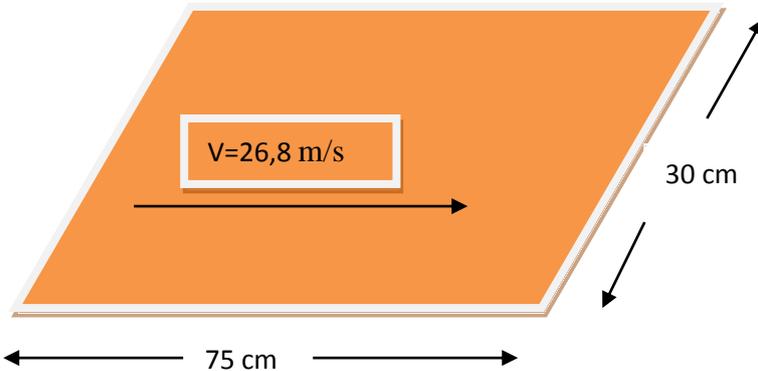


Fig 7.5 : Etude de la convection forcée autour d'une plaque plane

Calculer la puissance échangée entre l'air et la surface ?

Données :

Température de l'air : $T_{air} = 5 \text{ °C}$

Masse volumique de l'air : $\rho = 1,136 \text{ kg/m}^3$

Chaleur spécifique isobare de l'air : $c_p = 1 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Viscosité dynamique de l'air : $\mu = 1,91 \cdot 10^{-5} \text{ Poiseuille (kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1})$

Conductivité de l'air : $\lambda = 0,027 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Réponse :

Calcul du nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{v \cdot \rho \cdot d}{\mu} = \frac{26,8 \cdot 0,75 \cdot 1,136}{1,91 \cdot 10^{-5}} = 1,2 \cdot 10^6$$

$Re > 3 \cdot 10^5 \rightarrow$ le régime d'écoulement est turbulent.

$V = 26,8 \text{ m/s} = 96,5 \text{ km/h} \rightarrow$ la convection est forcée. Donc

Nombre de Nusselt : $Nu = 0,036 Pr^{1/3} Re^{4/5}$

Nombre de Prandtl :

$$Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda} = \frac{1,91 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3}{0,027} = 0,711$$

$Nu = 0,036 \cdot (0,711)^{1/3} \cdot (1,2 \cdot 10^6)^{4/5} = 2346$

$$h_c = \frac{Nu \cdot \lambda}{L} = \frac{0,027 \cdot 2346}{0,75} = 84,5 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$$\dot{Q} = hc \cdot (T_s - T_{air}) \cdot S = 84,5 \cdot (71 - 5) \cdot 0,75 \cdot 0,3 = 1255 \text{ W}$$

Bibliographie

- [1] Initiation aux transferts thermiques, J.F SACADURA. Techniques et documentation. Ed Lavoisier,1993
- [2] Cours et données de base Transferts thermiques. Mécanique des fluides anisothermes, J.Taine et J.-P.Petit, Ed Dunod 1995
- [3] Transfert thermique, cours de Nicolas ERRIEN, Département de Physique, Faculté des Sciences, université du Main.
- [4] COURS DE TRANSFERTS THERMIQUES -Conduction et rayonnement, Philippe Marty, GENIE DES PROCEDES Licence L3 Université Joseph Fourier, Grenoble,2012.
- [5] TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION ; Dr Slimane BOUGHALI, DEPARTEMENT DES SCIENCES PHYSIQUES, FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DES SCIENCES DE LA MATIERE, UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA,2013.
- [6] J. F. Sacadura coordonnateur, *Transfert thermiques : Initiation et approfondissement*, Lavoisier 2015.
- [7] Kreith, F.; Boehm, R.F.; et. al., *Heat and Mass Transfer, Mechanical Engineering Handbook* Ed. Frank Kreith, CRC Press LLC, 1999.
- [8] Bejan and A. Kraus, *Heat Handbook Handbook*, J. Wiley and sons 2003.
- [9] F. Kreith and M. S. Bohn. *Principles of Heat Transfer*. 6th ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2001.
- [10] Y. A. Cengel, *Heat and Mass Transfer*, Mc Graw Hill
- [11] H. D. Baehr and K. Stephan, *Heat and Mass transfer, 2nd revised edition*, Springer Verlag editor, 2006.
- [12] J. L. Battaglia, A. Kuzik et J. R. Puiggali, *Introduction aux transferts thermiques*, Dunod 2010
- [13] De Giovanni B. Bedat, *Transfert de chaleur*, Cépaduès, 2012
- [14] J. P. Holman. *Heat Transfer*. 9th ed. New York: McGraw-Hill, 2002.
- [15] F. P. Incropera and D. P. DeWitt. *Introduction to Heat Transfer*. 4th ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [16] J. Taine, J. P. Petit, *Transfert de chaleur et mécanique des fluides anisothermes*, Dunod, 1988.

[17] N. V. Suryanaraya. *Engineering Heat Transfer*. St. Paul, Minn.: West, 1995.

[18] H. D. Baehr and K. Stephan, *Heat and Mass transfer, 2nd revised edition*, Springer Verlag