



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE,
UNIVERSITE L'ARBI BEN M'HIDI
FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES APPLIQUEES
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



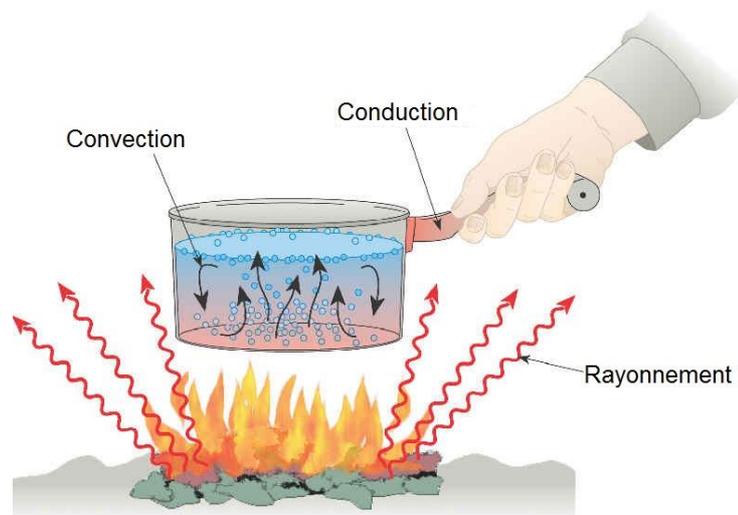
Polycopié de Cours

Transfert Thermique

Par

Dr Lyes Bordja

Email : Lyes_b2003@yahoo.fr



2013 /2014

Table des matières

Chapitre 1 : Généralités.

Introduction.....	1
1.2 Notion de chaleur.....	2
1.3 Notion de température.....	2
1.4 Mesures de température.....	2
1.5 Échelles de température.....	4
1.6 Unités de chaleur.....	4
1.7 Notion de capacité thermique massique.....	5
1.8 Notion d'enthalpie.....	6
1.9 Chaleur latente de changement d'état.....	7
1.10 Flux de chaleur.....	7
1.11 Transferts de chaleur.....	8

Chapitre 2 : Transferts thermiques par conduction

2.1 Introduction.....	12
2.2 Concepts fondamentaux	13
2.2.1 Champs thermiques.	13
2.2.2 Loi de Fourier (1822)	15
2.2.3 Orthogonalité du gradient et de l'isotherme.....	16
2.3 Conduction en régime permanent.....	16
2.3.1 Mur simple à faces isothermes.....	18
2.3.2 Paroi en contact avec deux fluides.....	19
2.3.3 Paroi multicouches en contact avec deux fluides.....	22
2.4 Cas général: Équation de la chaleur.....	24
2.4.1 Bilan énergétique.....	24
2.4.2 Équation de la chaleur en milieu homogène et isotrope.....	25
2.4.3 Différentes formes de l'équation de la chaleur.....	26
2.5 Applications pratiques.....	27
2.5.1 conduction de la chaleur en régime permanent sans effet de chaleur interne	27
2.5.2 Conduction de la chaleur en régime permanent avec effet de chaleur interne.....	30
2.5.3 Conduction dans les ailettes.....	31
2.5.4 Conduction en régime variable.....	33

Chapitre 3 : Transferts de chaleur par convection

3.1 Introduction.....	35
3.2 Coefficient d'échange de chaleur par convection.....	35
3.3 Transfert de chaleur par convection forcée sans changement d'état.....	36
3.3.1 Analyse dimensionnelle.....	36
3.3.2 Corrélations expérimentales.....	40

3.3.2.1	Écoulement dans un tube.....	42
3.3.2.2	Écoulement autour d'un tube.....	44
3.3.2.3	Écoulement autour d'un faisceau de tubes.....	46
3.3.2.4	Écoulement le long d'une plaque plane.....	47
3.4	Transfert de chaleur par convection naturelle sans changement d'état.....	50
3.4.1	Couche limite de convection naturelle.....	51
3.4.2	Résultats de l'analyse dimensionnelle.....	51
3.4.3	Interprétation physique du Nombre de Grashof.....	52
3.4.4	Convection naturelle turbulente.....	53
3.4.5	Corrélations expérimentales.....	54
3.4.5	Application pratique.....	54
Chapitre 4 : Transferts de chaleur par rayonnement		
4.1	Introduction.....	57
4.2	Le rayonnement électromagnétique.....	57
4.3	Rayonnement des corps opaques.....	60
4.3.1	Flux d'une source.....	60
4.3.2	Emittance.....	60
4.3.3	Intensité d'une source dans une direction O_x	60
4.3.4	Luminance d'une source dans une direction O_x	61
4.3.5	Loi de Lambert.....	62
4.4	Corps opaques récepteurs de rayonnement.....	63
4.4.1	Éclairage.....	63
4.4.2	Réflexion, absorption et transmission.....	64
4.4.3	Grandeurs monochromatiques directionnelles.....	65
4.4.4	Notion de corps noir.....	65
4.5	Loi de PLANCK.....	67
4.6	Lois de WIEN.....	68
4.6.1	1ère loi de WIEN, ou loi du déplacement.....	69
4.6.2	2ème loi de WIEN.....	69
4.7	Loi de STEFAN-BOLTZMANN.....	70
4.8	Rayonnement des corps réels.....	70
4.9	Notion de corps gris.....	71
4.10	Loi de KIRCHHOFF.....	72
4.11	Exemples de récapitulation.....	74
4.11.1	Energie solaire reçue sur la terre.....	74
4.11.2	Capteur solaire plan. Effet de serre.....	77

Chapitre 1

Généralités.

1.1 Introduction

La thermique est la discipline qui permet à l'ingénieur de comprendre et de décrire le fonctionnement d'un grand nombre d'équipements industriels qui ont comme caractéristique commune de mettre en œuvre des échanges de chaleur.

La civilisation industrielle, née au XVIIème siècle, a été d'abord dominée par la vapeur, si bien que de nos jours, le thermicien est encore souvent défini dans l'industrie, comme « celui qui s'occupe des chaudières et des réseaux de vapeur ».

1.2 Notion de chaleur

En physique, on appelle *chaleur* une forme particulière de l'énergie. L'équivalence de la chaleur et du travail constitue *le premier principe de la thermodynamique*. Il en résulte qu'énergie, travail et quantité de chaleur ont une même unité: le joule.

A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de *quantité de chaleur* et de *différence de température*.

Le transfert de chaleur d'une partie d'une substance à une autre partie, ou d'un corps à un autre corps, s'effectue sous forme d'énergie cinétique d'agitation moléculaire désordonnée.

Ce transfert est le fait d'une différence de température entre les deux corps. La chaleur se propage spontanément du corps ayant la température la plus élevée vers celui ayant la température la plus basse, élevant ainsi la température de ce dernier, tout en abaissant la température du premier, dans la mesure où le volume des deux corps reste constant. Ceci constitue *le second principe de la thermodynamique*.

Ce second principe met en évidence la notion d'*irréversibilité*: La chaleur ne pourra pas se propager d'un corps froid vers un corps chaud, sauf si on fournit un travail.

1.3 Notion de température

On appelle température la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un corps ou d'un milieu.

Lorsque deux corps sont placés dans une enceinte adiabatique, le corps le plus chaud cède de la chaleur au corps le plus froid, jusqu'à ce que les deux corps aient la même température. On dit alors qu'on a atteint l'équilibre thermique. (Figure 1)

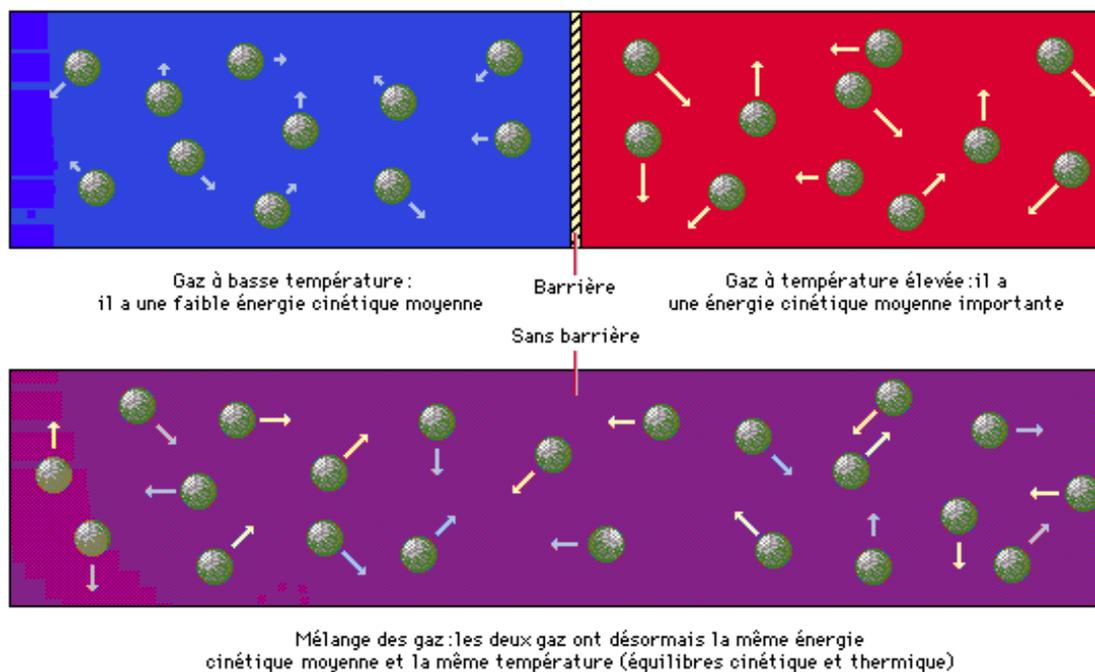


Figure 1 - Illustration des notions de transfert de chaleur, de température et d'équilibre thermique

La température est une propriété thermodynamique du corps et mesure l'agitation microscopique de la matière. Selon la théorie cinétique, la température d'un corps est fonction de l'énergie cinétique moyenne de translation de ses molécules (Figure 1). L'énergie cinétique d'un corps est nulle à une température appelée zéro absolu.

1.4 Mesures de température

On peut mesurer la température d'un corps en observant le changement de l'une de ses propriétés spécifiques, telle que la résistivité électrique ou bien le volume spécifique. Ainsi, le thermomètre à mercure mesure la dilatation d'une colonne de mercure dans un capillaire en verre, la variation de la longueur de la colonne étant liée à la température.

La résistance électrique d'un conducteur ou d'un semi-conducteur augmente avec la température. Ce phénomène est à la base du thermomètre à résistance, dans lequel une tension constante, ou potentiel

électrique, est appliquée à la thermistance, partie sensible du capteur. Pour une thermistance de composition donnée, la mesure d'une température donnée induit une résistance spécifique pour la thermistance. Cette résistance peut se mesurer à l'aide d'un galvanomètre et donne une mesure de la température.

Diverses thermistances faites d'oxydes de nickel, de manganèse ou de cobalt sont utilisées pour mesurer des températures entre 46°C et 150°C. De même, des thermistances utilisant d'autres métaux ou alliages peuvent être employées à des températures plus élevées : le platine, par exemple (jusqu'à 930 °C). Avec des circuits de transformation du signal adéquats, la mesure du courant peut être convertie en mesure numérique directe de la température.

Des mesures de température très précises peuvent être faites avec des thermocouples dans lesquels une faible différence de tension (se mesurant en millivolts) apparaît lorsque deux fils de métaux différents sont réunis pour former une boucle dont les deux liaisons sont portées à des températures différentes. Suivant le type de thermocouple, on peut mesurer des températures allant de 200°C à 2 300°C. Pour les températures très élevées, et pour des milieux agressifs, le thermocouple doit être protégé dans une gaine d'alumine. Pour accroître le signal de tension, plusieurs thermocouples peuvent être connectés en série pour former une thermopile. La tension dépendant de la différence entre les températures des liaisons, l'une de ces liaisons doit être maintenue à une température de référence connue, sinon, un circuit de compensation électronique doit être intégré au système pour mesurer la température réelle du capteur.

Les thermistances et les thermocouples ont souvent des capteurs d'une taille inférieure à 3 cm, ce qui leur permet de répondre rapidement aux variations de température et en fait des systèmes idéaux pour de nombreuses applications en biologie et en ingénierie.

Le pyromètre optique est utilisé pour mesurer les températures d'objets solides au-delà de 700°C. À de telles températures, les objets solides émettent suffisamment d'énergie dans la gamme visuelle pour permettre une mesure optique en exploitant le phénomène de température apparente de la couleur d'incandescence, la couleur émise par les objets incandescents allant du rouge sombre au jaune puis au blanc vers 1 300°C. Le pyromètre contient un filament analogue à celui d'une ampoule électrique, commandé par un rhéostat calibré, de façon que les couleurs du filament incandescent correspondent à des températures précises. Ainsi, la température d'un objet incandescent peut être mesurée en regardant cet objet à travers le pyromètre et en réglant le rhéostat jusqu'à ce que le filament devienne invisible sur le fond de l'objet : alors les températures du filament et de l'objet sont égales et peuvent être lues sur l'échelle du rhéostat.

Un autre appareillage de mesure de température, utilisé principalement dans les thermostats, se base sur la dilatation thermique différentielle de deux lames ou disques faits de métaux différents et reliés ou soudés à leurs extrémités.

1.5 Échelles de température

On utilise plusieurs échelles de température; parmi celles-ci, l'échelle Celsius, l'échelle Fahrenheit (dans les pays anglo-saxons), l'échelle de température thermodynamique.

L'échelle Celsius, qui fixe la température de congélation de l'eau à 0°C et sa température d'ébullition à 100°C, est utilisée dans le monde entier.

Dans l'échelle Fahrenheit, utilisée dans les pays anglophones pour la vie courante, la température de congélation de l'eau est fixée à 32°F et sa température d'ébullition à 212°F.

Dans le système international SI, l'unité thermique de base est le kelvin (K), unité de température thermodynamique. Jusqu'en 1954, l'échelle de température était définie à partir de l'écart de 100 degrés entre les points de congélation et d'ébullition de l'eau. Cette définition, peu précise, a été remplacée en 1967 par la définition actuelle, qui utilise un point fixe fondamental : le point triple de l'eau. Ainsi, le kelvin est égal à $1/273,16$ de la température thermodynamique du point triple de l'eau. Ce point décrit les conditions de pression et température d'équilibre de l'eau sous ses trois états : liquide, solide et gaz.

La température absolue coïncide avec la température de l'échelle thermodynamique. En cryogénie, où l'on cherche à obtenir des températures aussi basses que 0,00001 K, on utilise la démagnétisation de matériaux paramagnétiques. A l'autre extrémité de l'échelle, des températures momentanées supérieures à 100 millions de K ont été observées lors d'explosions nucléaires.

1.6 Unités de chaleur

On a vu qu'en physique, la quantité de chaleur est exprimée dans les mêmes unités que l'énergie et le travail, à savoir en joules (J).

On utilise également la calorie (Cal), définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de 1 g d'eau de 14,5 °C à 15,5 °C sous une pression de 1 atm.

L'énergie mécanique peut être convertie en chaleur par frottement, et le travail mécanique nécessaire pour produire une calorie s'appelle «l'équivalent mécanique de la calorie».

On a :

$$4,1855 \text{ J} = 1 \text{ Cal}$$

Selon la loi de conservation de l'énergie, tout le travail mécanique effectué pour produire de la chaleur par frottement est converti en énergie dans les corps impliqués dans ce travail. Ce fait fut démontré pour la première fois de manière concluante par Joule, qui chauffa de l'eau dans un récipient clos avec des roues à aubes et prouva ainsi que l'élévation de la température de l'eau était proportionnelle au travail exercé en tournant les roues. Dans un moteur à combustion interne, où de la chaleur est transformée en énergie mécanique, la loi de conservation de l'énergie s'applique également. Cependant, une partie de l'énergie est toujours perdue ou dissipée sous forme de chaleur, car aucun moteur n'a un rendement égal à 100 %.

A partir de la calorie, on introduit parfois d'autres unités de quantité de chaleur:

La kilocalorie (kcal) est égale à 1000 calories.

La thermie est égale à 1000 kcal.

Le kilowattheure (kWh) est l'énergie fournie en 3600 secondes par une source d'énergie de puissance égale à 1 kW, soit 1000 J/s. Comme 1 joule équivaut à 0,2389 calories, 1 kWh représente 3.600.000 joules, soit encore 860.112 calories.

En définitive: **1 kWh = 0,86 thermie**

1.7 Notion de capacité thermique massique

On appelle capacité thermique massique **C** la quantité de chaleur qu'il faut appliquer à 1 kg de matière pour élever sa température de 1 K.

D'après la loi formulée par les chimistes français Pierre Louis Dulong et Alexis Thérèse Petit, les capacités thermiques massiques des éléments solides sont inversement proportionnelles à leurs masses atomiques. Ainsi, le produit de la capacité thermique massique par la masse atomique est constant pour tous les éléments solides.

Du fait qu'un gaz chauffé se dilate, des calories supplémentaires sont nécessaires pour augmenter sa température, puisqu'une partie de cette énergie est utilisée pour la dilatation du gaz. C'est la raison pour laquelle, dans le cas d'un gaz, il faudra distinguer la capacité thermique massique à pression constante **C_p** et la capacité thermique massique à volume constant **C_v**. La capacité thermique massique à pression constante sera toujours supérieure à la capacité thermique massique à volume constant.

Dans le système international d'unités, la capacité thermique massique est exprimée en J/(kg . K).

La capacité thermique massique est parfois exprimée en Cal/(g.°C). La capacité thermique massique de l'eau est de 1 Cal/(g.°C); cela signifie qu'il faut apporter 1 Cal à 1 g d'eau pour augmenter sa température de 1°C.

Le tableau I ci-dessous donne les valeurs mesurées à 25°C de quelques substances usuelles.

Tableau I - Capacités thermiques massiques à 25 °C de diverses substances

COMPOSÉ	Cal/(g.°C)	kJ/(kg.K)
Air	0,24	1,01
Aluminium	0,22	0,90
Argent	0,06	0,24
Acier inoxydable	0,12	0,51
Eau (liquide)	1,00	4,18
Bois	0,42	1,76

Si on considère un corps solide S de masse m kg et de capacité thermique massique C_p J/(kg . K), et si on lui apporte une quantité de chaleur ΔQ J, l'accroissement de la chaleur contenue par le corps est responsable d'une élévation de température ΔT °C, donnée par la relation fondamentale:

$$\Delta Q = m C_p \Delta T$$

avec: ΔQ en Joules
 m en kilogrammes
 C_p en J/(kg . K) ou J/(kg . °C)
 ΔT en °C ou K, ce qui est équivalent puisqu'il s'agit d'une différence.

1.8 Notion d'enthalpie

On appelle enthalpie, en thermodynamique, la fonction d'état d'un système, définie par la relation:

$$H = U + pV$$

U étant l'énergie interne du système par unité de masse,
 p et V étant respectivement la pression et le volume du système.

L'enthalpie s'exprime en Joules par kg (J/kg).

Lors d'une transformation à pression constante, la chaleur reçue par le système correspond à la variation de son enthalpie:

Considérons ainsi un système de volume V dans un état initial caractérisé par sa pression p , sa température T_0 et son enthalpie H_0

En lui apportant une quantité de chaleur ΔQ , faisons passer ce système dans un état final qui sera caractérisé par la même pression p , le même volume V , sa température finale T_f et son enthalpie H_f

L'enthalpie de ce système a subi une variation:

$$\Delta H = H_0 - H_f = \frac{\Delta Q}{m} = C_p \Delta T$$

Pour un thermicien, l'enthalpie n'est pas autre chose que la chaleur contenue par unité de masse dans un corps solide, ou par Nm^3 dans un gaz.

1.9 Chaleur latente de changement d'état

Certains changements physiques sont associés aux changements de température d'un corps. Presque tous les corps se dilatent lorsqu'ils sont chauffés et se contractent en se refroidissant.

La phase d'un corps pur est l'état, solide, liquide ou gazeux qu'il prend selon des conditions de température et de pression.

Le passage d'un corps de l'état solide à l'état gazeux est appelé sublimation, de l'état solide à l'état liquide, fusion et de l'état liquide à l'état de vapeur, vaporisation. Si la pression est constante, ces processus ont lieu à une température constante. Une certaine quantité de chaleur est requise pour réaliser ces trois changements d'état. Elle est appelée chaleur latente. Ainsi il existe des chaleurs latentes de sublimation, de fusion et de vaporisation.

Lorsque l'on fait bouillir de l'eau dans un récipient ouvert à la pression atmosphérique, la température ne dépasse pas 100°C , même si l'on augmente la quantité de chaleur. La chaleur absorbée par l'eau sans changement de température est la chaleur latente; elle est utilisée pour transformer l'eau en vapeur. Elle est récupérée quand la vapeur est condensée pour donner de l'eau.

D'une manière similaire, si un mélange d'eau et de glace est chauffé dans un verre, sa température ne change pas tant que toute la glace n'a pas fondu. La chaleur absorbée est utilisée pour faire fondre la glace.

1.10 Flux de chaleur

On appelle flux de chaleur Φ , la quantité de chaleur ΔQ transférée par unité de temps:

$$\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Φ est un débit de chaleur, et s'exprime en joules par seconde, c'est-à-dire en watt.

Les transferts de chaleur sont mesurés par des flux, et ont les mêmes dimensions qu'une puissance, par exemple électrique.

Pour ce qui concerne les unités d'énergie (ou de chaleur), on a vu précédemment les équivalences:

$$1 \text{ kWh} = 0,86 \text{ thermie} = 0,86 \cdot 1000 \text{ kcal}$$

Pour les unités de puissance (ou de flux de chaleur), il leur correspond les équivalences:

$$1 \text{ W} = 0,86 \text{ kcal/h}$$

1.11 *Transferts de chaleur*

On appelle transferts de chaleur, les processus par lesquels de l'énergie est échangée sous forme de chaleur entre des corps ou des milieux à des températures différentes T_1 et T_2 .

La chaleur peut être transmise par *conduction*, *convection* ou *rayonnement*. Bien que les trois processus puissent avoir lieu simultanément, l'un des mécanismes est généralement prépondérant. Par exemple, la chaleur est principalement transmise par conduction à travers les murs en brique d'une maison; l'eau dans une casserole placée sur une cuisinière est surtout chauffée par convection; la Terre reçoit sa chaleur du Soleil en grande partie par rayonnement.

Le flux engendré dans le transfert est proportionnel à la différence de température $T_1 - T_2$ et à la section de passage S du flux:

$$\Phi = h S (T_1 - T_2)$$

h s'interprète comme un coefficient d'échange de chaleur.

Cependant, cette relation n'est valable qu'au premier ordre, car le plus souvent, le coefficient h dépend de la température. On introduira souvent la quantité Φ / S , qui est la densité de flux, et qui s'exprime en W/m^2 . Les différents modes de transferts de chaleur seront étudiés en détail dans la suite de ce cours. Le problème sera de déterminer le coefficient h dans chacun des modes envisagés ci-après.

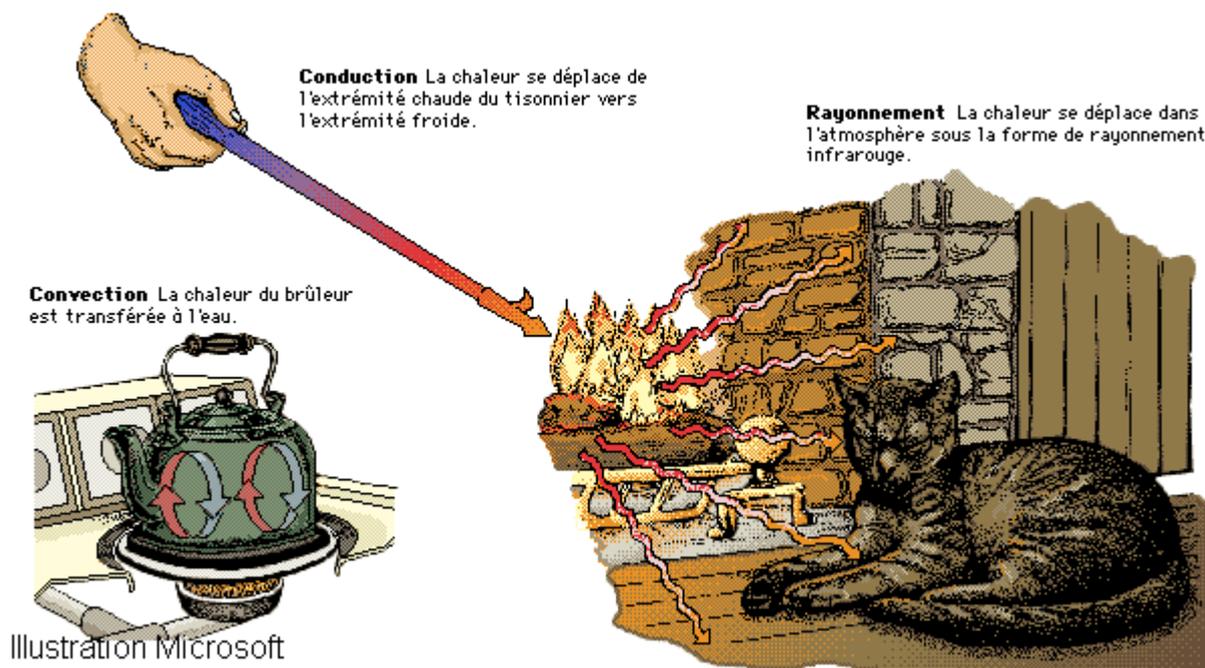


Figure 2 - Modes de transfert de chaleur

Conduction

Seule la conduction permet un transfert de chaleur efficace à travers les solides opaques. Lorsque l'on chauffe l'une des extrémités d'une barre métallique, la chaleur se transmet par conduction à l'autre extrémité plus froide. Le mécanisme exact de la conduction dans les solides n'est toujours pas totalement élucidé, mais découle surtout du mouvement des électrons libres dans le corps, enclenché dès que s'y établit une différence de température. Ainsi, les bons conducteurs de chaleur sont en général de bons conducteurs électriques.

En 1822, le mathématicien français Joseph Fourier donna une définition mathématique précise de la conduction. D'après la loi de Fourier, la vitesse à laquelle la chaleur est conduite dans un corps par unité de section est proportionnelle à l'opposé du gradient de la température du corps. Le facteur de proportionnalité est la conductibilité thermique du matériau.

Des métaux comme l'or, l'argent et le cuivre ont une conductibilité thermique importante (ils conduisent facilement la chaleur), alors que des matériaux comme le verre et l'amiante ont une conductibilité thermique beaucoup plus faible. Ces derniers sont des isolants.

Dans de nombreuses applications industrielles, il est nécessaire de connaître la vitesse de propagation de la chaleur dans un solide pour une différence de température donnée. On fait alors appel à des techniques de calculs mathématiques sophistiqués, effectués au moyen d'ordinateurs.

Convection

Dans un champ de gravitation, toute différence de température dans un liquide ou un gaz modifie sa densité, un mouvement se produisant alors au sein du fluide du fait de la poussée d'Archimède. Ce mouvement de brassage, dans lequel les parties les plus chaudes du fluide ont tendance à s'élever et les parties froides et denses à descendre, s'appelle convection. Le mouvement du fluide peut être *naturel* ou *forcé*.

Les mouvements dus uniquement à des différences de température du fluide constituent la convection naturelle. La convection forcée est obtenue en soumettant le fluide à une augmentation de pression, le mouvement se déclenchant alors selon les lois de la mécanique des fluides.

Exemple de convection naturelle : le chauffage d'une pièce par un radiateur correspond à une élévation d'air chaud le long des murs, l'air plus frais étant aspiré vers le radiateur. L'air chaud ayant tendance à s'élever et l'air frais à descendre, on doit installer les radiateurs près du sol et les appareils de climatisation près du plafond pour garantir une efficacité maximale du dispositif de chauffage. La convection naturelle favorise la montée de l'eau chaude et de la vapeur dans les chaudières, ainsi que le phénomène d'aspiration dans les cheminées. La convection explique également les mouvements des grandes masses d'air autour de la Terre, l'action des vents, la formation des nuages, et les courants océaniques.

Rayonnement

Le rayonnement est fondamentalement différent des deux autres types de transfert de chaleur, en ce sens que les substances qui échangent de la chaleur n'ont pas besoin d'être en contact l'une avec l'autre. Elles peuvent même être séparées par le vide.

Le rayonnement est l'émission d'ondes électromagnétiques par un corps chauffé, une explication générale du phénomène étant fournie par la théorie quantique. En 1900, le physicien allemand Max Planck utilisa la théorie quantique et le formalisme mathématique de la mécanique statistique pour vérifier la loi fondamentale du rayonnement, dite loi de Stefan. L'expression mathématique de cette loi indique que la puissance totalement émise (toutes longueurs d'onde comprises) par un corps chauffé est proportionnelle à T^4 , T étant la température absolue du corps. Seul un corps noir émet un rayonnement qui satisfait exactement à la loi de Planck, les corps réels émettant avec une puissance inférieure à celle que prévoit la loi de Stefan.

La contribution de toutes les fréquences à l'énergie de rayonnement est appelée pouvoir d'émission du corps : c'est la quantité d'énergie émise par unité de surface et par unité de temps. Le facteur de proportionnalité de la loi de Stefan est appelé constante de Stefan-Boltzman, du nom des deux

physiciens autrichiens Josef Stefan et Ludwig Boltzmann, qui, respectivement, en 1879 et en 1884, découvrirent la relation entre le pouvoir d'émission et la température. Ainsi, plus la température est élevée, plus la puissance émise est importante. Outre l'émission, toutes les substances sont également capables d'absorber un rayonnement.

Les surfaces opaques peuvent absorber ou réfléchir les rayonnements incidents. En général, les surfaces mates et rugueuses absorbent mieux le rayonnement que les surfaces brillantes et polies. À l'inverse, les surfaces brillantes réfléchissent mieux le rayonnement que les surfaces mates. Les corps dotés d'un bon pouvoir d'absorption sont également de puissants émetteurs de chaleur, alors que les bons réflecteurs sont de mauvais émetteurs. Par conséquent, les ustensiles de cuisine sont dotés de fonds mats pour une bonne absorption de la chaleur et de côtés polis pour une émission minimale, afin d'améliorer les transferts de chaleur.

On observe que les capacités d'absorption, de réflexion et de transmission d'une substance dépendent de la longueur d'onde du rayonnement incident. Le verre, par exemple, transmet de grandes quantités de rayonnement ultraviolet (ondes courtes), mais transmet mal le rayonnement infrarouge (ondes longues).

La *loi de déplacement de Wien*, nommée d'après le physicien allemand Wilhelm Wien, est une expression mathématique de la sélectivité du rayonnement : le produit de la longueur d'onde d'énergie maximale, exprimée en mètres, et de la température du corps en degrés Kelvin est égal à une constante qui vaut environ $2,897 \times 10^{-3}$ m.K. Cela explique en partie l'effet de serre.

Chapitre 2

Transferts thermiques par conduction.

2.1 Introduction

On a vu au chapitre 1 que la conduction thermique est un mode de transmission de la chaleur dans la matière. La conduction concerne principalement les solides. En effet, bien que présente également dans les liquides et les gaz, elle y est le plus souvent négligeable par rapport à la convection et au rayonnement.

Nous allons introduire les questions essentielles à traiter dans un problème de conduction thermique, en nous appuyant sur l'exemple du système de chauffage de locaux par plancher chauffant électrique direct.

Dans ce mode de chauffage, l'émission de chaleur est produite par effet Joule dans un câble chauffant.

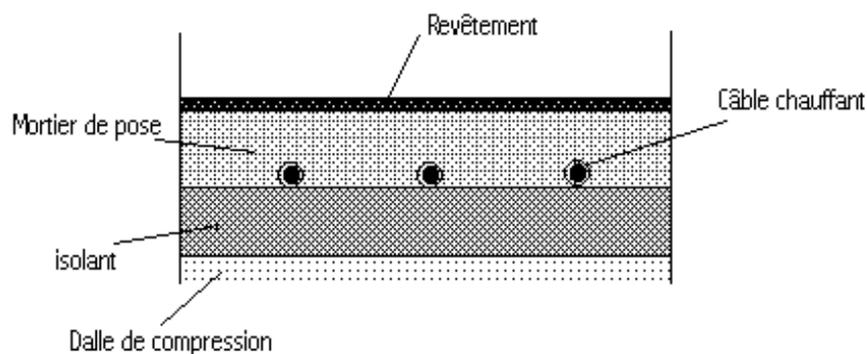


Figure 2.1 - Coupe d'un plancher chauffant électrique direct

Ce câble chauffant est disposé dans une chape d'enrobage, elle-même placée au dessus d'une couche de matériau isolant. Le rôle de cet isolant est très important, puisqu'il conditionnera la bonne répartition des flux de chaleur émis par le câble chauffant.

Le problème fondamental de la conduction est de trouver la température en tout point de l'épaisseur du plancher, ainsi que la puissance thermique échangée à travers sa surface, afin de résoudre les problèmes de dimensionnement suivants:

- a) Connaissant la puissance P à évacuer, déterminer les caractéristiques de la couche isolante pour qu'au moins 90% du flux de chaleur soit ascendant.
- b) Vérifier que la température de surface du plancher ne dépasse pas une limite réglementaire T_{\max} correspondant au confort optimal.

Ces deux problèmes concernent le régime permanent, dans lequel la température en chaque point du plancher est indépendante du temps, ce qui signifie que l'équilibre thermique entre l'énergie fournie au système et les déperditions est atteint.

Mais, il est parfois nécessaire de résoudre des problèmes thermocinétiques, c'est-à-dire en régime variable.

- c) On pourra par exemple être amené à vérifier que le temps de mise en température de confort d'un local déterminé n'excède pas une certaine durée contractuelle.

Pour résoudre ces problèmes, il est nécessaire de connaître le mécanisme local du phénomène. Nous verrons que ce mécanisme sera décrit par une équation, dite équation de la chaleur, liant entre elles les différentes grandeurs intervenant (la température T , le temps t , les variables d'espace x, y, z).

Parmi toute une famille de solutions possibles de l'équation précédente, il faudra retenir celle qui sera compatible avec le respect des conditions existantes aux limites du domaine étudié. Par exemple, la température de surface du câble chauffant doit demeurer constante et égale à une valeur spécifiée par le constructeur du câble.

De même, la répartition initiale de température dans le milieu étudié intervient également sur l'évolution ultérieure des températures dans ce milieu.

2.2 Concepts fondamentaux

2.2.1 Champs thermiques.

Nous venons de considérer un premier champ thermique, qui est un champ scalaire, celui des températures $T(M, t)$, où $M(x, y, z)$ désigne un point quelconque du plancher chauffant considéré. On a vu que ce champ de températures peut être permanent ou variable.

On appellera surface isotherme, le lieu des points M ayant la même température à un instant t .

Supposons que le câble chauffant de l'exemple précédent apporte au plancher une quantité de chaleur dQ pendant le temps dt .

Le flux thermique qui va se propager vers le local à chauffer est:

$$\Phi = dQ / dt \quad (2.1)$$

(Ce flux est une puissance exprimée en Watt).

Si on suppose la structure du plancher chauffant parfaitement uniforme, on peut se contenter de raisonner sur une surface de plancher unité, et ensuite les résultats obtenus pourront être étendus à toute la surface S de ce plancher.

On appellera densité de flux thermique, la puissance échangée par surface unité, c'est-à-dire la grandeur:

$$\varphi = dQ / S dt = \Phi / S \quad (2.2)$$

(Cette densité de flux thermique s'exprime en Watt/m²).

Mais notre hypothèse d'uniformité du plancher est sans doute trop simpliste. Aussi, renoncerons nous à considérer une seule densité de flux thermique φ valable en tout point de la surface S du plancher.

Il est nécessaire de passer à une description locale. Pour ce faire, introduisons un champ de vecteurs $\vec{\varphi}(M, t)$ représentant la densité *locale* du flux thermique en chaque point $M(x, y, z)$ du plancher chauffant.

Ce vecteur $\vec{\varphi}(M, t)$ caractérise en chaque point du milieu, la direction, le sens et l'intensité du flux de chaleur provoqué par la présence de la source interne.

Le module d'un tel vecteur a la dimension d'une puissance par unité de surface, et s'exprime en Watt/m².

Dans l'exemple qui nous sert de support de raisonnement, la direction du flux de chaleur ne fait guère de doute, parce que la géométrie étudiée n'est qu'à 2 dimensions. Mais il sera souvent nécessaire au thermicien de se pencher sur des problèmes en 3D. La direction du flux thermique en un point $M(x, y, z)$ sera alors en général quelconque.

Si alors, on envisage une surface élémentaire $d\mathbf{S}$ entourant le point $M(x, y, z)$, orienté par sa normale unitaire \vec{n} , la direction du flux de chaleur fera un angle α avec la normale \vec{n} , et le flux élémentaire de chaleur $d\Phi$ à travers la surface $d\mathbf{S}$ sera donné par l'expression:

$$d\Phi = \left| \vec{\varphi}(M, t) \right| \cos \alpha \, dS$$

Cette quantité représente une énergie par unité de temps, et s'exprime donc en Watt.

On peut faire un parallèle entre le champ de vecteurs *densité de flux* en thermique, et le champ de *vitesses* en mécanique des fluides. Pour chacun de ces deux champs de vecteurs, on peut définir des lignes de courant, qui sont les enveloppes des vecteurs considérés.

Dans chacune des deux disciplines, la mécanique des fluides et la thermique, l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé constitue un tube de courant.

2.2.2 Loi de Fourier (1822)

Il existe une relation linéaire entre l'effet auquel on s'intéresse, c'est-à-dire la densité de flux thermique $\vec{\varphi}(M, t)$ et sa cause, qui est l'existence d'un gradient de température $\vec{grad} T$.

En tout point d'un milieu isotrope, la densité de flux thermique instantanée est proportionnelle au gradient de température, ce qui s'écrit:

$$\vec{\varphi}(M, t) = -\lambda \vec{grad} T \quad (2.3)$$

Le coefficient de proportionnalité λ s'appelle la conductivité thermique du milieu.

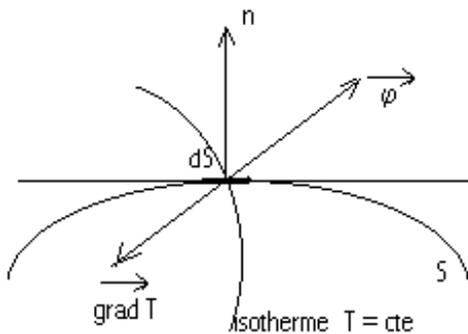
Pour un milieu isotrope et homogène, λ ne dépend que de la température T . Dans de nombreux cas pratiques, lorsque les écarts de température ne sont pas trop élevés, on peut considérer, avec une précision suffisante, λ comme une constante pour un milieu donné.

Par convention, $\vec{\varphi}(M, t)$ est compté positivement dans le sens d'écoulement de la chaleur, c'est-à-dire vers les températures décroissantes. $\vec{grad} T$ est un vecteur porté par le même axe, mais de sens contraire à $\vec{\varphi}(M, t)$, d'où le signe moins de la loi de Fourier.

$\vec{\phi}(M,t)$ et $\lambda \vec{\text{grad}} T$ s'expriment en W/m^2 . Il en résulte que la conductivité thermique λ s'exprimera en $\text{Watt}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$

2.2.3 Orthogonalité du gradient et de l'isotherme

$$\vec{\text{grad}} T \cdot d\vec{M}$$



En un point quelconque M du milieu, on a à tout instant:

$$dT = \vec{\text{grad}} T \cdot d\vec{M}$$

Si on considère un déplacement élémentaire dM sur l'isotherme passant par M, le long de cette isotherme, on a:

$$dT = 0 = \vec{\text{grad}} T \cdot d\vec{M}$$

Les vecteurs $\vec{\text{grad}} T$ et $d\vec{M}$ sont donc orthogonaux

Le gradient de température en chaque point est normal à la surface isotherme passant par ce point.

Il en résulte que les lignes de courant, auxquelles les vecteurs 'densité de flux thermique' sont tangents, sont également normales aux surfaces isothermes.

Les parois d'un tube de courant sont par conséquent normales aux isothermes. Aucun flux ne les traverse donc. Ces parois sont dites adiabatiques.

Ainsi, en régime permanent, le flux thermique est conservatif dans un tube de courant. Cette propriété est l'exacte analogie de la constance du débit dans un tube de courant en mécanique des fluides.

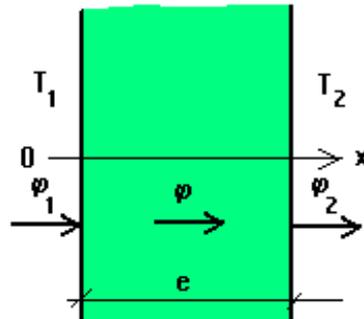
2.3 Conduction en régime permanent

Nous commencerons par raisonner, pour plus de clarté, dans le cadre d'un problème à une seule dimension.

Un tel problème unidimensionnel est connu sous le nom de problème du mur, c'est-à-dire d'un milieu limité par deux plans parallèles, dans lequel la chaleur se propage uniquement suivant la normale à ces plans. Le gradient de température est par conséquent porté par cette normale. Les isothermes sont des plans parallèles aux faces.

Un tel champ thermique est unidirectionnel. Dans ce cas, la température T n'est fonction que de l'abscisse x .

Considérons une paroi d'épaisseur e séparant deux domaines où règnent des températures respectives T_1 et T_2 , avec T_1 supérieure à T_2 .



Si le phénomène considéré est en régime permanent, les températures n'évoluent plus. C'est donc que l'on a atteint un régime d'équilibre entre l'apport de chaleur à travers la face chaude de la paroi, et la déperdition de chaleur à travers la face froide:

$$S \cdot \varphi_1 = S \cdot \varphi_2$$

Flux entrant = Flux sortant

Dans l'hypothèse d'un déséquilibre, si:

$$S \cdot \varphi_1 - S \cdot \varphi_2 = S \Delta \varphi > 0$$

la quantité de chaleur excédentaire $S \Delta \varphi$ accumulée chaque seconde dans la paroi, est liée aux caractéristiques physiques de cette paroi par l'expression:

$$S \Delta \varphi = \frac{m C_p \Delta T}{\Delta t} \quad (2.4)$$

et c'est cette accumulation de chaleur qui entraîne une augmentation de température de la paroi.

Par contre, en régime permanent, on a:

$$m C_p \frac{\Delta T}{\Delta t} = 0$$

ce qui s'intègre immédiatement, pour donner le profil de température dans le mur, qui varie linéairement en fonction de x :

$$mC_p T(x) = ax + b$$

Pour déterminer les valeurs des constantes a et b qui définiront une solution particulière, on peut envisager plusieurs types de conditions de surface appliquées à ce mur, selon la nature du problème physique à résoudre.

2.3.1 Mur simple à faces isothermes

L'une des configurations possibles est d'imaginer que chacune des parois est maintenue à une température constante et connue. Ce sera par exemple le cas pour une maison qu'on désire chauffer à une température intérieure T_1 pendant qu'il règne une température extérieure T_2 .

Pour $x = 0$, on aura : $m C_p T_1 = b$

et pour $x = e$: $m C_p T_2 = a e + b$

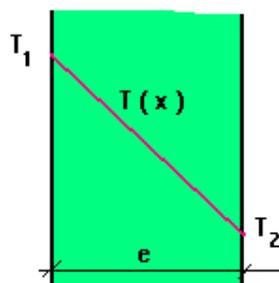
d'où on tire: $m C_p (T_2 - T_1) = a e$ et $a = m C_p (T_2 - T_1) / e$

Le profil de température dans la paroi a en définitive pour expression:

$$m C_p T(x) = m C_p x (T_2 - T_1) / e + m C_p T_1$$

soit encore: $T(x) = T_1 - (T_1 - T_2) x / e$ (2.5)

Le profil de température est linéaire, avec un gradient égal à $-(T_1 - T_2) / e$



La densité de flux thermique à travers le mur est donnée par la loi de Fourier:

$$\varphi = - \lambda \, dT / dx$$

Le gradient étant constant, ce débit de chaleur a une valeur constante quelle que soit l'abscisse x dans la paroi. La température ne variera donc pas en fonction du temps. C'est le régime permanent.

$$\varphi = - \lambda (T_1 - T_2) / (x_1 - x_2)$$

soit:

$$\varphi = \lambda (T_1 - T_2) / e \quad (\text{en } W/m^2) \quad (2.6)$$

Le flux thermique transmis par conduction à travers la paroi est donc:

$$\Phi = S \varphi = \lambda S (T_1 - T_2) / e \quad (\text{en } W) \quad (2.7)$$

On voit qu'il existe une relation de proportionnalité entre le flux thermique transmis par conduction à travers la paroi et la différence de température $T_1 - T_2$:

$$T_1 - T_2 = (e / \lambda S) \Phi = R \Phi \quad (2.8)$$

La forme du coefficient de proportionnalité R rappelle l'expression donnant la résistance R d'un conducteur électrique de longueur e , de section S et de résistivité $\rho = 1 / \lambda$.

(L'inverse de la conductivité est la résistivité)

De même l'expression $T_1 - T_2 = R \Phi$ suggère un rapprochement avec la loi d'Ohm

$$U_1 - U_2 = R I$$

Pour ces deux raisons, le coefficient R de la relation $T_1 - T_2 = R \Phi$ est appelé **la résistance thermique** de la paroi considérée.

La résistance thermique s'exprime en Kelvin/Watt (K/W) ou en °C/W

Nous verrons tout au long de ce chapitre que l'application des lois de l'électricité concernant l'association en série ou en parallèle de ces résistances thermiques, constitue une méthode simple et commode de résolution de très nombreux problèmes thermiques en régime permanent.

2.3.2 Paroi en contact avec deux fluides

Pour déterminer les valeurs des constantes a et b qui définiront une solution particulière, on a vu que l'on pouvait envisager plusieurs types de conditions de surface appliquées au mur.

Considérons maintenant une paroi d'épaisseur e en contact avec deux fluides de températures constantes T_{∞_1} et T_{∞_2} . Entre chacun des fluides et la paroi, il s'établit un échange convectif, les températures respectives de chacune des deux faces de la paroi étant T_1 et T_2 .

Il s'agit alors d'un problème dit mixte, combinant deux modes de transmission de la chaleur: la convection et la conduction.

Le problème étant unidimensionnel, la conservation du flux thermique (stationnarité du problème), se traduit par l'égalité des flux :

- Φ_1 , cédé par le fluide chaud à la paroi (convection)
- Φ , traversant la paroi (conduction)
- Φ_2 , cédé par la paroi au fluide froid (convection)

On a vu qu'on avait:

$$\Phi_1 = h_1 S (T_{\infty_1} - T_1) \quad (2.9)$$

$$\Phi_2 = h_2 S (T_2 - T_{\infty_2}) \quad (2.10)$$

où h_1 et h_2 sont deux coefficients d'échange s'exprimant en $W / (m^2 \cdot ^\circ C)$.

Quant au flux dans la paroi elle-même, on a déjà montré qu'il était égal à:

$$\Phi = \lambda S (T_1 - T_2) / e$$

On a donc:

$$\Phi = (T_{\infty_1} - T_1)/(1/h_1 S) = (T_1 - T_2)/(e/\lambda S) = (T_2 - T_{\infty_2})/(1/h_2 S) \quad (2.11)$$

Ces expressions suggèrent de définir des résistances thermiques convectives:

$$R_{C1} = 1 / h_1 S \quad (2.12)$$

$$R_{C2} = 1 / h_2 S \quad (2.13)$$

qui s'expriment en $^\circ C/W$ comme la résistance thermique de conduction $R = e / \lambda S$ définie au § 2.3.1

L'équation (2.11) permet d'exprimer le flux échangé entre les fluides repérés par les indices (1) et (2) en fonction des températures de ces fluides, des caractéristiques de la paroi qui les sépare, et de deux coefficients d'échange convectif:

$$\Phi = (T_{\infty_1} - T_{\infty_2}) / (R_{c1} + R + R_{c2}) \tag{2.14}$$

Cette relation traduit la loi (2.8):

$$T_1 - T_2 = R \cdot \Phi$$

pour les trois résistances R_{c1} , R et R_{c2} en série.

Par analogie avec les relations (2.9) et (2.10) qui expriment le flux transmis en fonction de l'écart de température:

$$\Phi_1 = h_1 S (T_{\infty_1} - T_1)$$

$$\Phi_2 = h_2 S (T_2 - T_{\infty_2})$$

on peut exprimer la relation (2.14) sous la forme:

$$\Phi = k S (T_{\infty_1} - T_{\infty_2})$$

dans laquelle k désigne un coefficient global d'échange entre les deux fluides, coefficient k qui a pour expression:

$$K = 1 / (R_{c1} + R + R_{c2}) S \tag{2.15}$$

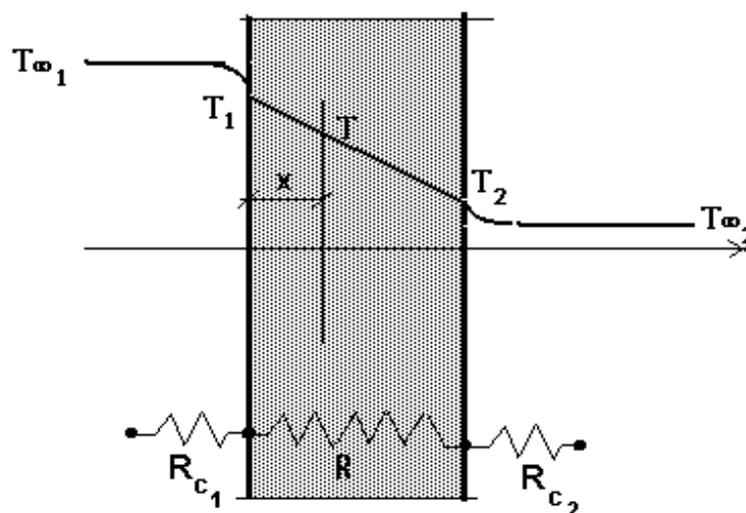


Figure 2.2 - Transfert de chaleur entre deux fluides de part et d'autre d'une paroi.

La température en un point d'abscisse x (voir figure 4) est donnée par la relation:

$$T_{\infty_1} - T(x) = [R_{c1} + R(x)] \Phi$$

où:

$$R(x) = x / \lambda S$$

En remplaçant Φ par l'expression (2.14) , il vient:

$$T(x) = T_{\infty_1} - [R_{c1} + x/\lambda S] (T_{\infty_1} - T_{\infty_2}) / (R_{c1} + R + R_{c2}) \quad (2.16)$$

2.3.3 Paroi multicouches en contact avec deux fluides

Ce sera par exemple le cas d'une paroi de four composée de deux couches.

Nous nous appuyerons sur un exemple concret, afin de donner une idée des ordres de grandeurs .

La première couche est un garnissage en briques réfractaires (épaisseur $e_1 = 0,20$ m, conductivité $\lambda_1 = 1,38$ W/(m . °C)), la seconde est un isolant fibreux (épaisseur $e_2 = 0,10$ m, conductivité $\lambda_2 = 0,17$ W/(m . °C)).

Nous supposons que le contact est parfait entre les deux couches.

Par un raisonnement identique au précédent, on obtient de même:

$$\Phi = (T_{\infty_1} - T_{\infty_2}) / (R_{c1} + \sum R_i + R_{c2}) \quad (2.17)$$

avec:

$$R_i = e_i / \lambda_i S$$

et:

$$T(x) = T_{\infty_1} - [R_{c1} + \sum R_i + x/\lambda_i S] (T_{\infty_1} - T_{\infty_2}) / (R_{c1} + \sum R_i + R_{c2}) \quad (2.18)$$

Appliquons ces résultats au four de traitement thermique dont les caractéristiques des parois ont été données au début de ce paragraphe.

La température de traitement à l'intérieur du four, T_{∞_1} , est de 1 650 °C, et le coefficient h_1 d'échange sur la face intérieure vaut 70 W / (m² . °C).

La température de l'air ambiant, T_{∞_2} , est de 25°C, et le coefficient h_2 d'échange sur la face extérieure vaut 10 W / (m² . °C).

Calculer les pertes de chaleur par m^2 de surface de paroi, les températures des faces intérieures et extérieures, et celle de l'interface entre le briquetage et l'isolant.

Les pertes sont données par la relation (2.17):

$$\varphi = \Phi / S = (T_{\infty_1} - T_{\infty_2}) / [R_{c1} + R_1 + R_2 + R_{c2}] S$$

avec :

$$R_{c1} = 1 / h_1 = 0,0143 \text{ m}^2 \cdot \text{°C} / \text{W}$$

$$R_1 = e_1 / \lambda_1 = 0,1449 \text{ m}^2 \cdot \text{°C} / \text{W}$$

$$R_2 = e_2 / \lambda_2 = 0,5882 \text{ m}^2 \cdot \text{°C} / \text{W}$$

$$R_{c2} = 1 / h_2 = 0,100 \text{ m}^2 \cdot \text{°C} / \text{W}$$

Soit $\varphi = 1916 \text{ W} / \text{m}^2$

La température de la paroi interne est fournie par la relation:

$$T_{\infty_1} - T_1 = (1 / h_1) \varphi = 0,0143 \cdot 1916 = 27,4 \text{ °C} \text{ d'où } T_1 = 1622,6 \text{ °C}$$

Cette température est peu différente de celle de l'atmosphère interne du four de traitement.

La température de l'interface entre les deux couches est obtenue de la même manière:

$$T_1 - T' = (e_1 / \lambda_1) \varphi \text{ soit } T' = 1344,6 \text{ °C}$$

La température de la face externe de la paroi du four vaut:

$$T_2 = T_{\infty_2} + (1 / h_2) \varphi = 216,6 \text{ °C}$$

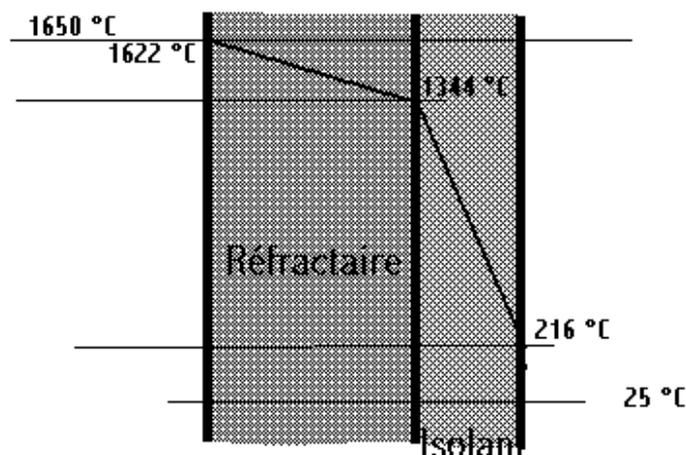


Figure 2.3 - Évolution de la température dans la paroi d'un four

2.4 Cas général: Équation de la chaleur

2.4.1 Bilan énergétique

Après avoir commencé par traiter le cas unidimensionnel en régime permanent, nous allons maintenant établir le bilan thermique d'une quantité de matière à l'état solide, contenue dans un volume fini \mathbf{v} , délimité par une surface \mathbf{s} , appartenant à un milieu en trois dimensions.

La substance considérée a des caractéristiques thermiques décrites par sa capacité thermique massique \mathbf{c} et sa conductivité thermique λ . Nous supposons que les grandeurs \mathbf{c} et λ ne dépendent ni de l'espace (substance homogène), ni de la température (approximation valable tant que les écarts de température ne sont pas trop importants).

Nous supposons en outre que le volume \mathbf{v} contient des sources internes dégageant de la chaleur avec une puissance volumique \mathbf{p} (par effet Joule par exemple).

Si le phénomène considéré n'est pas en régime permanent, mais en régime variable, cela signifie que l'échange de chaleur à travers la surface \mathbf{s} provoque une variation de la quantité de chaleur accumulée dans le volume \mathbf{v} .

La puissance thermique reçue (algébriquement) par le volume \mathbf{v} a pour expression:

$$\Phi = - \iint \vec{\varphi} \cdot \vec{n} ds \quad (2.19)$$

Il faut y ajouter la puissance dégagée dans le volume \mathbf{v} par les sources internes, soit:

$$\iiint p dv \quad (2.20)$$

Pendant l'intervalle de temps \mathbf{dt} , la substance contenue dans le volume \mathbf{v} emmagasine donc une quantité de chaleur $\Phi \mathbf{dt}$, qui va provoquer une variation de température ∂T , dépendant de capacité thermique massique \mathbf{c} .

Comme on raisonne sur l'unité de volume, il est nécessaire d'introduire la capacité thermique volumique égale à $\rho \mathbf{c}$.

On aura donc:
$$\Phi dt = \iiint \rho c \partial T dv$$

soit en tenant compte des expressions (2.19) et (2.20):

$$-\iint \vec{\varphi} \vec{n} ds + \iiint p dv = \iiint \rho c \partial T dv \quad (2.21)$$

La formule d'Ostrogradski permet de transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume:

$$\iint \vec{\varphi} \vec{n} ds = \iiint \operatorname{div}(\vec{\varphi}) dv \quad (2.22)$$

En combinant les équations (2.21) et (2.22), on obtient alors:

$$\iiint \left[-\operatorname{div} \vec{\varphi} + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] dv = 0$$

Le volume v considéré étant arbitraire, le bilan thermique instantané s'exprime localement en chaque point M du volume considéré par:

$$-\operatorname{div} \vec{\varphi} + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.23)$$

2.4.2 Équation de la chaleur en milieu homogène et isotrope

Si on tient maintenant compte de la Loi de Fourier (2.3):

$$\vec{\varphi}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T$$

le bilan (2.23) devient:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

c'est-à-dire finalement:

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.24)$$

qui constitue l'équation de la chaleur.

On écrit souvent cette équation sous la forme:

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.25)$$

en introduisant le paramètre:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (2.26)$$

a est la *diffusivité thermique* de la substance considérée.

Cette définition conduit à l'équation aux dimensions suivantes:

$$[a] = \frac{[\lambda]}{[\rho][c]}$$

soit:

$$[a] = \frac{[ML^2T^{-3} L^{-1}\Theta^{-1}]}{[ML^{-3}][ML^2T^{-2} M^{-1}\Theta^{-1}]}$$

c'est-à-dire:

$$[a] = L^2T^{-1}$$

La diffusivité thermique d'un solide s'exprime en m^2/s , comme la viscosité cinématique d'un fluide.

2.4.3 Différentes formes de l'équation de la chaleur

Selon la nature des problèmes examinés, l'équation de la chaleur prend des formes différentes.

(a) *Cas d'un milieu sans sources internes, en régime permanent.*

L'équation de la chaleur (2.24) se réduit alors à:

$$\Delta T = 0 \tag{2.27}$$

c'est-à-dire:

$$\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} = 0 \tag{2.28}$$

C'est l'équation de Laplace.

(b) *Cas d'un milieu avec sources internes, en régime permanent.*

L'équation de la chaleur (2.24) se réduit alors à:

$$\Delta T + \frac{P}{\lambda} = 0 \tag{2.29}$$

C'est l'équation de Poisson.

(c) *Cas d'un milieu sans sources internes, en régime variable.*

L'équation de la chaleur (2.24) se réduit alors à:

$$\Delta T = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.30)$$

C'est l'équation de Fourier.

2.5 Applications pratiques

2.5.1 conduction de la chaleur en régime permanent sans effet de chaleur interne.

Exercice1 :

Le mur d'un four est composé de deux couches :

- La première en brique réfractaire (épaisseur $e_1 = 20 \text{ cm}$, $R_1 = 1.38 \text{ w/m.k}$)
- La deuxième en brique isolante (épaisseur $e_2 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 0.17 \text{ w/m.k}$)

En donne :

- Température à l'intérieur du four : $\theta_i = 1650 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Coefficient d'échange sur la paroi intérieure : $h_i = 70 \text{ w/m}^2.\text{k}$.
- Température extérieure ambiante : $\theta_e = 25 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Coefficient de convection à l'extérieur du four : $h_e = 10 \text{ w/m}^2.\text{k}$.

Calculer :

1. les pertes thermiques par m^2 de surface mur.
2. les températures des parois interne et externe.
3. la température de l'interface.
4. les gradients thermiques dans chaque paroi.

A.N :

$$\varphi = 1918 \text{ w/m}^2, \theta_{i1} = 1623 \text{ }^\circ\text{C}, \theta_{i2} = 1345 \text{ }^\circ\text{C}, \theta_{e2} = 217 \text{ }^\circ\text{C}, \theta_e = 25 \text{ }^\circ\text{C}, \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -1390 \text{ }^\circ\text{C/m},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = -11280 \text{ }^\circ\text{C/m}.$$

Exercice2 :

Déterminer les déperditions thermiques à travers 1 m^2 d'une surface vitrée dans les deux cas suivants :

1. vitrage simple d'épaisseur $e = 4 \text{ mm}$.
2. vitrage double de deux lames de verre ($e = 4 \text{ mm}$) coinçant une lame d'air d'épaisseur 6 mm .

On donne :

1. coefficient d'échange convectif : $h = 12 \text{ w/m}^2 \cdot \text{k}$.
2. conductivité thermique du verre : $\lambda_v = 0.8 \text{ w/m.k}$.
3. conductivité thermique de l'air : $\lambda_a = 0.024 \text{ w/m.k}$.
4. température de l'air intérieur : $\theta_i = 20^\circ \text{C}$.
5. température de l'air extérieur : $\theta_e = 0^\circ \text{C}$.

A.N :

$$\varphi_1 = 116 \text{ w/m}^2, \varphi_2 = 47 \text{ w/m}^2$$

Exercice3 :

Considérons un mur composite formé de 4 couches successives:

- La première en plâtre d'épaisseur 5 cm .
- La deuxième en béton d'épaisseur 5 cm .
- La troisième formée de morceaux de brique séparés verticalement par des lames d'air.
- Et la quatrième en béton d'épaisseur 10 cm .

On donne :

- Coefficient de convection coté extérieur : $h_e = 20 \text{ w/m}^2 \cdot \text{k}$.
- Coefficient de convection coté intérieur : $h_i = 10 \text{ w/m}^2 \cdot \text{k}$.
- Température de l'air extérieur : $\theta_e = -10^\circ \text{C}$
- Température de l'air intérieur : $\theta_i = 23^\circ \text{C}$
- Conductivités thermiques (en w/m.k)

Brique : 2, plâtre : 0.46, béton : 1.16, air : 0.024.

Calculer

1. La résistance thermique (relative à un mètre carré de mur).
2. la densité de flux à travers le mur.

A.N :

$$R = 0.553 \text{ k/w}, \varphi = 59,6 \text{ w/m}^2$$

Exercice 4 : Conduction stationnaire dans un corps de section variable.

On se propose de traiter le cas de la conduction de chaleur en régime permanent à travers une pièce ayant la forme d'un tronc de cône (de sommet 90°), parfaitement isolée de l'extérieur par sa surface latérale conique. La petite base S_1 et la grande base S_2 de ce corps sont hypothèses :

- conductivité thermique du matériau supposée constante.
- Flux de chaleur supposé unidimensionnel parallèle à l'axe Ox.

On donne :

- Température de la petite base : $\theta_1 = 30^\circ C$
- Température de la grande base : $\theta_2 = 60^\circ C$
- Conductivité thermique de matériau (acier) : $\lambda = 45 \text{ kcal} / \text{h.m.k}$
- Rayon de la petite base : $a = 4 \text{ cm}$
- Rayon de la grande base : $h = 9 \text{ cm}$

Calculer :

1. la distribution de température $\theta(x)$ dans le corps.
2. le flux thermique Φ .

A.N :

$$R = 0.0847 \text{ k/w}, \Phi = -354 \text{ w}$$

Exercice 5 : Corps à conductivité variable avec la température.

Soit une couche plane d'épaisseur e et dont les 2 faces sont maintenues à des températures constantes et uniformes θ_1 et θ_2 , en régime stationnaire. On suppose que λ est une fonction linéaire de θ sur l'intervalle $[\theta_2, \theta_1]$ de la forme $\lambda = \lambda_0(1 + \alpha\theta)$ (θ en $^\circ C$) calculer :

1. l'équation donnant la variation de température $\theta(x)$, et le flux Φ .

Application :

Un mur plan d'épaisseur $e = 3 \text{ cm}$ laisse passer une densité de flux $\varphi = 6 \text{ kw} / \text{m}^2$. On mesure la température sur chacune des faces et dans le plan médian du mur. On trouve respectivement $150^\circ C$, $38^\circ C$ et $80^\circ C$.

Déterminer l'expression de λ en fonction de la température. Si l'on admet qu'une relation linéaire est valable sur l'intervalle $[38, 150^\circ C]$.

A.N :

$$K = 0.03(1 + 0.005\theta) \text{ w.m}^{-1}.\text{k}^{-1}$$

Exercice 6 : mesure de la conductivité thermique d'un matériau.

On détermine la conductivité thermique λ_2 d'un corps par la méthode de comparaison. On utilise une plaque de cuivre ($\lambda_1 = 376$) d'épaisseur $e_1 = 20 \text{ mm}$, et une plaque du corps d'épaisseur $e_2 = 3 \text{ mm}$.

Quand l'état stationnaire est atteint, on note :

$$\theta_1 = 25.35^\circ C \quad \theta_2 = 20.15^\circ C \quad \theta_3 = 11.07^\circ C$$

- calculer λ_2
- avec quelle approximation est-elle connue, si l'on admet que :
 1. λ_1 est connue exactement.
 2. les épaisseur des plaques ont été mesurées à $1/20 \text{ mm}$ près.
 3. et sur chaque lecture thermométrique, on peut faire une erreur de $1/100$ de degré.

A.N :

$$K_2 = 32.3 \pm 0.8 \text{ w.m}^{-1}.\text{k}^{-1}$$

Exercice 7 :

Un réservoir sphérique a un diamètre intérieur $d = 1m$. Il est formé d'une couche de matériau d'épaisseur $e = 10cm$ et de conductivité thermique $\lambda = 1.5.10^{-3} w/cm.dg$. On donne :
température du réservoir $\theta_0 = -80 ^\circ C$

- température du milieu ambiant $\theta_1 = 20 ^\circ C$
- la surface extérieure échange de la chaleur convection et rayonnement avec le milieu ambiant à raison de $h = 14 w/m^2.dg$. Calculer :
- la température de la surface extérieure du réservoir.
- Le flux de chaleur Φ entrant dans le réservoir.

A.N :

$$\Phi = 874.6 w, \theta_1 = 68.9 ^\circ C, \theta_2 = 66.3 ^\circ C$$

2.5.2 Conduction de la chaleur en régime permanent avec effet de chaleur interne.

Exercice 1 :

Une ligne électrique de diamètre 2.5 cm est destinée à transporter sous haute tension, un courant de 1000 A. sachant que la résistance électrique de la ligne est de $0.06 \Omega/km$, que l'air ambiant est à $30 ^\circ C$, et que le coefficient de convection - rayonnement est de $18 w/m^2.k$.

Calculer :

1. la valeur de la source interne de chaleur supposée uniforme.
2. la température en surface de la ligne électrique.
3. la température maximale dans une section droite donnée.

Conductivité moyenne étant de $381 w/m.k$

A.N :

$$P = 1.2210^5 w/m^3, \theta_1 = 72 ^\circ C, \theta_{max} = 72.1 ^\circ C$$

Exercice 2 :

Un mur de 5 cm d'épaisseur et de conductivité $\lambda = 5 w/m.k$ dégage de la chaleur uniformément au taux de $1 w/cm^3$. Une face est parfaitement isolée tandis que l'autre est soumise à une condition de Fourier (convection) par un fluide à $40 ^\circ C$ et un coefficient de passage $h = 250 w/m^2.k$. Calculer :

1. la température maximale rencontrée dans le mur
2. la densité de flux à travers les 2 faces du mur.

A.N :

$$\theta_{max} = 490 ^\circ C, \varphi_0 = 0 w/m^2, \varphi_2 = 5 \cdot 10^4 w/m^2$$

Exercice 3 : étude thermique d'un élément de réacteur nucléaire.

- Soit un réacteur nucléaire dont les éléments de combustible, sont des cylindres pleins de rayon $R = 14.5 \text{ mm}$. On considère le dégagement de chaleur constant dans tout le volume d'un élément et égal à $P = 700 \text{ w/cm}^3$. On donne : $\lambda = 1.25 \text{ w/cm.k}$
 1. établir la formule donnant $\theta(r)$, en tout point intérieur du barreau.
 2. Evaluer la différence $\theta_m - \theta_1$
 θ_m : Température maximale atteinte dans le barreau.
 θ_1 : Température de la surface extérieur.
- On remplace maintenant l'élément plein par un élément annulaire de même rayon extérieur et de rayon intérieur 11 mm.

On admettra qu'aucune chaleur ne s'échappe par l'intérieur de l'anneau.

1. établir la formule donnant $\theta(r)$ en tout point de l'anneau.
calculer $\theta_m - \theta_2$. (θ_m : Température maximale atteinte)
2. calculer la densité de flux à travers la surface extérieure du combustible.
3. le bureau est entouré d'une gaine parfaitement adhérente d'aluminium de 1mm d'épaisseur.
($\lambda = 2.03 \text{ w/cm.k}$)

Calculer la variation $(\theta(r) - \theta_2)$ dans la gaine d'aluminium.

A.N :

$$\theta_m - \theta_1 = 145 \text{ }^\circ\text{C}, \theta_m - \theta_2 = \frac{\phi R_1}{\lambda} \ln\left(\frac{R_2}{r}\right)$$

Exercice 4 : Source de chaleur dépendant de la position.

On considère une plaque pleine d'épaisseur l , de température de surface θ_0 et θ_1 , et soumise sur face $x = 0$, à un flux de rayons gamma conduisant à une production de chaleur $p(x) = p_0 \exp(-\mu x)$.

p_0 : Valeur de $p(x)$ en surface, μ : Coefficient d'absorption (dépend de l'énergie du rayonnement considéré et de la nature de l'élément absorbant).

Calculer :

- le profil de températures dans la plaque, et la densité de flux à travers les 2 faces $x = 0$ et $x = l$.

2.5.3 Conduction dans les ailettes

Exercice1 :

Un tube d'échangeur de 2.5 cm de diamètre est équipé de 20 ailettes droites, placées longitudinalement le long du tube s'étendant jusqu'à 2.5 cm dans la direction radiale. Les ailettes sont en acier et d'épaisseur 1.5 mm ($\lambda = 46 \text{ w/m.k}$).

La température de fluide extérieur est de 20°C , et la température de la paroi est de 100°C .

1. pour quelle valeur de h coefficient de convection, ces ailettes cessent-elles d'être utiles ?
2. calculer : pour un coefficient $h = 50 \text{ w/m}^2\text{k}$

- le rendement de chaque ailette
- le flux échangé par mètre de longueur par chaque ailette.
- le flux total échangé par mètre de longueur du tube, et le comparer avec le flux échanger par le tube sans ailettes.

A.N :

$$h = 61330 \text{ w} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{k}^{-1}, \quad \eta = 0.79, \quad \Phi_1 = 3294 \text{ w}, \quad \Phi_2 = 314 \text{ w}$$

Exercice2 :

On allonge dans un feu un tisonnier en acier de 1 cm de diamètre dont le manche est en bois (supposé donc parfaitement isolé). Le bout chaud du tisonnier est à $\theta_0 = 400^\circ\text{C}$ tandis que l'air ambiant est $\theta_a = 60^\circ\text{C}$ le coefficient de convection rayonnement entre le tisonnier et l'air est $h = 30 \text{ w/m}^2 \cdot \text{k}$.

Sachant que la longueur nette (sans le manche) du tisonnier est de $l = 35 \text{ cm}$ et que la conductivité de l'acier est $\lambda = 50 \text{ w/mk}$, calculer :

1. la température $\theta(l)$ de l'acier au bout froid du tisonnier.
2. le flux total évacué par la tige.

A.N :

$$\theta_L = 62.99^\circ\text{C}, \quad \Phi = 20.7 \text{ w}$$

Exercice3 :

On considère un écoulement de gaz à l'intérieur d'une conduite cylindrique de rayons intérieur $r_1 = 100 \text{ mm}$ et extérieur $r_2 = 104 \text{ mm}$ et de conductivité thermique $\lambda = 10 \text{ w/m.dg}$

1. on suppose la température de paroi uniforme ($\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta_p$). On donne : températures des fluides $\theta_i = 320^\circ\text{C}$, $\theta_e = 20^\circ\text{C}$, $l = 10 \text{ cm}$, $d_1 = 3 \text{ mm}$, $d_2 = 7 \text{ mm}$

Coefficient de convection : $h_i = 20 \text{ w/m}^2 \cdot \text{dg}$, $h_e = 5 \text{ w/m}^2 \cdot \text{dg}$. Calculer :

- la température de la paroi θ_p , le flux évacué par unité de longueur de cylindre, et l'erreur $\delta\theta_p$ commise en supposant $\theta_p \approx \text{cte}$.
- 2. on veut isoler cette canalisation. Quelle épaisseur minimum de calorifuge ($\lambda = 0.6 \text{ w/m.k}$) devra t on mettre pour isoler la conduite ?
- 3. on veut mesurer la température intérieure du gaz. On introduit un thermocouple entouré d'un doigt de gant formé du même métal que la paroi. quelle est la θ^0 donnée par le thermocouple ?

A.N :

$$\theta_p = 258^\circ\text{C}, \quad \Phi = 20.7 \text{ w}, \quad e_m = 0.139 \text{ m}, \quad \theta_L = 317^\circ\text{C}$$

Exercice 4 :

Une canalisation en acier de température $\theta_0 = 160^\circ\text{C}$ (l'extérieure de paroi) est suspendue à un plafond par une barre en acier de section $10 * 50 \text{ mm}^2$. Et de longueur $l = 50 \text{ cm}$.

En admettant que l'extrémité coté maçonnerie est isolée thermiquement

- Evaluer : - le flux dissipé par cette barre. $h = 15 \text{ w/m}^2 \cdot \text{k}$, ($\lambda = 40 \text{ w/m.k}$), $\theta_e = 40^\circ\text{C}$
- la température à l'extrémité de la barre.

- Et son rendement thermique.

A.N :

$$\Phi = 24.4 \text{ w}, \theta_L = 42.9 \text{ }^\circ\text{C}, \eta = 0.226.$$

2.5. 4 Conduction en régime variable.

Exercice1 :

Une plaque métallique à température initiale uniforme de $230 \text{ }^\circ\text{C}$, a une face ($x = 0$) brusquement portée à $65 \text{ }^\circ\text{C}$. Calculez le temps nécessaire pour que la température à une profondeur $x = 38 \text{ mm}$, atteigne $120 \text{ }^\circ\text{C}$.

Quelle quantité de chaleur a été retirée de la plaque pendant ce temps on donne :

$$a = 0.86 \text{ cm}^2/\text{s}, \lambda = 200 \text{ w/m.dg} \text{ épaisseur de la plaque } e = 30 \text{ cm}$$

A.N :

$$q = -2.65 \cdot 10^7 \text{ J/m}^2$$

Exercice2 :

En plonge dans un bain de glace un cylindre d'aluminium, de diamètre 2.5 cm . Préalablement chauffé à une température uniforme $\theta_0 = 40 \text{ }^\circ\text{C}$. Après 5 minutes, La température du cylindre est de $5 \text{ }^\circ\text{C}$.

Estimer la valeur de coefficient de convection h supposé constant entre cylindre et bain de glace.

$$\text{On donne } \lambda = 230 \text{ w/m.dg}, \rho = 2700 \text{ kg/m}^3, c = 900 \text{ J/kg.dg}$$

A.N :

$$h = 105 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Exercice 3 :

Un plaque de 10 cm d'épaisseur initialement à une température uniforme de $500 \text{ }^\circ\text{C}$ est plongé dans un bain de liquide à $100 \text{ }^\circ\text{C}$ (trempe, $h = 5000 \text{ w/m}^2$). Calculer le temps nécessaire pour que le plan médian atteigne la température de $280 \text{ }^\circ\text{C}$.

A ce moment, quelle est la température à une profondeur de 0.5 cm ?

$$\text{On donne } \lambda = 1 \text{ w/m.dg}, a = 0.1 \text{ cm}^2/\text{s}$$

A.N :

$$\tau = 100 \text{ S}, \theta(x, t) = 128 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Exercice 4 :

On soumet un mur d'acier épais a une température à une condition de densité de flux constante à sa surface $\varphi_0 = 325 \text{ kw/m}^2$. Le mur était initialement à température uniforme $\theta_i = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. Calculer au bout de 30 secondes :

- La température à une profondeur $x = 2.5 \text{ cm}$.
- La température en surface.

- La quantité de chaleur absorbée par m^2 de surface.

On donne $\lambda = 46 \text{ w/m.dg}$, $a = 0.145 \text{ cm}^2 / \text{s}$

Exercice 5 :

Déterminer la profondeur minimale à laquelle on doit enterrer une conduite d'eau pour que celle-ci ne gèle pas dans les conditions suivantes :

- Le sol est à une température initiale uniforme $\theta_i = 5 \text{ }^\circ\text{C}$
- La température à la surface de sol chute brusquement à $-15 \text{ }^\circ\text{C}$ et se maintient à ce niveau pendant 15 jours.

Calculer la quantité de chaleur perdue par m^2 de surface du sol au bout de ce temps.

On donne : diffusivité thermique de sol : $a = 0.28 \text{ mm}^2 / \text{s}$

Effusivité thermique de sol $b = 800 \text{ J/m}^2\text{k}\cdot\sqrt{\text{s}}$.

A.N :

$$q = -2 \cdot 10^7 \text{ J/m}^2$$

Chapitre 3

Transferts de chaleur par convection.

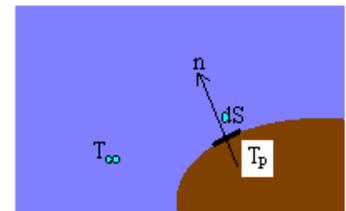
3.1 Introduction

Ce cours a pour objet l'étude des transferts d'énergie thermique au sein des substances physiques solides, liquides ou gazeuses. Il est évident a priori que les interactions d'un flux d'énergie avec cette matière vont dépendre de l'état sous lequel elle se trouve.

3.2 Coefficient d'échange de chaleur par convection

Considérons sur la surface d'un corps solide un élément d'aire dS à la température T_p . Si le corps est au contact d'un milieu fluide en mouvement caractérisé par une température T_∞ , la quantité de chaleur dQ qui traverse dS pendant le temps dt peut s'écrire:

$$d^2Q = h(T_p - T_\infty)dS dt \quad (3.1)$$



Le coefficient h est la conductance thermique de convection, ou coefficient d'échange thermique par convection. Il s'exprime en $W/(m^2.K)$.

Dans la relation (3.1), ci-dessus, dQ s'exprime en Joules, et $\frac{d}{dt}(dQ)$ en Watts.

Tout calcul d'échange thermique par convection nécessite la détermination du coefficient h , ce qui est toujours une affaire compliquée, car le transfert de chaleur par convection est complexe. Il résulte de la superposition de deux phénomènes différents:

- conduction entre les particules de fluide qui se rencontrent;
- mélange de ces particules par suite du mouvement d'ensemble du fluide.

De plus, l'échange de chaleur peut être accompagné d'un changement de phase (condensation ou évaporation).

On est donc amené à distinguer au moins trois types de problèmes que nous étudierons successivement:

- L'échange thermique monophasique en convection forcée.
- L'échange thermique monophasique en convection naturelle.
- L'échange thermique accompagné d'ébullition ou de condensation.

Selon les cas, on peut faire appel à une ou plusieurs des méthodes d'étude suivantes:

- L'analyse dimensionnelle combinée avec des résultats expérimentaux;
- La recherche de solutions analytiques (dans le cas relativement simple du régime laminaire) ou numériques (dans le cas général) des équations générales de conservation;
- La formulation d'analogies entre le transfert de quantité de chaleur et le transfert de quantité de mouvement (essentiellement dans le cas du régime turbulent).

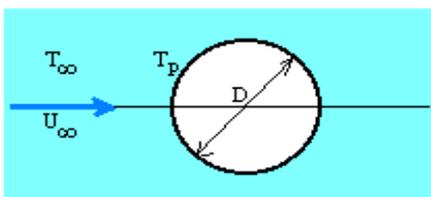
Dans le cadre de ce cours d'initiation aux transferts thermiques, nous nous limiterons à la première de ces trois approches, qui permet de traiter la plupart des problèmes pratiques qui peuvent se poser à un non spécialiste en matière d'échanges convectifs.

3.3 Transfert de chaleur par convection forcée sans changement d'état

Ce cas se rencontre très fréquemment en pratique industrielle dans les échangeurs thermiques de tous genres.

3.3.1 Analyse dimensionnelle

Nous introduirons les notions essentielles concernant la convection forcée en analysant le cas particulier de l'échange de chaleur entre une conduite cylindrique à section circulaire de diamètre D supposée infiniment longue (un tuyau), et un fluide extérieur à tempé-



rature constante T_∞ arrivant à vitesse constante U_∞ perpendiculairement à l'axe du tuyau.

Le problème consiste à préciser l'expression du flux thermique Φ échangé entre le fluide extérieur à la température T_∞ et une longueur unité de la surface du tuyau à la température T_p .

De fait, on recherche une formulation pour le coefficient d'échange thermique par convection h , auquel le flux thermique échangé Φ est lié par la relation introduite en (3.1) et qu'on peut écrire dans le cas présent:

$$\Phi = h (T_p - T_\infty) \pi D \tag{3.2}$$

L'analyse dimensionnelle de ce problème a comme point de départ l'inventaire exhaustif des grandeurs physiques mises en jeu, qui sont récapitulées dans le tableau ci-dessous:

<i>Grandeurs</i>	<i>Symbole</i>	<i>Unité S.I.</i>	<i>Équation aux dimensions</i>
<i>Diamètre du tuyau</i>	D	m	L
<i>Vitesse du fluide</i>	U_∞	m/s	LT⁻¹
<i>Masse volumique du fluide</i>	ρ	kg/m³	ML⁻³
<i>Viscosité dynamique du fluide</i>	μ	kg/(m.s)	ML⁻¹T⁻¹
<i>Conductivité thermique du fluide</i>	λ	W/(m.K)	MLT⁻³θ⁻¹
<i>Capacité thermique massique du fluide</i>	C	J/(kg.K)	L²T⁻²θ⁻¹
<i>Coefficient d'échange convectif</i>	h	W/(m².K)	MT⁻³θ⁻¹
<i>Écart de température</i>	T_p - T_∞	K	θ

Ce problème met en jeu huit grandeurs physiques et quatre dimensions. Le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM permet donc de prévoir que la forme la plus générale de la loi physique décrivant le phénomène étudié s'écrira:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0 \tag{3.3}$$

relation dans laquelle $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ désignent 4 produits sans dimension pouvant être constitués au moyen des 8 grandeurs physiques considérées.

Recherchons ces groupements en posant:

$$\pi = D^a \lambda^b U_\infty^c \rho^d \mu^e C^f h^g (T_p - T_\infty)^i \tag{3.4}$$

relation dans laquelle a, b, c, d, e, f, g, i sont 8 coefficients arbitraires.

L'équation aux dimensions d'un groupement π s'écrit:

$$[\pi] = [M]^{b+d+e+g} [L]^{a+b+c-3d-e+2f} [T]^{-3b-c-e-2f-3g} [\theta]^{-b-f-g+i}$$

Le groupement π devant être sans dimension, on doit donc respecter les 4 conditions exprimées par le système des 4 équations linéaires à 8 inconnues suivantes:

$$\begin{aligned} b + d + e + g &= 0 \\ a + b + c - 3d - e + 2f &= 0 \\ -3b - c - e - 2f - 3g &= 0 \\ -b - f - g + i &= 0 \end{aligned}$$

Toute solution de ces équations est une série d'exposants donnant un produit sans dimension π .

Le système linéaire ci-dessus possède 4 solutions linéairement indépendantes (à condition que la matrice des coefficients soit bien de rang 4), qui correspondent aux 4 produits sans dimension prévus par le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM.

En choisissant arbitrairement 4 des 8 coefficients, les 4 autres seront alors fournis par la résolution du système ci-dessus, ce qui conduira à *un groupement π sans dimension*. En fixant par exemple de manière parfaitement arbitraire:

$$c = 0 \quad d = 0 \quad g = 1 \quad i = 0$$

le système précédent se réduit à:

$$\begin{aligned} b + e &= -1 \\ a + b - e + 2f &= 0 \\ -3b - e - 2f &= 3 \\ -b - f &= 1 \end{aligned}$$

qui admet la solution: $a = 1 \quad b = -1 \quad e = 0 \quad f = 0$

Cette solution met en évidence le groupement sans dimension:

$$\pi_1 = \frac{h D}{\lambda} \quad (3.5)$$

Ce nombre sans dimension est appelé *le Nombre de Nusselt*. On le note N_u

Trois autres combinaisons arbitraires de coefficients sont encore possibles, conduisant de même à introduire les groupements sans dimensions:

$$\pi_2 = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} \quad (3.6)$$

On reconnaît le **Nombre de Reynolds** R_e introduit dans le Cours de Mécanique des Fluides.

Le suivant se présente sous la forme:

$$\pi_3 = \frac{\mu C}{\lambda} \quad (3.7)$$

Ce nombre sans dimension est appelé **le Nombre de Prandtl**. On le note P_r .

Enfin, le dernier groupement possible s'écrit:

$$\pi_4 = \frac{U_\infty^2}{C \Delta T} \quad (3.8)$$

Ce dernier nombre sans dimension est appelé **le Nombre d'Eckert**. On le note E_c .

La forme la plus générale de la loi physique décrivant le problème de convection forcée étudié s'écrira donc en définitive:

$$N_u = f(R_e, P_r, E_c) \quad (3.9)$$

avec:

$$N_u = \frac{h D}{\lambda} \quad R_e = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} \quad P_r = \frac{\mu C}{\lambda} \quad E_c = \frac{U_\infty^2}{C \Delta T} \quad (3.10)$$

Le Nombre de Nusselt N_u n'est autre que le coefficient d'échange thermique par convection h mis sous forme adimensionnelle. C'est le rapport du flux thermique Φ transmis par convection:

$$\Phi = h (T_p - T_\infty) S$$

à un flux thermique de référence Φ_r , qui est pris égal au flux de chaleur qui serait transmis par conduction à travers le fluide, avec un gradient de température $(T_p - T_\infty)/D$. Un tel flux de chaleur conduit serait donné par la loi de Fourier:

$$\Phi_r = \varphi S = - \lambda S \text{grad} \bar{T} = \lambda S \frac{(T_p - T_\infty)}{D}$$

Le rapport de ces deux flux de chaleur conduit alors à:

$$N_u = \frac{h (T_p - T_\infty) S}{\lambda S \frac{(T_p - T_\infty)}{D}} = \frac{hD}{\lambda} \quad (3.10.a)$$

L'interprétation du Nombre de Reynolds R_e est développée dans le Cours de Mécanique des Fluides. R_e est le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité, dans l'écoulement considéré. En effet, on peut toujours représenter la vitesse du fluide en un point de l'écoulement sous la forme $U_\infty u(y)$, $u(y)$ étant une fonction sans dimensions. L'accélération du fluide est alors proportionnelle à $U_\infty^2 \frac{\partial u}{\partial y}$ et les forces d'inertie au produit $\rho D^3 U_\infty^2 \frac{\partial u}{\partial y}$.

De même, les forces de viscosité sont proportionnelles à $D^2 \mu U_\infty \frac{\partial u}{\partial y}$, de sorte que le Nombre de Reynolds R_e est le rapport suivant:

$$R_e = \frac{\rho D^3 U_\infty^2 \frac{\partial u}{\partial y}}{D^2 \mu U_\infty \frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} \quad (3.10.b)$$

Le Nombre de Prandtl est le rapport de la viscosité cinématique μ/ρ à la diffusivité thermique $a = \lambda / \rho C$:

$$P_r = \frac{\mu/\rho}{\lambda/\rho C} = \frac{\mu C}{\lambda} \quad (3.10.c)$$

Ce nombre de Prandtl caractérise les propriétés thermiques du fluide, en mettant en rapport la distribution de vitesses (gouvernée par la viscosité cinématique) et la distribution de températures (gouvernée par la diffusivité thermique).

Le dernier groupement sans dimension révélé par l'analyse dimensionnelle ci-dessus est le Nombre d'Eckert. On peut montrer que ce Nombre caractérise la dégradation d'énergie mécanique en chaleur, et que tant que les vitesses du fluide demeurent faibles devant la vitesse du son, son importance demeure négligeable.

3.3.2 Corrélations expérimentales

Nous venons de voir que la forme la plus générale de la loi physique décrivant un problème de convection forcée s'écrivait:

$$N_u = f (R_e , P_r , E_c) \quad (3.9)$$

En fait, compte tenu de la remarque concernant le Nombre d'Eckert, on adoptera le plus généralement une relation de la forme:

$$N_u = f (R_e , P_r) \quad (3.11)$$

Cependant, connaître l'existence d'une telle relation fonctionnelle ne nous permet guère encore de résoudre un problème concret.

Revenons donc sur ce qui doit préoccuper l'ingénieur thermicien en pratique.

D'une façon générale, un problème d'échange de chaleur par convection entre une paroi solide et un fluide adjacent se trouve complètement défini par la connaissance de données de 5 types différents:

1. Une configuration géométrique déterminant les formes, mais pas les dimensions.
2. Une dimension caractéristique, notée L , servant d'échelle de longueur.
3. L'écart $T_p - T_\infty$ entre une température de paroi solide T_p et une température du fluide T_∞ .
4. La vitesse U_∞ du fluide loin des parois solides.
5. Les propriétés physiques du fluide: ρ , μ , C , λ

Il s'agit alors de calculer la quantité de chaleur Q traversant une aire S de la paroi solide pendant un intervalle de temps Δt .

On a introduit une représentation adimensionnelle de cette quantité physique Q . C'est le Nombre de Nusselt N_u . On sait en outre que ce Nombre de Nusselt N_u est fonction du Nombre de Reynolds R_e de l'écoulement considéré, et du Nombre de Prandtl P_r caractérisant les propriétés thermiques du fluide.

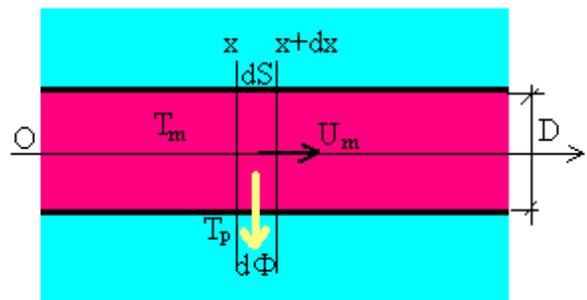
Une telle relation fonctionnelle $N_u = f (R_e , P_r)$ ne peut pas être établie théoriquement, mais doit être déterminée expérimentalement. De nombreux résultats ont été compilés dans la littérature spécialisée. Ils sont généralement désignés sous l'appellation de « corrélations expérimentales ».

Chaque corrélation expérimentale n'est applicable que pour une configuration géométrique bien déterminée (données de type 1.), pour un fluide donné (données de type 5.), et dans un domaine de variation de température (données de type 3.), et de vitesses du fluide également précisé (données de type 4.).

On trouvera dans les pages qui suivent, une présentation des corrélations expérimentales les plus usuelles en convection forcée.

3.3.2.1 Écoulement dans un tube

Un fluide s'écoule en régime permanent dans une conduite cylindrique circulaire de diamètre intérieur D . Dans une section droite, à l'abscisse x par rapport à l'entrée de la conduite, la vitesse moyenne du fluide est U_m , sa température moyenne T_m , et la température de la paroi T_p . La corrélation expérimentale indiquée



permet de calculer le flux de chaleur $d\Phi$ échangé à travers l'aire latérale de paroi dS comprise entre les abscisses x et $x + dx$:

$$d\Phi = h (T_m - T_p) \pi D dx \tag{3.12}$$

a) Régime turbulent:

Dans le domaine de Nombres de Reynolds défini par: $10^4 < Re < 1,2 \cdot 10^5$
on applique la formule de Colburn:

$$N_u = 0,023 P_r^{1/3} R_e^{0,8} \tag{3.13}$$

Il existe deux restrictions au domaine de validité de cette corrélation:

- Le régime d'écoulement dans le tube doit être parfaitement établi, ce qui n'est garanti que si: $x/D > 60$
- Le fluide doit être tel que son Nombre de Prandtl soit compris entre 0,7 et 100.

b) Régime d'entrée des tubes

Dans le cas où: $x/D < 60$, la corrélation de Colburn doit être corrigée de la manière suivante pour tenir compte de ce que le profil de vitesses du fluide dans le tube ne peut pas encore être complètement établi:

$$N_u = 0,023 P_r^{1/3} R_e^{0,8} \left[1 + \left(\frac{D}{x} \right)^{0,7} \right] \quad (3.14)$$

c) Régime laminaire

Dans le domaine $R_e < 2000$, on peut appliquer les corrélations expérimentales de Lévêque, exprimées en fonction du paramètre:

$$A = \frac{1}{R_e} \frac{x}{D} P_r$$

ces corrélations ont pour expressions:

$$N_u = 3,66 \quad \text{pour } A > 0,05 \quad (3.15)$$

$$N_u = 1,06 A^{-0,4} \quad \text{pour } A < 0,05$$

Exemple pratique:

Un tuyau de diamètre $D = 20$ mm transporte un débit $Q = 0,5$ l/s d'eau à 50°C .

Déterminer le flux thermique transmis par convection du fluide vers la paroi, par mètre linéaire de conduite, dans le cadre des hypothèses suivantes:

- l'alimentation en eau chaude est telle que la température de celle-ci demeure constante;
- la paroi du tube est suffisamment mince pour qu'on puisse y négliger tout phénomène de conduction;
- la température extérieure du milieu environnant le tube est de 15°C ;
- l'écoulement est parfaitement établi (cas du régime permanent dans un tube de grande longueur).

On adoptera les valeurs suivantes pour les propriétés physiques de l'eau:

Masse volumique à 50°C :	$\rho = 988 \text{ kg/m}^3$
Viscosité dynamique à 50°C :	$\mu = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$
Conductivité thermique à 50°C :	$\lambda = 0,639 \text{ W/(m.}^\circ\text{C)}$

Capacité thermique massique à 50°C: $C = 4.184 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$

La vitesse moyenne de cet écoulement est: $U_m = \frac{Q}{\pi D^2/4} = \frac{0,0005}{0,000314} = 1,59 \text{ m/s}$

Le Nombre de Reynolds a donc pour valeur: $R_e = \frac{\rho U_m D}{\mu} = \frac{988 \cdot 1,59 \cdot 0,02}{0,55 \cdot 10^{-3}} = 57.124$

Calculons le Nombre de Prandtl du fluide: $P_r = \frac{\mu C}{\lambda} = \frac{0,55 \cdot 10^{-3} \cdot 4184}{0,639} = 3,60$

L'écoulement est turbulent, et les conditions telles qu'on peut appliquer la formule de Colburn:

$$N_u = 0,023 P_r^{1/3} R_e^{0,8} \quad (3.13)$$

Le résultat obtenu est:

$$N_u = 224 = \frac{h D}{\lambda}$$

ce qui permet de calculer le coefficient d'échange thermique par convection h:

$$h = \frac{\lambda N_u}{D} = \frac{0,639 \cdot 224}{0,02} = 7.156 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$$

La relation de définition du coefficient h:

$$d\Phi = h (T_m - T_p) \pi D dx \quad (3.12)$$

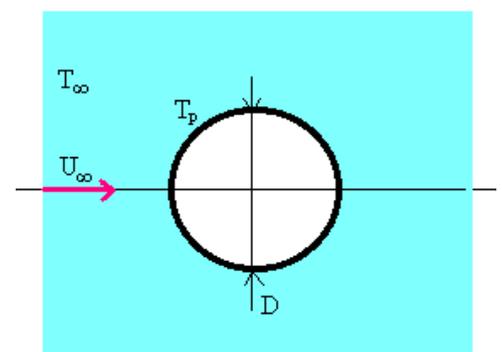
permet alors de déduire la puissance thermique transférée du fluide vers le milieu extérieur, à travers chaque mètre linéaire de tuyau, grandeur exprimée en W/m:

$$W = \frac{d\Phi}{dx} = h (T_m - T_p) \pi D = 15,7 \text{ kW}$$

3.3.2.2 Ecoulement autour d'un tube

On considère un tube de diamètre *extérieur* D. Il est baigné dans l'écoulement extérieur d'un fluide circulant perpendiculairement à l'axe du tube. Cet écoulement extérieur est caractérisé à l'infini amont par une vitesse U_∞ et une température T_∞ .

Comme il se forme un sillage en aval de l'écoulement, le coefficient de convection h ne sera pas constant sur toute la périphérie du tube.



On déterminera donc un *coefficient de convection moyen* pour l'ensemble du tube, dont la paroi prend une température d'équilibre T_p .

a) *Cas d'un gaz*

Une corrélation expérimentale a été proposée pour ce type de problème par Hilpert. Elle s'écrit:

$$Nu = A (Re)^m \quad (3.16)$$

Les valeurs du coefficient A et l'exposant m varient avec le Nombre de Reynolds et sont données dans le tableau ci-contre.

Re	A	m
$1 < Re < 4$	0,891	0,330
$4 < Re < 40$	0,821	0,385
$40 < Re < 4 \cdot 10^3$	0,615	0,466
$4 \cdot 10^3 < Re < 4 \cdot 10^4$	0,174	0,618
$4 \cdot 10^4 < Re < 4 \cdot 10^5$	0,024	0,805

Si le Nombre de Prandtl ne figure pas dans cette corrélation uniquement applicable au cas des gaz, c'est que pour tous les gaz usuels, le Nombre de Prandtl a une valeur sensiblement constante et voisine de 0,75.

b) *Cas d'un liquide*

La corrélation à appliquer s'écrit alors:

$$Nu = 1,11 A (Re)^m (Pr)^{0,31} \quad (3.17)$$

A et m étant également les valeurs données dans le tableau précédent.

Application:

Dans une expérience de physique nucléaire, on irradie un barreau de cuivre de 1 cm de diamètre et de 10 cm de long, en le plaçant dans une pile.

On refroidit ce barreau en le balayant par un courant d'hélium, refroidi préalablement à 77 K, et qui le frappe perpendiculairement avec une vitesse moyenne d'écoulement de 54 m/s. La température de paroi du barreau de cuivre s'établit alors à 80 K.

Déduire de cette mesure de température le dégagement de chaleur (en W/g) qui se produit dans le barreau de cuivre irradié.

On donne les caractéristiques suivantes de l'hélium, à la température considérée:

$$\begin{aligned} \rho &= 0,65 \text{ kg/m}^3 \\ \mu &= 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m.s)} \\ \lambda &= 0,06 \text{ W/(m.K)} \end{aligned}$$

$$C = 5300 \text{ J/(kg.K)}$$

Le cuivre a une masse volumique de 8940 kg/m^3

Nous allons utiliser la corrélation (3.16) : $N_u = A (R_e)^m$, pour calculer le coefficient de transfert convectif h .

Commençons par calculer le Nombre de Reynolds de l'écoulement d'hélium:

$$R_e = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{0,65 \cdot 54 \cdot 0,01}{8,5 \cdot 10^{-6}} = 41.294$$

Dans le tableau indiqué précédemment, on lit les valeurs de A et m indiquées pour $R_e < 40000$ et pour $R_e > 40000$. Comme on est pratiquement à cette valeur frontière de 40000 , on calculera les 2 Nombres de Nusselt possibles, et on prendra la moyenne.

R_e	A	m	$N_u = A (R_e)^m$
$4 \cdot 10^3 < R_e < 4 \cdot 10^4$	0,174	0,618	123,9
$4 \cdot 10^4 < R_e < 4 \cdot 10^5$	0,024	0,805	124,7

Nous aurons donc $Nu = 124,3 = hD/\lambda$, d'où on tire la valeur du coefficient h caractérisant le transfert de chaleur convectif du barreau de cuivre vers l'hélium:

$$h = \frac{\lambda N_u}{D} = \frac{0,06 \cdot 124,3}{0,01} = 746 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$$

Le flux de chaleur transféré par convection à l'hélium est donc:

$$\Phi = h S (T_p - T_\infty) = h \pi D L (T_p - T_\infty) = 746 \cdot 3,14 \cdot 0,01 \cdot 0,10 \cdot (80 - 77) = 7,02 \text{ W}$$

Le barreau de cuivre ayant atteint son équilibre thermique, cette puissance thermique Φ extraite correspond exactement à la puissance thermique dégagée dans la masse M de cuivre, masse qui a pour valeur:

$$M = \rho_{cu} \frac{\pi D^2}{4} L = 8940 \frac{3,14 \cdot 0,0001}{4} 0,10 = 0,070 \text{ kg} = 70 \text{ g}$$

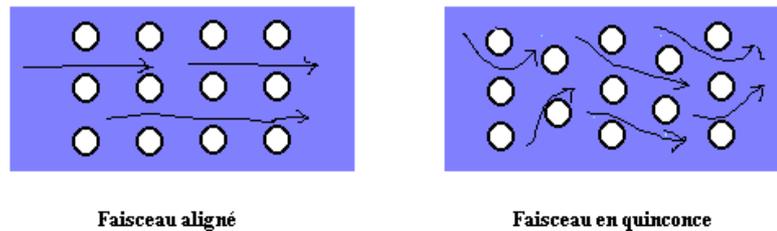
L'irradiation du cuivre dans la pile dégage donc une puissance thermique massique égale à:

$$\frac{7,02 \text{ W}}{70 \text{ g}} = 0,1 \text{ W/g}$$

3.3.2.3 Écoulement autour d'un faisceau de tubes

De nombreux appareils industriels tels que les réchauffeurs d'air, les échangeurs thermiques, sont constitués de rangées de tubes parallèles, plongés dans un écoulement de fluide dirigé perpendiculairement à leur axe.

Les tubes peuvent être disposés en ligne ou en quinconce, comme l'indique la figure suivante:



L'expérience montre que la disposition en quinconce est le siège d'une plus grande turbulence, et conduit alors à un coefficient de convection plus élevé que la disposition alignée.

On utilisera la corrélation suivante:

$$N_u = B (R_e)^{0,6} (P_r)^{0,33} \quad (3.18)$$

avec: $B = 0,26$ pour un faisceau aligné; $B = 0,33$ pour un faisceau en quinconce.

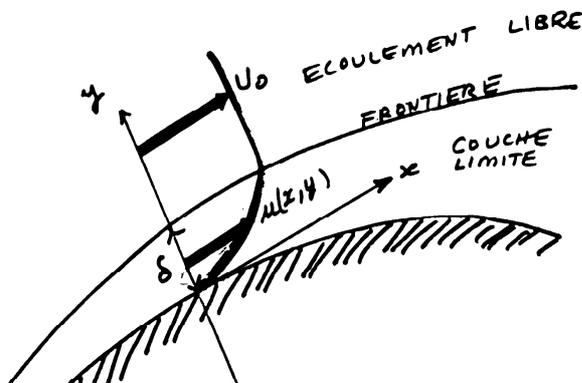
3.3.2.4 Écoulement le long d'une plaque plane

Les corrélation expérimentales présentées jusqu'à maintenant ont une fonction pleinement opérationnelle (un ingénieur de bureau d'études peut, à l'aide de ces outils, élaborer des projets parfaitement valides), mais cette approche est cependant quelque peu frustrante, car elle n'offre pas le moindre accès à la compréhension des phénomènes physiques dont il est question.

Au moment d'aborder par cette méthode le calcul du transfert thermique entre une plaque plane et un fluide, deux remarques importantes doivent être faites:

- (1) Il est impossible de dissocier l'analyse du transfert thermique entre un corps solide et un fluide en mouvement dans lequel cet obstacle est plongé, de l'analyse de la perturbation de l'écoulement du fluide provoquée par la présence de l'obstacle.
- (2) L'analyse de l'écoulement d'un fluide au voisinage d'une plaque plane permet de développer des concepts plus généraux qui conduisent à distinguer plusieurs régions très différentes dans ces types d'écoulements perturbés par la présence d'un obstacle:

- la sous-couche laminaire, dans laquelle l'écoulement ne dépend que de la viscosité μ du fluide, et est caractérisé par un profil de vitesse variant linéairement avec la distance à la paroi;
- la couche limite turbulente, régie par des conditions de paroi, et dans laquelle le profil de vitesse est exponentiel;
- la zone turbulente externe, complètement mélangée, avec un profil de vitesse logarithmique pratiquement plat.



Entre la paroi et la sous-couche laminaire, l'échange thermique dans la direction normale à la paroi ne pourra s'effectuer que par conduction. La conductivité λ des fluides étant faible par rapport à celle des solides, la sous-couche laminaire oppose une résistance importante au passage de la chaleur. Il en résulte dans cette région une variation ra-

pide de la température, qui devra passer d'une valeur T_{op} à la paroi, à une valeur T_∞ dans la zone mélangée. Un tel transfert par conduction est régi par la loi de Fourier (2.3):

$$\frac{d\Phi}{dS} = \frac{d^2Q}{dS dt} = - \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0} \tag{3.19}$$

expression de la densité de flux thermique à la paroi.

Cette quantité élémentaire de chaleur d^2Q cédée par la paroi sera ensuite transportée par convection dans le fluide, selon la loi générale:

$$d^2Q = h (T_p - T_\infty) dS dt \tag{3.20}$$

ce qui met en évidence la relation qui existe entre le coefficient d'échange thermique par convection h , et le gradient de température à la paroi:

$$h = - \frac{\lambda}{T_p - T_\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0} \tag{3.21}$$

Si on considère une surface pariétale finie S , le flux de chaleur à travers cette surface sera de la forme:

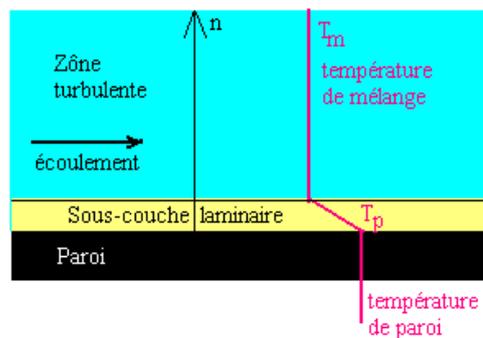
$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = h(T_p - T_\infty) S$$

que l'on peut encore écrire sous la forme:

$$\Phi = \frac{T_p - T_\infty}{R_{T_p - T_\infty}} \quad (3.22)$$

$$R_{T_p - T_\infty} = \frac{1}{hS} \quad (3.23)$$

A l'extérieur de la sous-couche laminaire, les particules fluides des zones turbulentes vont venir (de manière aléatoire) au voisinage de cette sous-couche visqueuse, s'y échaufferont (dans l'hypothèse où $T_p > T_\infty$, par exemple) puis, se déplaçant vers l'extérieur, se mélangeront avec le fluide plus froid. Il en résulte un transfert thermique important et une égalisation rapide des températures, le fluide hors de la zone pariétale prenant une température T_m appelée température de mélange.



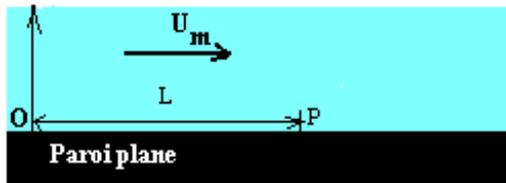
Le phénomène que nous venons de décrire qualitativement est une couche limite thermique. Les propriétés de cette couche limite thermique sont de même nature que celles de la couche limite cinématique introduite en mécanique des fluides.

Dans le cadre de ce cours d'initiation aux transferts thermiques, nous n'irons pas plus avant dans les développements théoriques qui permettent de modéliser mathématiquement les couches limites thermiques, d'une manière tout-à-fait analogue à ce que nous n'avons fait qu'esquisser rapidement dans le Cours de mécanique des Fluides.

Nous nous contenterons donc, et cela sera suffisant pour la résolution des problèmes pratiques, de recourir à la méthode des corrélations expérimentales.

a) Régime laminaire sur une plaque plane

La plaque peut être indifféremment verticale, horizontale ou oblique. La vitesse moyenne de l'écoulement est désignée par U_m .



Si on considère une distance $L = OP$ parcourue par le fluide le long de la plaque, on peut l'utiliser pour calculer un Nombre de Reynolds:

$$R_{eL} = \frac{\rho U_m L}{\mu}$$

On va caractériser le transfert convectif *moyen* entre l'origine O et l'abscisse $L = OP$ par un coefficient de convection moyen \bar{h} défini comme la moyenne du coefficient h entre $x = 0$ et $x = L$.

Le Nombre de Nusselt moyen $\bar{N}_{uL} = \frac{\bar{h} L}{\lambda}$ sera alors calculé par la corrélation suivante:

$$\bar{N}_{uL} = \frac{2}{3} (R_{eL})^{0,5} (Pr)^{0,33} \tag{3.24}$$

Cette corrélation est valable tant que: $R_{eL} < 2000$

b) Régime turbulent sur une plaque plane

Si $R_{eL} > 2000$, l'écoulement devient turbulent. La corrélation qu'il convient d'appliquer pour calculer le transfert convectif s'écrit alors:

$$\bar{N}_{uL} = 0,036 (R_{eL})^{0,8} (Pr)^{0,33} \tag{3.25}$$

3.4 Transfert de chaleur par convection naturelle sans changement d'état

La convection naturelle est la forme d'échange convectif la plus couramment observée. Au contact d'un corps chaud, la température de l'air augmente, donc sa masse volumique décroît. L'air ambiant, de masse volumique plus élevée, exerce une poussée d'Archimède vers le haut, et la masse d'air chaude s'élève en enlevant de la chaleur au corps. Elle est remplacée par une masse d'air froid qui, au contact du corps s'échauffe, et ainsi de suite.

Ces échanges jouent un grand rôle en pratique. On citera en particulier:

- le chauffage domestique
- le calcul des pertes par les parois dans les installations industrielles

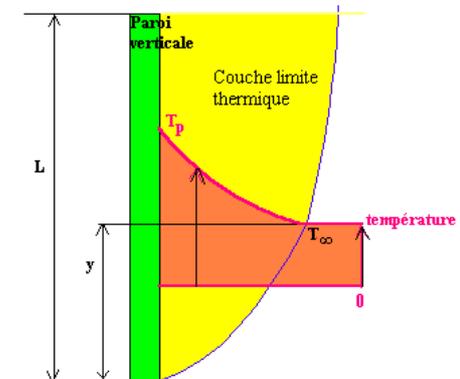
Comme les vitesses en convection naturelle demeurent faibles, les échanges sont nettement moins intenses qu'en convection forcée. Il en résulte qu'échanges en convection naturelle et échanges par rayonnement sont souvent du même ordre de grandeur.

3.4.1 Couche limite de convection naturelle

Considérons une plaque plane verticale chaude, de température de paroi T_p , au contact d'un fluide froid dont la température au loin est T_∞ .

Au voisinage de la plaque, existe une zone perturbée appelée couche limite de convection naturelle.

L'épaisseur δ de cette couche limite et la densité du flux thermique varient avec la cote y .



On définit un coefficient moyen de convection naturelle h permettant d'exprimer le flux de chaleur échangé sur toute la surface S de la plaque sous la forme:

$$\Phi = h S (T_p - T_\infty) \tag{3.26}$$

3.4.2 Résultats de l'analyse dimensionnelle

Des considérations d'analyse dimensionnelle semblables à celles exposées au § 3.3.1 amènent à définir un nouveau groupement adimensionnel appelé Nombre de Grashof:

$$G_r = \frac{\alpha g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} \tag{3.27}$$

expression dans laquelle:

- L est une dimension linéaire permettant de calculer la surface d'échange, par exemple la hauteur de la plaque dans l'exemple précédent.
- ΔT est la différence de température entre la paroi chauffante et le fluide.

- α est le coefficient de dilatation volumique du fluide à pression constante:

Par définition, si l'unité de masse d'un corps occupe à la température T le volume v, son coefficient de dilatation volumique α a pour expression:

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p = \text{cte}} \quad (3.28)$$

Dans le cas d'un gaz parfait, l'équation d'état de ce gaz s'écrira pour une masse unité $m = 1$:

$$p v = R T$$

d'où en différentiant à pression p constante:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p = \text{cte}} = \frac{1}{p} R$$

ce qui permet d'obtenir immédiatement l'expression du coefficient α de dilatation volumique à pression constante, dans le cas d'un gaz, considéré comme parfait:

$$\alpha = \frac{1}{p v} R = \frac{1}{T} \quad (3.29)$$

Dans l'expression (3.28), on prendra bien garde que la température T du gaz est sa température absolue, en Kelvin.

Pour les liquides, on ne pourra bien entendu plus utiliser de relation du type de l'équation (3.28) ci-dessus.

Dans le cas de l'eau, α est donné dans la table ci-dessous:

<i>T en °C</i>	<i>10</i>	<i>20</i>	<i>30</i>	<i>40</i>	<i>50</i>	<i>60</i>	<i>70</i>	<i>80</i>	<i>90</i>
10³. α	0,08	0,20	0,30	0,38	0,45	0,53	0,58	0,64	0,67

3.4.3 Interprétation physique du Nombre de Grashof

Le fluide au contact de la paroi chaude de température T_p se trouve lui à une température T_∞ . Sa masse volumique à cette température est :

$$\rho_\infty = \frac{1}{v_\infty} \quad (3.30)$$

v_∞ désignant le volume occupé à cette température par une unité de masse.

A cette température T_∞ , le volume v_∞ contient un poids g de fluide.

Lorsque la masse unité de fluide occupant ce volume v_∞ s'échauffe au contact de la paroi et prend la température T_p , sa masse volumique devient:

$$\rho = \rho_\infty + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT \quad (3.31)$$

Comme on peut écrire:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial v_\infty} \right)_p \left(\frac{\partial v_\infty}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{-1}{v_\infty^2} \right) (\alpha v_\infty) = - \frac{\alpha}{v_\infty} = - \alpha \rho_\infty$$

La relation (3.31) s'écrit donc:

$$\rho = \rho_\infty (1 - \alpha dT)$$

Le volume v_∞ considéré ci-dessus contient maintenant un fluide moins dense, dont le poids est devenu:

$$\rho g v_\infty = \rho_\infty g (1 - \alpha dT) v_\infty = g - \alpha g dT$$

ce qui veut dire que le fluide considéré subit une poussée vers le haut d'intensité $\alpha g \Delta T$

Le Nombre de Grashof défini par la relation (3.27) peut se présenter sous la forme du rapport suivant:

$$G_r = \frac{\alpha g \Delta T}{\left(\frac{\mu}{\rho} \right)^2 \frac{1}{L^3}} \quad (3.27)$$

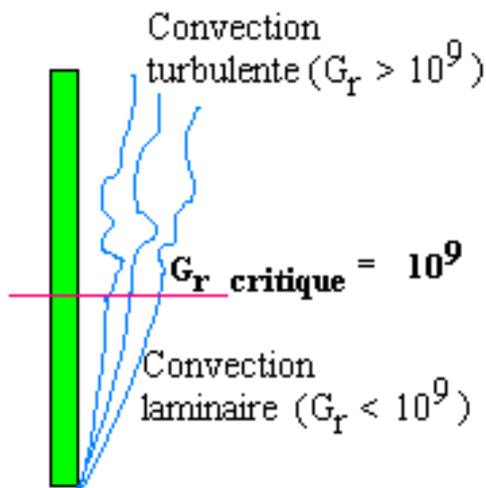
On reconnaît au numérateur la poussée d'Archimède subie par unité de masse, dont la dimension est LT^{-2} , et au dénominateur une force de viscosité par unité de masse également.

Le Nombre de Grashof est donc le rapport des forces de pesanteur qui agissent pour mettre en mouvement le fluide, aux forces de viscosité qui tendent à amortir ce mouvement.

Plus G_r est grand, plus la convection naturelle sera intense.

3.4.4 Convection naturelle turbulente

Si on reprend l'exemple du § 3.4.1, on constate que plus la hauteur de la plaque augmente, plus le Nombre de Grashof augmente également. On doit donc observer une augmentation de l'intensité du mouvement de convection naturelle lorsqu'on s'élève vers le haut de la plaque.



L'expérience montre que l'écoulement en convection naturelle est d'abord laminaire, puis devient turbulent dans la partie supérieure, la transition ayant lieu à une cote correspondant à un Nombre de Grashof de l'ordre de 10^9 .

L'écoulement de convection naturelle créé par une cigarette illustre très bien ce phénomène.

3.4.5 Corrélations expérimentales

Les relations rendant compte des études expérimentales de transfert thermique en convection naturelle sont généralement de la forme:

$$N_u = C (G_r \cdot P_r)^n \tag{3.32}$$

Les grandeurs physiques intervenant dans les Nombres de Grashof et de Prandtl doivent être calculées pour la température moyenne $\frac{T_p - T_\infty}{2}$.

L'exposant n prendra les valeurs suivantes:

- $n = 1/4$ lorsque la convection est laminaire;
- $n = 1/3$ lorsque la convection est turbulente.

La valeur du coefficient C dépend du régime de convection ainsi que de la géométrie et de l'inclinaison de la paroi.

3.4.5 Application pratique

Le mur d'un bâtiment a 6 m de haut et 10 m de long. Sous l'échauffement dû au soleil, sa température extérieure atteint 40°C . La température ambiante extérieure étant de 20°C , calculer la puissance thermique échangée par convection entre le mur et l'extérieur.

On donne les propriétés physiques suivantes de l'air, à la température de 30°C :

Masse volumique ρ :	1,149 kg/m ³
Conductivité thermique λ :	0,0258 W/(m.K)
Viscosité dynamique μ :	18,4.10 ⁻⁶ Pa.s
Capacité thermique massique C_p :	1006 J/(kg.K)

On a vu qu'un tel échange pouvait se calculer par une corrélation expérimentale du type décrit par l'équation (5.32):

$$N_u = C (G_r \cdot P_r)^n \quad (3.32)$$

Il faut commencer par calculer les Nombres de Grashof et de Prandtl.

Le Nombre de Grashof est donné par la relation:

$$G_r = \frac{\alpha g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad (3.27)$$

avec:

$$\alpha = 1/T = 1/(30 + 273) = 0,0033 \text{ K}^{-1}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta T = 20 \text{ °C}$$

$$\rho = 1,149 \text{ kg/m}^3$$

$$L = 6 \text{ m}$$

$$\mu = 18,4 \cdot 10^{-6} \text{ Pa.s}$$

$$\text{On obtient donc: } G_r = \frac{0,0033 \cdot 9,81 \cdot 20 \cdot (1,149)^2 \cdot (6)^3}{(18,4 \cdot 10^{-6})^2} = 5,45 \cdot 10^{11}$$

Le Nombre de Prandtl est donné par la relation:

$$P_r = \frac{\mu/\rho}{\lambda/\rho C} = \frac{\mu C}{\lambda} \quad (3.10.c)$$

soit:

$$P_r = \frac{18,6 \cdot 10^{-6} \cdot 1006}{0,0258} = 0,725$$

On peut alors calculer le produit $G_r \cdot P_r$ qui est utilisé comme critère de transition entre le régime de convection naturelle laminaire et celui de convection naturelle turbulente, la valeur critique étant de 10^9 . Ce produit $G_r \cdot P_r$ est appelé le Nombre de Rayleigh R_a :

$$R_a = G_r \cdot P_r = 5,45 \cdot 10^{11} \cdot 0,725 = 3,95 \cdot 10^{11}$$

On est donc nettement en régime de convection naturelle turbulente, et on devra donc donner aux coefficients C et n de la corrélation (3.32) les valeurs:

$$C = 0,13 \text{ et } n = 1/3$$

d'où la valeur du Nombre de Nusselt de cet écoulement de convection naturelle:

$$N_u = \frac{h L}{\lambda} = C (G_r \cdot P_r)^n = 0,13 (3,95 \cdot 10^{11})^{0,33} = 954$$

On en déduit alors le coefficient d'échange convectif h:

$$h = \frac{\lambda N_u}{L} = \frac{0,0258 \cdot 954}{6} = 4,10 \text{ W / (m}^2 \cdot \text{K)}$$

d'où le flux de chaleur échangé sur toute la surface S:

$$\Phi = h S (T_p - T_\infty) \quad (3.26)$$

La puissance thermique échangée par convection entre le mur et l'extérieur a donc pour valeur:

$$\Phi = 4,10 \cdot 6 \cdot 10 \cdot (40 - 20) = 4922 \text{ W}$$

Remarque:

Le résultat du calcul précédent a fourni la valeur $h = 4,10 \text{ W / (m}^2 \cdot \text{K)}$

Pour les gaz, les coefficients de transfert par convection naturelle h sont toujours de l'ordre de 1 à 10 $\text{W / (m}^2 \cdot \text{K)}$.

Dans le cas des liquides, h sera par contre toujours compris entre 10 et 1000 $\text{W / (m}^2 \cdot \text{K)}$

Chapitre 4

Transferts de chaleur par rayonnement.

4.1 Introduction

Le chapitre 2 a été consacré à l'analyse du mécanisme d'un mode de transfert d'énergie thermique qui requiert la présence d'un milieu matériel solide: c'est la conduction.

Par ailleurs, nous avons vu dans le cours de mécanique des fluides que lorsqu'un liquide ou un gaz est en mouvement, il apparaît un mode de transport des quantités de mouvement que l'on appelle le transport convectif. C'est ce même phénomène de convection qui intervient dans les échanges thermiques entre une paroi et un fluide en mouvement. Cette fois, ce sont les mouvements macroscopiques du fluide qui réalisent le transport de la chaleur.

Mais il existe également un mode de transfert d'énergie thermique qui, contrairement à la conduction ou à la convection, ne nécessite la présence d'aucun support matériel solide ou fluide.

La manifestation la plus commune de ce phénomène est celle du rayonnement solaire qui nous parvient sur la terre après avoir parcouru une distance considérable dans le vide spatial.

Ce transfert d'énergie fait intervenir un mécanisme physique qui est le rayonnement électromagnétique, dont la propagation est quasi instantanée, du moins à l'échelle des distances terrestres.

4.2 Le rayonnement électromagnétique

Tous les corps solides, liquides ou gazeux émettent un rayonnement de nature électromagnétique. Cette émission d'énergie s'effectue au détriment de leur énergie interne. Pour le thermicien, il s'agit d'un flux de chaleur émis par le corps considéré.

Ce rayonnement thermique n'est pas une onde monochromatique. Il est composé de radiations de longueurs d'onde différentes, comprises entre $0,1 \mu\text{m}$ et $100 \mu\text{m}$, donnant des spectres continus dans le cas des solides, ou des spectres de bandes dans le cas de certains gaz.

Cette gamme de $0,1 \mu\text{m}$ à $100 \mu\text{m}$ ne représente qu'une toute petite portion du spectre des ondes électromagnétiques, qui s'étend de $10^{-8} \mu\text{m}$ pour les rayons cosmiques jusqu'à plusieurs km pour les ondes hertziennes.

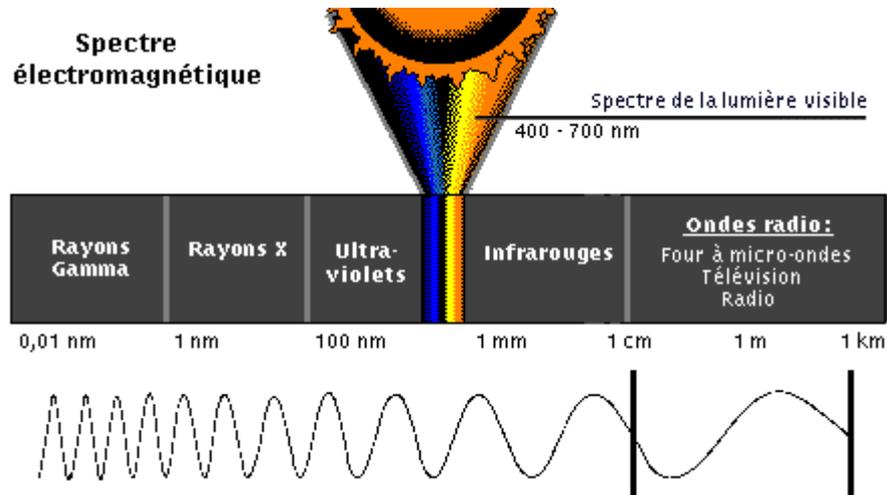


Figure 4.1 - le spectre électromagnétique

Dans ce domaine de $0,1 \mu\text{m}$ à $100 \mu\text{m}$, nos sens sont capables de percevoir le rayonnement thermique sous la forme d'une sensation de chaleur.

A l'intérieur d'une bande encore plus étroite comprise entre $0,4 \mu\text{m}$ et $0,8 \mu\text{m}$, appelée spectre visible, le rayonnement devient sensible à la rétine de notre œil. Nous réserverons le nom de lumière exclusivement à cette partie visible du rayonnement thermique.

Le rayonnement thermique dans la partie non visible du spectre porte le nom d'ultraviolet (U.V) du côté des courtes longueurs d'onde (de $0,1$ à $0,4 \mu\text{m}$), et d'infrarouge (IR) du côté des grandes longueurs d'onde (de $0,8$ à $100 \mu\text{m}$).

La propagation du rayonnement thermique s'effectue dans le vide en ligne droite, et à la vitesse de la lumière, sans aucune diminution de l'énergie transportée. On dit, de ce fait, que le vide est un milieu parfaitement transparent.

La plupart des gaz simples (O_2 , H_2 , N_2) sont également des milieux parfaitement transparents.

Par contre, certains gaz composés (en particulier CO_2 , H_2O , CO), sont en revanche dits partiellement transparents, car la propagation s'y accompagne d'une diminution de l'énergie transportée, ce qui accroît d'autant l'énergie interne du gaz traversé. Certains liquides et solides (plastiques, verres) entrent également dans cette catégorie.

La grande majorité des liquides et solides sont au contraire dits opaques, car ils arrêtent la propagation de tout rayonnement dès leur surface.

Un rayonnement incident Φ_i qui arrive sur un corps opaque, est en partie réfléchi (Φ_r), tandis que le reste est absorbé (Φ_a) sous forme de chaleur au voisinage de l'impact.

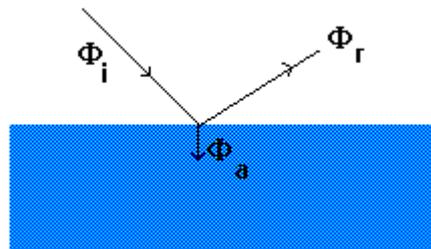


Figure 4.2 - Interaction d'un rayonnement thermique et d'un corps opaque

Comme en optique, la réflexion peut être diffuse (Φ_r dans toutes les directions), spéculaire (Φ_r dans la direction symétrique de Φ_i), ou quelconque.

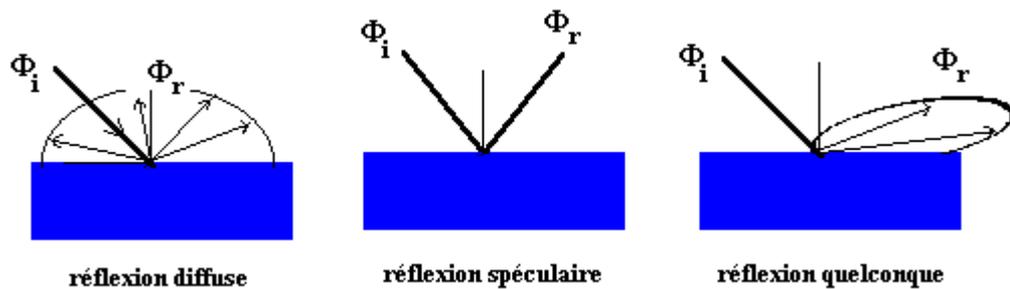


Figure 4.3 - Divers types de réflexions

Lorsque l'on étudiera l'équilibre thermique d'un système, tout corps composant ce système devra être considéré d'un double point de vue:

- comme *émetteur*, car il sera toujours la source d'un rayonnement dépendant de sa température (sauf si ce corps est parfaitement transparent).
- comme *récepteur*, car il recevra des rayonnements émis, réfléchis ou diffusés par les corps qui l'entourent. Une partie du flux reçu sera absorbée, et le reste sera réfléchi ou diffusé.

4.3 Rayonnement des corps opaques

Il est nécessaire d'introduire la définition d'un certain nombre de grandeurs intervenant dans l'étude des corps opaques considérés en tant qu'émetteurs de rayonnement.

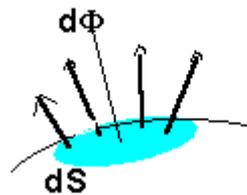
4.3.1 Flux d'une source

On désigne ainsi la puissance thermique émise par une source dans tout l'espace où elle peut rayonner. Ce flux sera noté Φ et exprimé en Watt.

4.3.2 Emittance

C'est le flux total émis par unité de surface de la source. On considère globalement la puissance $d\Phi$ émise par un élément de surface dS dans l'ensemble des directions où il peut rayonner (c'est-à-dire dans un hémisphère de 2π stéradian limité par le plan tangent à dS en son centre), et on divise ce flux par l'aire de dS .

L'émittance est notée M . Son unité est le Watt/m²

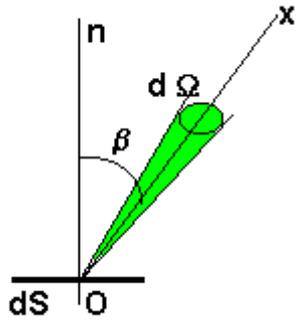


$$\text{Emittance } M = \frac{d\Phi}{dS}$$

Figure 4.4 - Emittance d'une source, en Watt/m²

4.3.3 Intensité d'une source dans une direction Ox

Considérons de nouveau un élément de surface dS d'une source S , et une direction quelconque Ox par rapport à cet élément dS , l'axe Ox étant repéré par l'angle β qu'il fait avec la normale On à dS .



Considérons également un angle solide élémentaire $d\Omega$ entourant la direction Ox .

Si le flux de la source dans tout l'espace hémisphérique où elle rayonne est Φ , on notera $d\Phi_{Ox}$ la portion de ce flux rayonnée dans l'angle solide $d\Omega$.

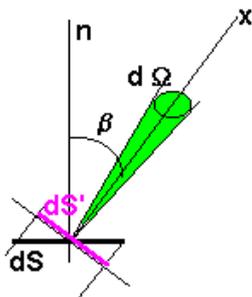
Par définition, on appellera **intensité de la source dans la direction Ox** la quantité:

$$I_{Ox} = \frac{d\Phi_{Ox}}{d\Omega} \tag{4.1}$$

Cette intensité I_{Ox} s'exprime en Watt/stéradian (W/sr).

4.3.4 Luminance d'une source dans une direction Ox

On définit la luminance L_{Ox} d'une source d'aire dS , dans la direction Ox , comme le quotient de l'intensité I_{Ox} de la source dans cette direction, par l'aire apparente dS' de la source dans la même direction:



$$L_{Ox} = \frac{I_{Ox}}{dS'} = \frac{I_{Ox}}{dS \cos \beta}$$

En effet, vu de la direction Ox , tout se passe comme si le flux était émis par la surface projetée $dS' = dS \cos \beta$.

En introduisant la définition (4.1) de l'intensité I_{Ox} la luminance s'exprime par la relation:

$$L_{Ox} = \frac{\frac{d\Phi_{Ox}}{d\Omega}}{dS \cos \beta} = \frac{d^2\Phi_{Ox}}{d\Omega dS \cos \beta} \tag{4.2}$$

La luminance apparaît donc comme la puissance rayonnée par unité d'angle solide entourant la direction Ox , et par unité de surface projetée perpendiculairement à cette direction.

Elle s'exprime en Watt par m^2 et par stéradian ($W/(m^2.sr)$)

Cette notion de luminance permet de comparer la puissance rayonnée dans une direction donnée par des sources d'étendues différentes ou d'orientations différentes par rapport à cette direction.

Le flux élémentaire émis par un élément de surface dS dans un angle solide $d\Omega$ entourant une direction Ox , inclinée d'un angle β sur la normale à cette surface, a donc pour expression:

$$d^2\Phi_{Ox} = L_{Ox} dS \cos\beta d\Omega \quad (4.3)$$

4.3.5 Loi de Lambert

Les sources dont la luminance est indépendante de la direction sont dites des sources diffuses, régies par la Loi de Lambert:

$$L_{Ox} = L \quad (4.4)$$

Cela veut dire que l'on voit ces surfaces diffuses avec la même intensité lumineuse quelle que soit la direction d'observation. Ce sera le cas de pratiquement toutes les surfaces émissives qui nous concernent, et pour lesquelles la luminance L ne dépendra que de la température T de la surface.

Nous pouvons alors recalculer le flux total $d\Phi$ en intégrant le flux élémentaire $d^2\Phi_{Ox}$ donné par la relation (4.3) modifiée par (4.4):

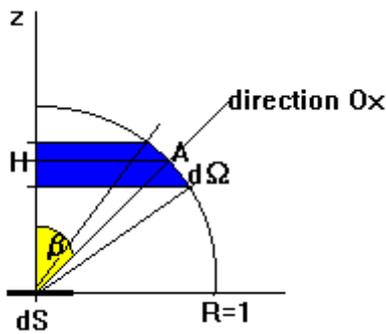
$$d^2\Phi_{Ox} = L dS \cos\beta d\Omega$$

Intégrons cette expression dans le demi-espace de 2π stéradian au-dessus de dS .

$$d\Phi = L dS \iiint_{2\pi \text{ sr}} \cos\beta d\Omega$$

L'émittance M , telle qu'on l'a définie au § 4.3.2, d'une source diffuse est donc donnée par:

$$M = \frac{d\Phi}{dS} = L \iiint_{2\pi \text{ sr}} \cos\beta d\Omega \quad (4.5)$$



Pour calculer l'intégrale triple ci-dessus, on commence par garder l'angle β constant:

$$M = L \int_0^{\pi/2} \cos \beta \iint_{2\pi \text{ sr}} d\Omega$$

L'intégration de l'élément d'angle solide $d\Omega$ autour de Oz conduit à la surface de la couronne sphérique

engendrée par la rotation autour de Oz du segment AH . Cette aire a pour valeur: $2\pi AH R d\beta$, c'est-à-dire, compte-tenu que $R=1$, $2\pi \sin \beta d\beta$

Il vient donc:

$$\begin{aligned} M &= 2 \pi L \int_0^{\pi/2} \cos \beta \sin \beta d\beta \\ &= \pi L \int_0^{\pi/2} \sin 2\beta d\beta \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$M = \pi L \tag{4.6}$$

relation entre l'émittance M et la luminance L d'une surface émissive diffuse, dite encore Lambertienne, c'est-à-dire respectant la Loi de Lambert.

4.4 Corps opaques récepteurs de rayonnement

De même que l'on a introduit la définition d'un certain nombre de grandeurs intervenant dans l'étude des corps opaques considérés en tant qu'émetteurs de rayonnement, on va maintenant définir d'autres grandeurs intervenant dans l'analyse de l'éclairement d'un corps opaque par un rayonnement incident.

4.4.1 Éclairement

On désigne ainsi le flux total reçu par l'unité de surface réceptrice:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} \tag{4.7}$$

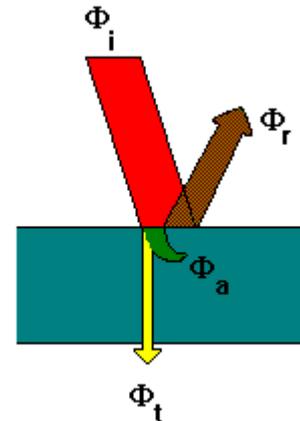
L'éclairement E s'exprime en W/m^2

C'est donc la densité de flux de chaleur arrivant sur l'unité de surface réceptrice dS , en provenance du demi-espace visible depuis cette surface.

4.4.2 Réflexion, absorption et transmission

Une fraction ρ de cette **puissance totale incidente** Φ_i sera *réfléchi*e par le corps, c'est-à-dire renvoyée sans avoir pénétré dans le matériau.

Une autre fraction α sera *absorbée* dans la masse du récepteur, constituant un apport énergétique pour ce dernier.



Enfin, une troisième et dernière fraction τ peut éventuellement traverser entièrement le corps récepteur et ressortir de l'autre côté. On dit alors qu'elle est *transmise*.

Si Φ_i désigne le flux total incident,

Φ_r le flux total réfléchi,

Φ_a le flux total absorbé,

Φ_t le flux total transmis,

la conservation de l'énergie s'exprime par la relation:

$$\Phi_i = \Phi_r + \Phi_a + \Phi_t \quad (4.8)$$

On désignera sous les noms de:

Coefficient de réflexion, le rapport $\rho = \frac{\Phi_r}{\Phi_i}$

Coefficient d'absorption, le rapport $\alpha = \frac{\Phi_a}{\Phi_i}$

Coefficient de transmission, le rapport $\tau = \frac{\Phi_t}{\Phi_i}$

La relation (4.8) se traduit alors par:

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad (4.9)$$

Ces paramètres caractérisent d'une manière globale le comportement d'un corps vis-à-vis du rayonnement thermique qu'il reçoit. Ce sont des grandeurs totales hémisphériques, ce qui signifie qu'elles ne rentrent pas dans le détail des longueurs d'onde du rayonnement, ni des directions de propagation.

4.4.3 Grandeurs monochromatiques directionnelles

Cependant, dans bien des cas, les propriétés radiatives des corps varient avec la longueur d'onde et la direction du rayonnement. Pour en rendre compte, on peut introduire des grandeurs analogues à toutes celles que nous avons vu jusqu'ici, mais monochromatiques ou directionnelles, et éventuellement les deux à la fois.

Dans le tableau 4.1, nous mettrons en vis-à-vis, dans la colonne de gauche la grandeur globale concernant l'ensemble du spectre rayonné, et dans la colonne de droite, la grandeur monochromatique correspondante, mais ne concernant qu'une longueur d'onde unique λ .

Si les flux incident, réfléchi, absorbé et transmis considérés plus haut, au lieu d'être des grandeurs globales pour l'ensemble des longueurs d'ondes rayonnées et des directions du rayonnement, sont maintenant des grandeurs monochromatiques directionnelles:

$$\begin{aligned} (\Phi_{Ox, \lambda})_i & \text{ pour le flux incident} \\ (\Phi_{Ox, \lambda})_r & \text{ pour le flux réfléchi} \\ (\Phi_{Ox, \lambda})_a & \text{ pour le flux absorbé} \\ (\Phi_{Ox, \lambda})_t & \text{ pour le flux transmis} \end{aligned}$$

on définira de la même manière que précédemment des coefficients monochromatiques directionnels qui respecterons une condition analogue à la condition (4.9) :

$$\rho_{Ox, \lambda} + \alpha_{Ox, \lambda} + \tau_{Ox, \lambda} = 1 \quad (4.10)$$

4.4.4 Notion de corps noir

On appelle corps noir, un corps pour lequel:

$$\begin{aligned} \rho_{Ox, \lambda} &= 0 \\ \tau_{Ox, \lambda} &= 0 \end{aligned}$$

$$\alpha_{Ox,\lambda} = 1$$

Un corps noir est donc un corps qui absorbera **tout** rayonnement incident le frappant, sans en réfléchir ni laisser échapper aucune fraction, et ceci quelques soient les longueurs d'onde et les directions de propagation. De la même manière, un corps noir sera capable de rayonner dans chaque longueur d'onde le **maximum** d'énergie calorifique stockable théoriquement dans cette bande de fréquence à un niveau de température T déterminé.

Tableau 4.1 - Récapitulation des principales définitions

Grandeurs hémisphériques, caractérisant un rayonnement émis dans l'ensemble des directions de l'espace environnant la source considérée		
Grandeur	Grandeur totale, concernant l'ensemble du spectre rayonné	Grandeur monochromatique concernant une longueur d'onde unique λ
Flux d'une source (cf. § 4.3.1)	Flux total Φ en W	Flux monochromatique $\Phi_\lambda = \left(\frac{d\Phi}{d\lambda} \right)_\lambda$ en W/m
Emittance d'une source (cf. § 4.3.2)	Emittance totale $M = \frac{d\Phi}{dS}$ en W/m ²	Emittance monochromatique $M_\lambda = \left(\frac{dM}{d\lambda} \right)_\lambda = \left(\frac{d^2\Phi}{dS d\lambda} \right)_\lambda$ en W/m ³
Grandeurs directionnelles, caractérisant un rayonnement émis dans une direction particulière Ox		
Intensité d'une source (cf. § 4.3.3)	Intensité totale dans la direction Ox $I_{Ox} = \frac{d\Phi_{Ox}}{d\Omega}$ en W/sr	Intensité monochromatique dans la direction Ox $I_{Ox,\lambda} = \left(\frac{dI_{Ox}}{d\lambda} \right)_\lambda = \left(\frac{d^2\Phi_{Ox}}{d\Omega d\lambda} \right)_\lambda$ en W/(m.sr)
Luminance d'une source (cf. § 4.3.4)	Luminance totale dans la direction Ox $L_{Ox} = \frac{I_{Ox}}{dS \cos \beta} = \frac{d^2\Phi_{Ox}}{d\Omega dS \cos \beta}$ en W/(m ² .sr)	Luminance monochromatique dans la direction Ox $L_{Ox,\lambda} = \left(\frac{dL_{Ox}}{d\lambda} \right)_\lambda = \frac{d^2\Phi_{Ox,\lambda}}{d\Omega dS \cos \beta}$ en W/(m ³ .sr)

Un tel corps, thermiquement idéal, n'existe pas dans la nature, pas plus que n'existe le fluide parfait totalement exempt de dissipation interne d'énergie lors de son mouvement.

Mais le concept va servir d'étalon de rayonnement. A partir de considérations thermodynamiques, il est possible de prévoir théoriquement le maximum d'énergie calorifique pouvant être rayonnée par la matière à chaque température de cette matière, et dans chaque longueur d'onde.

Pour chaque corps réel auquel s'intéresse l'ingénieur thermicien, on évaluera l'énergie qu'il peut rayonner, *relativement à celle qu'émettrait un corps noir dans les mêmes conditions*, à l'aide de coefficients appelés **émissivités**.

Dans tout ce qui suit, les grandeurs relatives au corps noir seront affectées d'un indice supérieur « ° ». Ainsi, par exemple, l'émittance monochromatique du corps noir à la longueur d'onde λ sera notée M_{λ}^0

4.5 Loi de PLANCK

Cette loi relie l'émittance monochromatique du corps noir à la longueur d'onde λ , M_{λ}^0 , à la longueur d'onde λ et à sa température absolue T.

Elle s'exprime sous la forme:

$$M_{\lambda}^0 = \frac{2 \pi h C^2 \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} \quad (4.11)$$

relation dans laquelle:

- C est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le milieu où se propage le rayonnement. C est donnée par la relation: $C = C_0 / n$
avec: n l'indice de réfraction du milieu, et $C_0 = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s
- h est la constante de PLANCK, $h = 6,6255 \cdot 10^{-34}$ J.s
- k est la constante de BOLTZMANN, $k = 1,3805 \cdot 10^{-23}$ J/K

Lorsque le rayonnement se propage dans un milieu dont l'indice de réfraction est égal à l'unité, ce qui est le cas en toute rigueur pour le vide, et pour l'air en première approximation, la loi de PLANCK peut se mettre sous la forme simplifiée suivante, qui est celle qui sera utilisée dans la pratique courante:

$$M_{\lambda}^0 = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \quad (4.12)$$

C_1 et C_2 sont deux constantes physiques dont les valeurs sont données, en unités S.I, dans le tableau suivant:

T	λ	$C_1 = 2 \pi h C_0^2$	$C_2 = \frac{h C_0}{k}$	M_λ^0
K	m	$3,741 \cdot 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{m}^2$	0,014388 m.K	W/m^3
K	μm	$3,741 \cdot 10^8 \text{ W} \cdot \mu\text{m}^4/\text{m}^2$	14.388 $\mu\text{m} \cdot \text{K}$	$\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m})$

La figure 4.5 ci-dessous représente les courbes de variation de l'émittance monochromatique d'un corps noir, calculées à l'aide de la relation (4.12), pour les valeurs

suivantes de la température absolue de ce corps noir:

300 K (ambiante), 500 K, 750 K, 1000 K, 2500 K, 5800 K (soleil)

Chaque courbe présente pour une certaine abscisse λ_m un maximum d'autant plus prononcé que la température T est plus élevée.

On constate que pour $\lambda < 0,5 \lambda_m$, il n'y a pratiquement plus d'énergie rayonnée (moins de 1%), alors qu'il faut atteindre $\lambda > 4,5 \lambda_m$ pour obtenir le même résultat dans l'infrarouge.

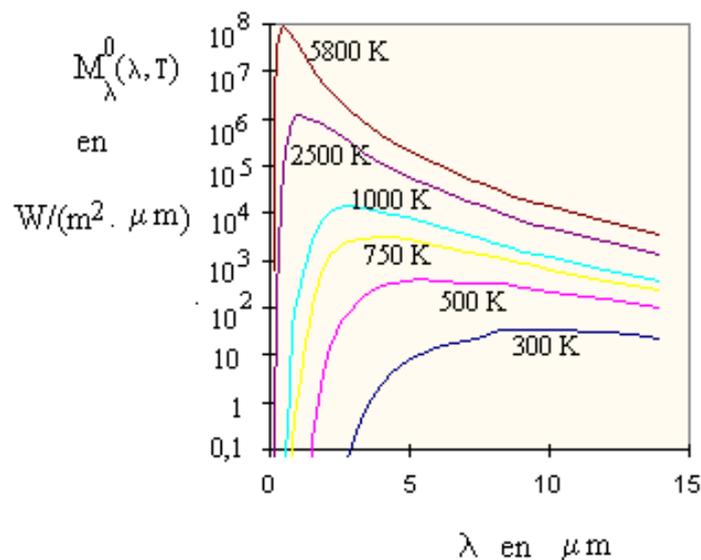


Figure 4.5 - Emittance monochromatique du corps noir

4.6 Lois de WIEN

Deux lois fournissent respectivement l'abscisse λ_m et l'ordonnée du maximum d'émittance monochromatique du corps noir à chaque température.

4.6.1 1ère loi de WIEN, ou loi du déplacement

L'abscisse λ_m du maximum de M_{λ}^0 , se déplace vers les courtes longueurs d'onde lorsque la température croît.

C'est ce qu'exprime la « loi du déplacement » de WIEN:

$$\lambda_m T = 2898 \mu\text{m.K} \quad (4.13)$$

4.6.2 2ème loi de WIEN

Cette loi fournit la valeur du maximum $M_{\lambda_m}^0$ en fonction de T. Elle s'exprime sous la forme suivante:

$$M_{\lambda_m}^0 = B T^5 \quad (4.14)$$

La constante B est donnée dans le tableau suivant:

T	λ	B	$M_{\lambda_m}^0$
K	m	$1,287 \cdot 10^{-5} \text{ W}/(\text{m}^3 \cdot \text{K}^5)$	W/m^3
K	μm	$1,287 \cdot 10^{-11} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m} \cdot \text{K}^5)$	$\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m})$

A la température ambiante (300 K), le maximum de rayonnement thermique se produit dans le proche infrarouge, à 10 μm .

Le rayonnement solaire, qui correspond à une température de 5800 K, a son maximum dans le spectre visible, à 0,5 μm .

Lorsqu'un corps s'échauffe, il n'émet d'abord que des radiations non visibles dans l'infrarouge, puis il commence à rougir lorsque son spectre d'émission vient empiéter sur le domaine du visible. Finalement, pour une température suffisamment élevée, le spectre d'émission du corps recouvre tout le domaine du visible, ce qui correspond à une émission de lumière blanche, d'où l'expression « chauffé à blanc ».

Une dernière remarque peut être déduite de ce qui précède:

Il n'y a pratiquement pas de recouvrement entre la partie utile du spectre du rayonnement solaire (approximativement de 0,2 à 2,5 μm), et celle du spectre d'un corps de température peu supérieure à

l'ambiante (en gros, de 3 à 50 μm). Cette propriété sera exploitée dans de nombreuses applications telles que les serres ou les capteurs solaires à basse température utilisés dans l'habitat.

4.7 Loi de STEFAN-BOLTZMANN

Cette loi fournit l'émittance totale du rayonnement du corps noir dans le vide, en fonction de sa température absolue. On peut l'établir en intégrant sur l'ensemble du spectre, la relation (4.11) exprimant la loi de PLANCK.

La loi de STEFAN-BOLTZMANN s'exprime par la relation:

$$M^0 = \sigma T^4 \quad (4.15)$$

σ est la constante de STEFAN-BOLTZMANN, dont l'expression et la valeur numérique sont données dans le tableau suivant:

$\sigma = \frac{2 \pi^5}{15} \frac{k^4}{C_0^2 h^3}$	T	M^0
$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$	K	W/m^2

4.8 Rayonnement des corps réels

Les lois physiques que nous venons d'étudier fournissent les émittances totales M^0 ou monochromatique M_λ^0 du corps noir. Ce sont des grandeurs hémisphériques, car un corps noir ne privilégie aucune direction de propagation.

Ces lois décrivent donc un rayonnement diffus, obéissant à la loi de Lambert. On passe donc des émittances du corps noir à ses luminances (grandeurs directionnelles) par les relations:

$$L^0 = \frac{M^0}{\pi} \quad \text{et} \quad L_\lambda^0 = \frac{M_\lambda^0}{\pi} \quad (4.16)$$

directement déduites de la relation (4.6) établie au § 4.3.5

L'évaluation des propriétés émissives des substances réelles se fait *par rapport à celles d'un corps noir placé dans les mêmes conditions de température et de longueur d'onde*, à l'aide de coefficients appelés émissivités, totales ou monochromatiques, hémisphériques ou directionnelles.

Ainsi, les émittances totale et monochromatique d'une surface réelle déterminée, seront fournies par des relations du type:

$$M = \varepsilon M^0 \quad \text{et} \quad M_\lambda = \varepsilon_\lambda M_\lambda^0 \quad (4.17)$$

relations dans lesquelles ε est l'émissivité hémisphérique du corps, et ε_λ son émissivité monochromatique à la longueur d'onde λ .

Quant aux luminances L et L_λ du corps, elles seront liées à celles du corps noir par les relations:

$$L_{Ox} = \varepsilon_{Ox} L^0 = \varepsilon_{Ox} M^0 / \pi \quad \text{et} \quad L_{Ox, \lambda} = \varepsilon_{Ox, \lambda} M_\lambda^0 / \pi \quad (4.18)$$

dans lesquelles ε_{Ox} est l'émissivité directionnelle totale du corps, et $\varepsilon_{Ox, \lambda}$ son émissivité directionnelle monochromatique.

L'émissivité des substances naturelles dépend, d'une manière générale, de leur nature physico-chimique, de leur état de surface géométrique (défauts de planéité, rugosité), et varie avec la longueur d'onde, la direction d'émission et la température de surface.

Dans la pratique, le thermicien confronté à un problème d'échanges radiatifs n'a guère que deux possibilités:

- Faire procéder, sur échantillons, à des mesures d'émissivités, par un laboratoire spécialisé. C'est une solution longue, coûteuse et délicate.
- Rechercher des valeurs pour les paramètres définis ci-dessus dans les tables compilées dans des ouvrages spécialisés sur le rayonnement. Ces tables donnent généralement l'émissivité totale dans la direction normale à la surface, et l'émissivité totale hémisphérique, mais rarement l'émissivité monochromatique, et presque jamais l'émissivité directionnelle.

4.9 Notion de corps gris

Au niveau limité de ce cours d'initiation à la thermique, nous nous contenterons d'une hypothèse simplificatrice selon laquelle *toutes les surfaces en présence auront une émissivité indépendante de la direction d'émission et de la longueur d'onde*, tout comme un corps noir, mais à des niveaux d'énergie moindres.

De tels corps pourront alors être qualifiés de *gris*, et seront caractérisés du point de vue de leurs propriétés radiatives par les relations suivantes:

$$\varepsilon_{Ox} = \varepsilon_{Ox,\lambda} = \varepsilon = \text{Constante}$$

L'émittance totale d'un corps gris sera alors déduite celle du corps noir donnée par la loi de STEFAN-BOLTZMANN:

$$M^0 = \varepsilon \sigma T^4 \quad \text{en W / m}^2 \quad (4.19)$$

Le tableau suivant donne quelques valeurs d'émissivités ε

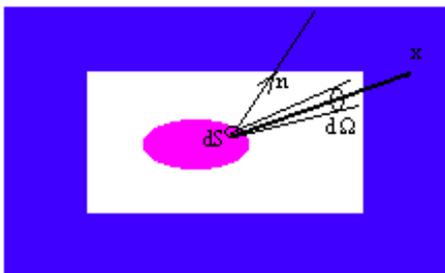
Tableau 4.2 - Emissivités ε de quelques substances

<i>Nature de la substance</i>	<i>émissivité ε</i>
<i>réfractaire</i>	0,8
<i>peinture réfléchissante</i>	0,3
<i>fer poli</i>	0,15 (à 20°C) à 0,35 (à 900°C)
<i>aluminium poli</i>	0,05
<i>aluminium oxydé</i>	0,15

4.10 Loi de KIRCHHOFF

Cette loi établit un rapport entre les propriétés émissives et absorbantes d'un corps.

Pour la démontrer, on considère un corps placé dans une enceinte fermée dont les parois possèdent les propriétés d'un corps noir. Tout le système est en équilibre thermique à une température uniforme T, et le corps considéré n'enregistre donc ni gain ni perte thermique.



Dans ces conditions, un élément de surface dS du corps émet dans un angle solide élémentaire $d\Omega$ entourant une direction Ox inclinée d'un angle β sur la normale On à dS , un flux monochromatique qui s'exprime par une relation tout-à-fait analogue à la relation (4.3) qui avait été introduite au § 4.3.4 pour définir la luminance d'une source dans une

direction Ox . La seule différence est qu'on considère maintenant une émission monochromatique (à une seule longueur d'onde λ), et qu'au lieu d'une luminance totale, on doit donc exprimer une luminance monochromatique dans la direction Ox , que l'on rapportera à la luminance

monochromatique du corps noir, par l'intermédiaire d'une émissivité $\varepsilon_{Ox, \lambda}$ telle qu'introduite dans la relation (4.18). On aura donc:

$$\left[d^2\Phi_{Ox, \lambda} \right]_{\text{émis}} = \varepsilon_{Ox, \lambda} L_{\lambda}^0 dS \cos\theta d\Omega \quad \text{en W / (m}^3 \cdot \text{sr)} \quad (4.20)$$

Simultanément, la surface dS reçoit dans le même angle solide $d\Omega$, et à la même longueur d'onde λ , un flux émis par l'enceinte noire qui a pour valeur $L_{\lambda}^0 dS \cos\theta d\Omega$.

Le corps considéré en absorbera donc une partie:

$$\left[d^2\Phi_{Ox, \lambda} \right]_{\text{absorbé}} = \alpha_{Ox, \lambda} L_{\lambda}^0 dS \cos\theta d\Omega \quad \text{en W / (m}^3 \cdot \text{sr)} \quad (4.21)$$

L'équilibre thermique du corps implique l'égalité des flux émis et absorbé, d'où la relation (4.22) suivante qui exprime la Loi de KIRCHHOFF:

$$\varepsilon_{Ox, \lambda} = \alpha_{Ox, \lambda} \quad (4.22)$$

Dans le cas où les rayonnements émis et reçus par le corps sont parfaitement répartis sur l'ensemble des directions de l'espace hémisphérique (cas d'une émission et d'un éclaircissement diffus), la loi de KIRCHHOFF précédente est également applicable aux propriétés monochromatiques hémisphériques:

$$\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda} \quad (4.23)$$

Il n'est généralement pas possible d'étendre la loi de KIRCHHOFF au rayonnement total émis et absorbé par un corps quelconque, et donc de considérer que $\alpha = \varepsilon$.

En effet, l'émissivité totale $\varepsilon(T)$ d'un corps est définie par la relation:

$$\varepsilon(T) = \frac{M(T)}{M^0(T)} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} M_{\lambda}^0(T) d\lambda}{\sigma T^4} \quad (4.24)$$

Cette fonction $\varepsilon(T)$ est une propriété caractéristique du seul corps émetteur, dépendant de son émissivité monochromatique ε_{λ} , et variant avec sa température T .

Par contre, le coefficient d'absorption total de ce même corps est la fraction α absorbée par le corps, sur l'ensemble des longueurs d'ondes incidentes. Si E_{λ} est l'éclaircissement monochromatique tombant sur le corps, on a:

$$\alpha = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda} E_{\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda} = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda} E_{\lambda} d\lambda}{E} \quad (4.25)$$

Le coefficient d'absorption α dépend donc lui aussi du corps considéré, par l'intermédiaire des α_{λ} , mais aussi de la composition spectrale E_{λ} du rayonnement reçu, et donc en définitive de la nature et de la température du corps qui a émis le rayonnement absorbé.

C'est pourquoi le coefficient d'absorption total α ne saurait être une caractéristique intrinsèque d'un corps, comme l'est son émissivité totale $\varepsilon(T)$.

D'une manière générale, on aura donc: $\alpha \neq \varepsilon$

Il y a deux exceptions importantes à cette situation:

- Le corps noir, défini par les propriétés:

$$\varepsilon_{\lambda} = 1 \text{ et } \alpha_{\lambda} = 1 \text{ quelque soit } \lambda$$

Il en résulte immédiatement que:

$$\varepsilon = \alpha$$

- Les corps gris, définis par la propriété:

$$\varepsilon_{\lambda} = \varepsilon \text{ quelque soit } \lambda$$

La relation (4.23): $\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda}$ entraîne donc: $\alpha_{\lambda} = \varepsilon$ quelque soit λ ,

c'est-à-dire encore:

$$\varepsilon = \alpha$$

4.11 Exemples de récapitulation

4.11.1 Energie solaire reçue sur la terre

En supposant que le soleil rayonne comme un corps noir à la température de 5800 K, on se propose de calculer l'éclairement solaire E reçu par m^2 de surface de la terre.

On supposera que le soleil est au zénith de l'endroit considéré de la terre.

On donne les grandeurs géométriques suivantes:

- rayon du soleil: $R = 696.000 \text{ km}$
- distance terre-soleil: $D = 149.637.000 \text{ km}$

On supposera que le coefficient de transmission τ de l'atmosphère est égal à 0,75.

Considérons un élément de surface dS quelconque à la surface du soleil, et évaluons sa contribution à l'éclairement de l'élément de surface dS' considéré sur la terre.

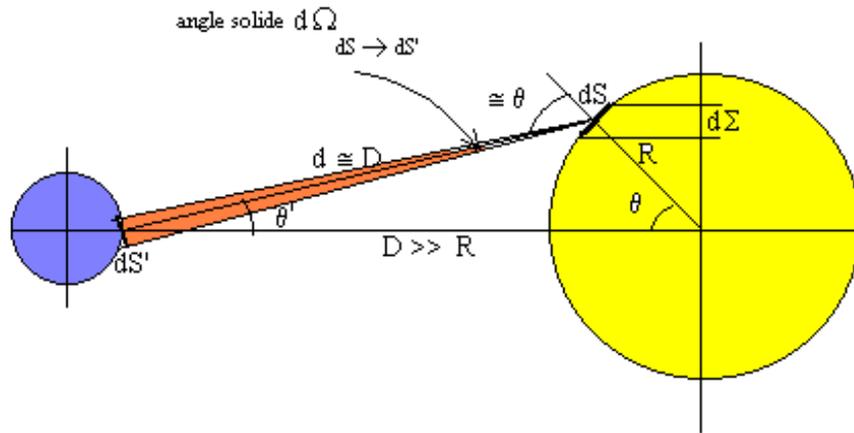


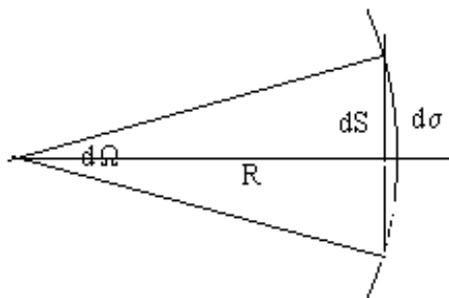
Figure 4.7 - Angle solide sous lequel on voit l'élément dS' de la terre, depuis dS sur le soleil
Le flux élémentaire émis par l'élément dS de la surface du soleil dans un angle solide $d\Omega$ entourant la direction de dS vers un élément dS' de la surface de la terre, a été exprimé au § 4.3.4 par la relation (4.3). Il est donné par:

$$d^2\Phi_{dS \rightarrow dS'} = L_T^0 dS \cos\theta d\Omega_{dS \rightarrow dS'} \tag{4.26}$$

relation dans laquelle la luminance L_T^0 du soleil peut être exprimée en fonction de son émittance par la relation (4.6):

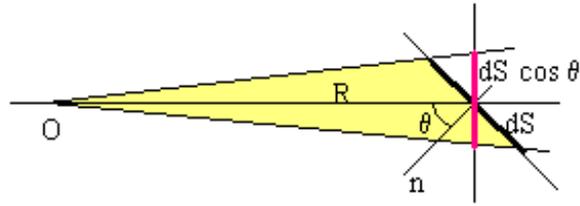
$$L_T^0 = \frac{M_T^0}{\pi} \tag{4.6}$$

Evaluons maintenant l'angle solide $d\Omega_{dS \rightarrow dS'}$, sous lequel on voit dS' depuis dS .



En raison même de la définition de l'angle solide $d\Omega$, la surface conique qui découpe l'aire $d\Omega$ sur la sphère de rayon unité, intercepte sur une sphère de rayon R une surface $d\sigma = R^2 d\Omega$. La surface plane dS qui sous-tend la surface sphérique $d\sigma$ peut être assimilée à $d\sigma$ lorsque R est grand devant les dimensions de $d\sigma$. Il s'en suit que l'on a: $dS = R^2 d\Omega$.

Considérons maintenant un point O situé à une distance moyenne R d'une petite surface dS, la normale à dS étant orientée de manière quelconque par rapport à la direction de O.



Il résulte de ce qui précède que l'angle solide dΩ sous lequel on voit d'un point O le contour d'une petite surface dS (assimilée à une surface plane), et orientée d'une manière quelconque, est donné par la relation:

$$d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{R^2} \tag{4.27}$$

L'angle solide dΩ_{dS→dS'} sous lequel on voit dS' depuis dS a donc comme expression:

$$d\Omega_{dS \rightarrow dS'} = \frac{dS' \cos\theta'}{d^2} \tag{4.28}$$

Si on tient maintenant compte des expressions (4.6) et (4.28), la relation (4.26) s'écrit alors:

$$d^2\Phi_{dS \rightarrow dS'} = \frac{M_T^0}{\pi} \frac{dS \cos\theta dS' \cos\theta'}{d^2} \tag{4.29}$$

Il faut maintenant intégrer à toute la surface du soleil:

$$d\Phi_{S \rightarrow dS'} = \int_S d^2\Phi_{dS \rightarrow dS'} = \frac{M_T^0}{\pi} \int_S \frac{dS' \cos\theta'}{d^2} \cos\theta dS$$

La distance D étant de l'ordre de 150 fois le rayon R, il en résulte que d et D sont sensiblement égaux, tandis que l'angle θ' est négligeable, quelque soit la position de l'élément dS sur le soleil.

La relation précédente se simplifie donc pour s'écrire:

$$d\Phi_{S \rightarrow dS'} = \frac{M_T^0}{\pi} \frac{dS'}{D^2} \int_S \cos\theta dS$$

Mais cos θ dS est la projection de l'élément dS sur le plan diamétral du soleil. D'où:

$$\int_S \cos\theta \, dS = \int_{\Sigma} d\Sigma = \Sigma = \pi R^2$$

et:

$$d\Phi_{S \rightarrow dS'} = M_T^0 \left(\frac{R}{D} \right)^2 dS' \quad (4.30)$$

(R/D est le demi-diamètre angulaire du soleil)

En définitive, l'éclairement solaire de la terre est donné par la relation:

$$E = \frac{d\Phi_{S \rightarrow dS'}}{dS'} = M_T^0 \left(\frac{R}{D} \right)^2 \quad (4.31)$$

M_T^0 est donnée par la loi de STEFAN-BOLTZMANN (4.15), d'où finalement:

$$E = \sigma T^4 \left(\frac{R}{D} \right)^2 \quad (4.32)$$

Avec les valeurs numériques adoptées:

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$$

$$T = 5.800 \text{ K}$$

$$R = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$D = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

on obtient: $E = 1402 \text{ W/m}^2$

Si on tient compte de surcroît que l'atmosphère ne transmet qu'une fraction du rayonnement solaire qui l'atteint, on ne recevra plus au sol que:

$$\tau E = 0,75 E = 1052 \text{ W/m}^2$$

Cet exemple est fort simplifié. Les valeurs de l'éclairement solaire que l'on mesure réellement sont un peu inférieures au résultat ci-dessus, car elles dépendent également d'autres paramètres dont on n'a pas tenu compte ici.

4.11.2 Capteur solaire plan. Effet de serre.

Un capteur solaire plan destiné au chauffage des habitations ou à la production d'eau chaude sanitaire, est essentiellement constitué:

- d'un panneau « noir » appelé *absorbeur*, pourvu d'un réseau de tubulures dans lesquelles circule un fluide caloporteur ayant pour fonction d'évacuer la chaleur captée vers la partie utilisation de l'installation.
- d'une face avant constituée d'une *plaque de verre*, destinée à réduire les pertes par rayonnement, du fait d'un mécanisme appelé effet de serre, que nous allons analyser.

- d'un boîtier contenant le tout, calorifugé de manière à réduire les pertes vers l'arrière et les côtés.

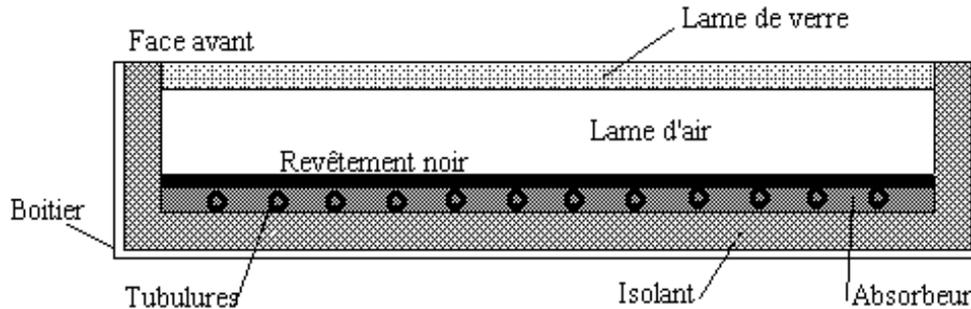


Figure 4.8 - Coupe schématique d'un capteur solaire plan

On se propose d'évaluer les températures d'équilibre qu'atteindront l'absorbeur et le vitrage, lorsque la circulation du fluide caloporteur est interrompue.

On admettra les hypothèses simplificatrices suivantes:

- On néglige tous les échanges par conduction, pour ne considérer que les seuls échanges radiatifs.
- On suppose qu'il n'y a aucune perte thermique par le fond du boîtier.

Les données physiques nécessaires à la résolution du problème sont les suivantes:

- L'éclairement solaire E du vitrage est de 1.000 W/m^2 .
- On connaît les propriétés radiatives moyennes du vitrage dans deux bandes spectrales différentes: celle du rayonnement solaire (λ entre $0,2$ et $2,5 \mu\text{m}$) et celle des rayonnements thermiques dits de basse température ($\lambda > 2,5 \mu\text{m}$). Ces données sont représentées sur la figure 4.9 suivante:

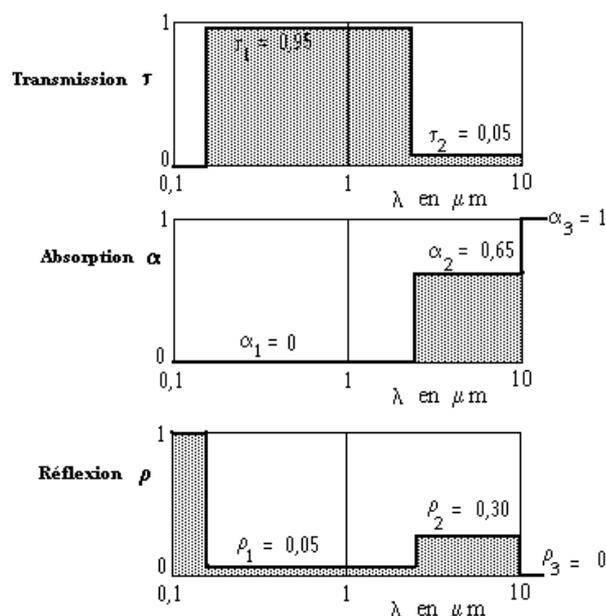


Figure 4.9 - Caractéristiques radiatives moyennes du verre utilisé

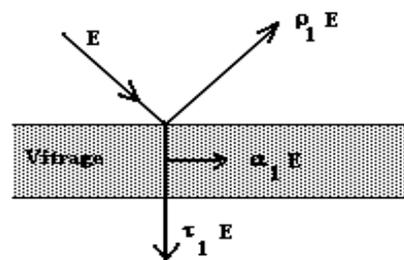
L'effet de serre repose sur les propriétés de la courbe de transmission du verre. Ce matériau est pratiquement transparent pour le rayonnement solaire ($\tau_1 = 0,95$), mais transmet peu de rayonnement au delà de $2,5 \mu\text{m}$ ($\tau_2 = 0,05$). En outre, il absorbe pratiquement tout le rayonnement de température ambiante, dont le maximum se situe autour de $10 \mu\text{m}$ de longueur d'onde ($\alpha_3 = 1$). Nous désignerons par T_a et T_v les températures respectives de l'absorbeur et du vitrage, à l'équilibre thermique, lorsque la circulation de fluide caloporteur est stoppée.

En établissant des bilans thermiques en régime permanent, sur l'absorbeur d'une part, et sur le vitrage d'autre part, nous allons obtenir un système d'équations dont la résolution fournira les valeurs de T_a et T_v . Ces bilans porteront sur l'unité de surface ($S = 1 \text{ m}^2$).

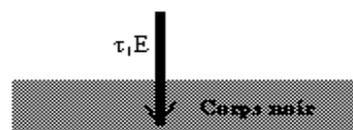
Avant d'établir ces bilans, commençons par décrire les différents phénomènes radiatifs qui interviennent:

1) L'éclairement solaire incident E frappe le vitrage.

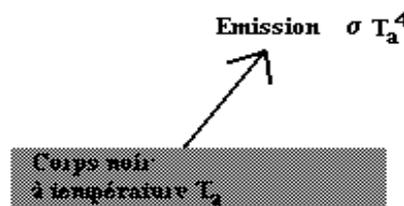
Une fraction $\rho_1 E$ est réfléchiée, une fraction $\alpha_1 E$ est absorbée par le verre, tandis que la fraction restante du flux incident, $\tau_1 E$, traverse le vitrage.



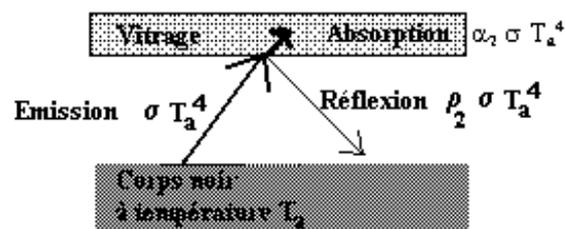
2) Tout le rayonnement $\tau_1 E$ transmis par le vitrage est absorbé par la surface noire de l'absorbeur.



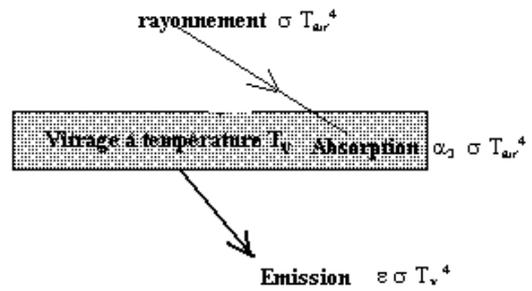
3) L'absorbeur, à la température T_a , émet un rayonnement dont l'émittance est fournie par la loi de STEFAN-BOLTZMANN, soit: σT_a^4



4) Le rayonnement de l'absorbeur frappe le vitrage. Une fraction $\rho_2 \sigma T_a^4$ est réfléchiée et revient donc vers l'absorbeur. Une autre fraction $\alpha_2 \sigma T_a^4$ est absorbée



5) Le vitrage, en équilibre thermique à la température T_v , émet un rayonnement $\varepsilon \sigma T_v^4$, qui sera absorbé par le corps noir en vis-à-vis (dont c'est la fonction).
 En même temps, il absorbe une fraction $\alpha_3 \sigma T_{air}^4$ du rayonnement ambiant émanant de l'environnement à la température T_{air}



a) Bilan au niveau de l'absorbeur

Il absorbe: $\tau_1 E$, la fraction de l'éclairement solaire E que transmet le vitrage.
 $\rho_2 \sigma T_a^4$, la fraction du rayonnement de la surface noire réfléchié par le vitrage.
 $\varepsilon \sigma T_v^4$, le rayonnement émis par le vitrage.

Il émet: σT_a^4
 L'équilibre thermique de l'absorbeur s'exprime donc par l'équation:

$$\sigma T_a^4 = \tau_1 E + \rho_2 \sigma T_a^4 + \varepsilon \sigma T_v^4 \tag{4.33}$$

b) Bilan au niveau du vitrage

Il absorbe: $\alpha_1 E$, une fraction du rayonnement solaire.
 $\alpha_2 \sigma T_a^4$, une fraction du rayonnement de l'absorbeur
 $\alpha_3 \sigma T_{air}^4$, fraction du rayonnement de l'environnement à une température T_{air}

Il émet: $2 \varepsilon \sigma T_v^4$, le rayonnement émis par ses deux faces.

L'équilibre thermique du vitrage s'exprime donc par l'équation:

$$2 \varepsilon \sigma T_v^4 = \alpha_1 E + \alpha_2 \sigma T_a^4 + \alpha_3 \sigma T_{air}^4 \tag{4.34}$$

En combinant avec le premier bilan:

$$\sigma T_a^4 = \tau_1 E + \rho_2 \sigma T_a^4 + \varepsilon \sigma T_v^4 \tag{4.35}$$

on obtient:

$$\sigma T_a^4 = \tau_1 E + \rho_2 \sigma T_a^4 + \frac{\alpha_1 E + \alpha_2 \sigma T_a^4 + \alpha_3 \sigma T_{\text{air}}^4}{2}$$

soit en réarrangeant les termes:

$$\sigma T_a^4 \left(1 - \frac{\alpha_2 + 2 \rho_2}{2} \right) = \frac{(\alpha_1 + 2 \tau_1) E + \alpha_3 \sigma T_{\text{air}}^4}{2}$$

que l'on résout en:

$$T_a^4 = \frac{(\alpha_1 + 2 \tau_1) E + \alpha_3 \sigma T_{\text{air}}^4}{(2 - \alpha_2 - 2 \rho_2) \sigma}$$

pour en tirer finalement:

$$T_a = \sqrt[4]{\left(\frac{\alpha_1 + 2 \tau_1}{2 - \alpha_2 - 2 \rho_2} \frac{E}{\sigma} + \frac{\alpha_3}{2 - \alpha_2 - 2 \rho_2} T_{\text{air}}^4 \right)} \quad (4.36)$$

Dans cette relation: $\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 0,65$ $\alpha_3 = 1$
 $\tau_1 = 0,95$ $\rho_2 = 0,30$

En appliquant la relation (4.34), on obtient: $T_a = 483 \text{ K} = 210 \text{ °C}$

Quant à la température du vitrage, on la tire de la relation:

$$2 \varepsilon \sigma T_v^4 = \alpha_1 E + \alpha_2 \sigma T_a^4 + \alpha_3 \sigma T_{\text{air}}^4 \quad (4.37)$$

ce qui, en adoptant comme valeur de l'émissivité du verre: $\varepsilon = 0,88$

conduit à la valeur: $T_v = 394 \text{ K} = 121 \text{ °C}$

Les valeurs obtenues ne constituent qu'une approximation, car nous n'avons donné ici qu'un traitement très simplifié du problème, en négligeant notamment la convection au sein de la lame d'air séparant le vitrage de l'absorbeur.

Bibliographie :

1. J.P. BARDON, Températures de surface, Notions fondamentales (R2730) Edition Techniques de l'ingénieur.
2. G. BRUHAT, Thermodynamique, Edition Masson.
3. P. Cormault, Cours de Thermique théorique et pratique, Ecole Spéciale de Mécanique et D'électricité, Seconde édition, 1999.
4. C. CHAUSSIN, C. HILLY et J. BARRALS Chaleur et thermodynamique, Edition Lavoisier.
5. J H. Lienhard IV, J H. Lienhard V, A Heat Transfer Textbook, Cambridge Massachusetts, Third edition, 2002.