REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI OUM EL-BOUAGHI

FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES APPLIQUEES

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

Cours de Physique I

Mécanique du Point Matériel

Elaboré par :

Dr. RAHMANI Ahmed

2017/2018

Préface

Ce cours s'adresse aux étudiants des troncs communs des sciences de la matière (SM), mathématiques et informatique (MI), et sciences et techniques (ST). Le cours présenté est le fruit de plusieurs années d'enseignement dispensé aux étudiants de première année à l'université d'Oum El-Bouaghi. Cet ouvrage présente un aperçu aussi complet que possible des concepts de base de la mécanique du point matériel à l'aide des outils mathématiques nécessaires à la bonne compréhension du cours de physique. Il a été conçu afin de rendre les concepts de la mécanique du point, simples et accessibles aux étudiants.

Cet ouvrage est composé de 05 chapitres conformes aux programmes du premier semestre. Le premier chapitre donne les principales notions de l'analyse dimensionnelle et du calcul d'erreur. Le chapitre présente les grandeurs physiques de base qui sont utilisées pour l'expression des lois physiques.

Le deuxième chapitre traite les notions de base du calcul vectoriel. Le troisième chapitre est dédié à la cinématique du point matériel. L'objectif de ce chapitre est de décrire le mouvement du point matériel dans les différents systèmes de coordonnées. L'étude du mouvement composé est aussi faite parti de ce chapitre.

Le quatrième chapitre traite de la dynamique du point matériel, dans le cadre de la mécanique de Newton avec ses trois lois. Le cinquième chapitre concerne le travail et l'énergie. Nous considérons dans ce chapitre le travail d'une force, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, l'énergie mécanique ainsi que la définition des forces conservatives.

Dr. Rahmani Ahmed

TABLE DES MATIERES

Chapitre I :

Equations aux dimensions & calcul d’erreurs

I.1 EQUATIONS AUX DIMENSIONS

I.1.1 Les grandeurs physiques

La physique est une science basée sur l'observation de phénomènes physiques, et l'étude de ces phénomènes nécessite la définition de grandeurs physiques. On appelle ***grandeur physique*** toute propriété physique mesurable.

La mesure de la grandeur s'obtient donc par comparaison entre deux grandeurs physiques de même nature dont l'une est choisie comme unité.

I.1.2 Les grandeurs de base

L'ensemble des unités est regroupé dans un système cohérent et universel d'unités, appelé le Système International (S.I). Toute grandeur physique peut donc s'exprimer sur la base de ces unités fondamentales (de base). Les sept unités de base sont données par le tableau suivant.

Grandeur physique	**Lettre utilisée**
Masse	M
Longueur	L
Temps	T
Intensité électrique	I
Température	θ
Intensité lumineuse	J
Quantité de matière	N

On peut exprimer n'importe quelle unité en fonction d'une ou plusieurs des sept unités du système international.

I.1.3 Equations aux dimensions

Le principe des équations aux dimensions consiste à ramener les différents paramètres qui interviennent dans une formule aux grandeurs fondamentales du système international d'unités. Le tableau ci-après donne quelques grandeurs physiques et leur dimension.

Grandeur physique	Dimension	Unité
Masse	M	kg
Longueur	L	m
Temps	T	s
Intensité du courant électrique	I	A

La dimension d'une grandeur dérivée (*qui ne fait pas partie des grandeurs de base*) s'exprime par le produit de puissances des dimensions de base. L'équation aux dimensions d'une grandeur physique dérivée *X* s'écrit : $[X]= L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}I^{\sigma}$

Ce produit est souvent appelé : Equation aux dimensions.

Exemple : la vitesse : $v = \frac{x}{t}$,

La dimension de la vitesse : $[v] = \left[\frac{x}{t}\right] = \frac{[x]}{[t]}$

[x]=L et [t]=T donc, $[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$

Donc, l'équation de dimensions de la vitesse : $[v] = LT^{-1}$

Quelques propriétés sur de dimensions

- [A.B]=[A].[B], [A/B]=[A]/[B],
- [constante]=1, exp. [5]=1, [sinα]=1, [π]=1.
- [dA]=[A],[ΔA]=[A],[∫A]=[A],

Exercice 1 : Ecrire l'équation aux dimensions des grandeurs suivantes :

Grandeur	Équations aux dimensions	Unités de base	Noms
Force	MLT^{-2}	$kg.m.s^{-2}$	newton : N
Pression	$ML^{-1}T^{-2}$	$kg.m^{-1}.s^{-2}$	pascal : Pa
Travail	ML^2T^{-2}	$kg.m^2.s^{-2}$	joule : J
Puissance	ML^2T^{-3}	$kg.m^2.s^{-3}$	watt : W
Charge	$Q = IT$	$A.s$	coulomb : C
Potentiel	$ML^2T^{-2}Q^{-1}$	$kg.m^2.s^{-3}\ A^{-1}$	volt : V
Capacité	$M^{-1}L^{-2}T^2Q^2$	$kg^{-1}\ m^{-2}\ s^4\ A^2$	farad : F
Résistance	$ML^2T^{-1}Q^{-2}$	$kg.m^2.s^{-3}\ A^{-2}$	ohm : Ω
Conductance	$M^{-1}L^{-2}TQ^2$	$kg^{-1}.m^{-2}.s^3\ A^2$	siemens : S
Champ magnétique	$MT^{-1}Q^{-1}$	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$	tesla : T
Inductance	$ML^2T^{-2}I^{-2}$	$kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-2}$	henry : H

I.1.4 Homogénéité des dimensions

Les équations physiques sont homogènes en ce qui concerne leur dimension. C-à-d, les deux cotés de l'équation ont la même dimension. Cette homogénéité permet de définir une loi physique qui décrite un phénomène quelconque.

Exemple : Ont doit définir une loi physique qui donne la période (**τ**) de la pendule simple en fonction de la longueur du fil (**ℓ**) et l'accélération gravitationnelle (**g**). On à τ = f(g, ℓ) donc, loi physique qui donne la période (**τ**) de la pendule simple prend la forme : $\tau = k\, g^{\alpha}\, \ell^{\beta}$ (1)

la propriété de l'homogénéité de dimension permet d'écrire : $[\tau] = [k\, g^{\alpha}\, \ell^{\beta}] = [k]\, [g^{\alpha}]\, [\ell^{\beta}] = [g]^{\alpha}\, [\ell]^{\beta}$

$[g] = ML^{-2}$ et $[\ell] = L$ et aussi $[\tau] = T$.

Donc, $[\tau] = (LT^{-2})^{\alpha}\, L^{\beta} = L^{\alpha+\beta}.\, T^{-2\alpha}$

Alors, $[\tau] = L^{\alpha+\beta}.\, T^{-2\alpha} = T$

Pour trouver les valeurs de α et β il faut résoudre le système d'équation suivant :

$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ -2\alpha=1\end{cases}$, sa donne : $\begin{cases}\alpha=-1/2\\ \beta=1/2\end{cases}$

Donc, l'équation 1 devient : $\tau = k\, g^{-1/2}\, \ell^{1/2} = k\,\dfrac{l^{1/2}}{g^{1/2}}$ On obtient : $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

I.2 Calcul d'erreurs

I.2.1 Introduction

Il est impossible de déterminer la valeur d'une grandeur physique, sans que celle-ci ne contienne un certain taux d'erreur. Ainsi, tout résultat numérique, qui découle d'une mesure ou d'un calcul, n'a en réalité pas de valeur s'il n'est pas accompagné d'une estimation, même grossière, des limites à l'intérieur desquelles la "vraie" valeur devrait se placer.

L'intérêt de nos résultats dépend souvent de notre efficacité dans l'estimation de ces limites.

I.2.2 Erreur et incertitude

Toute mesure expérimentale est associée d'une erreur dont sa valeur ne peut être estimée avec exactitude. Toutefois, même s'il est impossible de déterminer la valeur exacte de l'erreur commise, en revanche, il est possible pour chaque type d'erreur de calculer sa limite supérieure (en valeur absolue) que l'on appellera incertitude absolue.

I.2.3 Calcul d'incertitude

I.2.3.1 Calcul d'incertitude sur une mesure directe

Quand nous effectuons plusieurs mesures directes d'une grandeur X, on obtient X_i mesures qui sont, en général, légèrement différentes ; $X=X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots, X_n$

Souvent, on adopte que la moyenne arithmétique des différents X_i, est la valeur la plus approchée de la valeur réelle (*Approche statistique élémentaire*).

$$X_{moy} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Où n est le nombre de mesures réalisées.

a) Incertitude absolue : L'incertitude absolue peut être en première approximation :

$\Delta X_1 = X_1 - X_{moy}$

$\Delta X_2 = X_2 - X_{moy}$

$\Delta X_3 = X_3 - X_{moy}$

$\vdots$

$\Delta X_n = X_n - X_{moy}$

Incertitude absolue moyenne : $\Delta X_{moy} = \dfrac{\Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3 + ... + \Delta X_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \Delta X_i}{n}$

Nous dirons que la valeur exacte *Xe* de la grandeur X est comprise dans l'intervalle X_{moy} - ΔX_{moy} et X_{moy} + ΔX_{moy} autrement dit :

X_{moy}- ΔX_{moy} < X < X_{moy}- ΔX_{moy}, où bien, $Xe = X_{moy} \pm \Delta X_{moy}$

b) Incertitude relative : Une incertitude absolue ne permet pas d'avoir une idée sur la qualité d'une mesure. C'est pour cette raison qu'il faut définir l'incertitude relative, elle permet d'estimer la précision sur le résultat obtenu.

$\delta = \dfrac{\Delta X_{moy}}{X_{moy}}$, l'incertitude relative n'a pas d'unités, elle s'exprime en général en % ou en ‰.

I.2.3.2 Calcul d'incertitude sur une mesure indirecte

Dans la pratique, il arrive souvent que l'on ne puisse mesurer directement la valeur d'une grandeur ***F***. Toutefois, celle-ci est généralement liée à un certain nombre d'autres grandeurs ***x, y***, **z**, …, etc. directement ou indirectement mesurables. Il existe deux technique simple pour le calcul de l'incertitude relative :

a) Méthode de la différentielle d'une fonction

La différentielle ***dF*** d'une fonction ***F= f(x,y,z)*** est définie par : $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x} dx + \dfrac{\partial F}{\partial y} dy + \dfrac{\partial F}{\partial z} dz$

Le calcul de l'incertitude relative ***ΔF/F*** on suit les étapes suivantes :

1) Calcul de la différentielle de la fonction (***dF***)

2) On divise la différentielle de la fonction sur la fonction (***dF/F***)

3) Sommation des incertitudes c-à-d, passons de **d** à **Δ**.

Exercice 1 : La mesure de la résistance ***R*** d'une partie d'un circuit électrique, S'effectue sur la mesure directe de l'intensité du courant ***I*** et la différence du potentiel ***V*** (*R=f(I,V)).* Donc, $\Delta R = f(\Delta I, \Delta V)$. Il suffit d'utiliser la relation R=V/I.

1) $dR = \dfrac{\partial R}{\partial I} dI + \dfrac{\partial R}{\partial V} dV$

$\dfrac{\partial R}{\partial I} = -\dfrac{V}{I^2}$ et $\dfrac{\partial R}{\partial V} = \dfrac{1}{I}$, Donc, $dR = -\dfrac{V}{I^2} dI + \dfrac{1}{I} dV$

2) $\dfrac{dR}{R} = -\dfrac{V}{RI^2} dI + \dfrac{1}{RI} dV = -\dfrac{V}{VI} dI + \dfrac{1}{V} dV = \dfrac{dV}{V} - \dfrac{dI}{I}$

3) Finalement on obtient l'incertitude relative sur la résistance électrique : $\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta I}{I}$

b) Méthode de la différentielle logarithmique d'une fonction

Pour déterminer l'incertitude relative *ΔF/F*, à partir de la méthode de la différentielle logarithmique d'une fonction, on suit les étapes suivantes :

1) Calcul du logarithme de la fonction, ***lnF***,

2) Calcul de la différentielle du logarithme de la fonction ***d***(***lnF***),

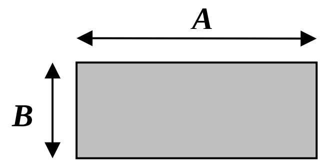
3) Sommation des incertitudes c-à-d, passons de **d** à **Δ**.

Exercice 2 : Déterminer la surface ***S*** d'un rectangle de longueur *A=(24.6 ± 0.1) cm* et de largeur *B=(8.3 ± 0.1)cm*. La surface du rectangle est calculée par le produit: S=A.B.

1. Le logarithme de la fonction : *lnS = ln(A.B) = lnA + lnB*

2. Passons à la différentielle : $dS/S = dA/A + dB/B$

3. Puis passons à l'incertitude : $\Delta S/S = \Delta A/A + \Delta B/B$



Finalement l'incertitude sur ***S*** s'écrit: $\Delta S = S\left(\Delta A/A + \Delta B/B\right)$

A.N : $\Delta S = 3.29\ cm^2$; $S = (204 \pm 3)\ cm^2$. Alors que la *précision* sur la surface est de δ=1.5 %.

Chapitre II:

Calcul vectoriel

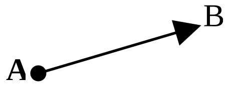
II.1 Les grandeurs physiques

Les grandeurs physiques se divisent en deux groupes:

- grandeur scalaires tels que; la masse, le temps, l'énergie, … etc.

- grandeur vectorielles comme la vitesse, la force, quantité de mouvement… etc.

II.2 Caractéristiques d'un vecteur

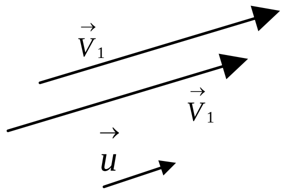


Le vecteur $\vec{AB}$ est défini avec les propriétés suivantes :

- la direction : c'est le sens dans lequel se déplace le vecteur (de A vers B).
- le module : la longueur absolue du vecteur : $|\overrightarrow{AB}| = AB$.
- Le vecteur unitaire : tout vecteur de module égale à l'unité: $|\vec{V}| = 1$.

Le vecteur unitaire $\vec{u}$ d'un vecteur $\vec{V}$ est toujours parallèle $\vec{V} \,//\, \vec{u}$. Le vecteur $\vec{V}$ s'écrit : $\vec{V} = V\,\vec{u}$.

II.3 Vecteurs parallèles



$\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ deux vecteur parallèles, on peut écrire :

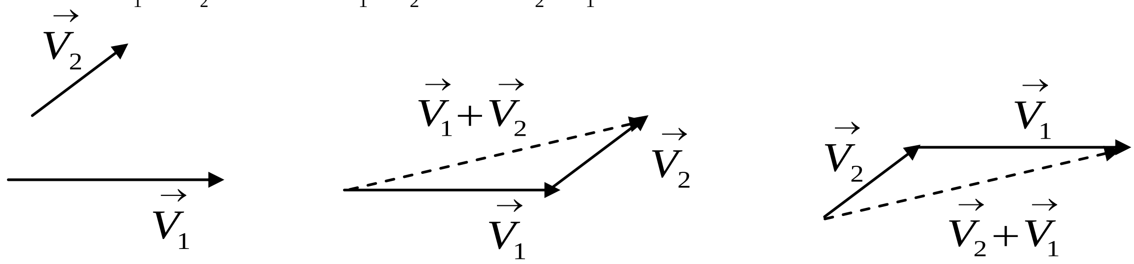
$\vec{V}_1 = V_1.\ \vec{u}$ et $\vec{V}_2 = V_2.\ \vec{u}$

Donc, $\vec{V}_1/\vec{V}_2 = V_1/V_2 = K$

La condition parallèle s'écrit : $\vec{V}_1 = K\ \vec{V}_2$

II.4 Somme des vecteurs

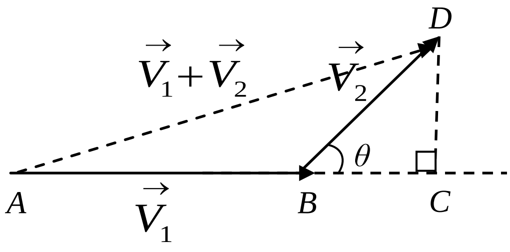
Soit les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ avec $\vec{S} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ et $\vec{S}' = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$.



On constate que $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$ Donc, la somme des vecteurs est commutative.

Le module de la somme $S = \left|\vec{S}\right| = \left|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right|$ graphiquement : $S = \left|\vec{S}\right| = (AD)^2$

Selon le théorème de Pythagore, $AD^2 = AC^2 + CD^2$



Avec : $\begin{cases} AC = AB + BC \\ CD = V_2 \sin\theta \\ BC = V_2 \cos\theta \end{cases}$ 1

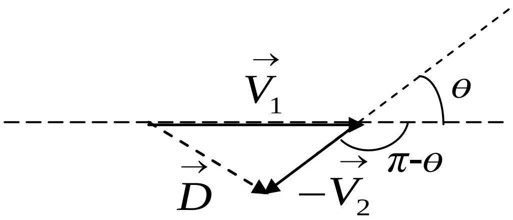
$AB = V_1$ *et* $AD^2 = (V_1 + V_2 \cos\theta)^2 + V_2^2 \sin^2\theta$

Donc, $S = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta}$

II.5 Différence des vecteurs

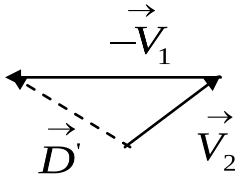
$\vec{D} = \vec{V_1} - \vec{V_2}$ => $\vec{D} = \vec{V_1} + (-\vec{V_2})$

$\vec{D'} = \vec{V_2} - \vec{V_1}$ ==> $\vec{D'} = \vec{V_2} + (-\vec{V_1})$



On constate que $\vec{D} \neq \vec{D'}$ c-à-d, $\vec{V_1} - \vec{V_2} \neq \vec{V_2} - \vec{V_1}$. Donc la différence des vecteurs non commutative.

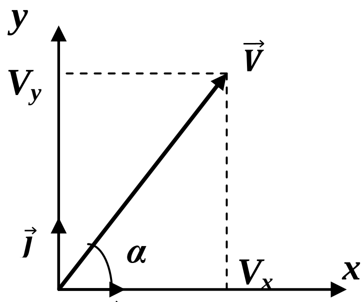
=> $S = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\pi - \theta)}$



II.6 Composantes d'un vecteur

Chaque vecteur $\vec{V}$ peut être défini par la somme de deux vecteurs où plus. Ces vecteurs sont appelés les composantes de ce vecteur.

a) Dans le plan

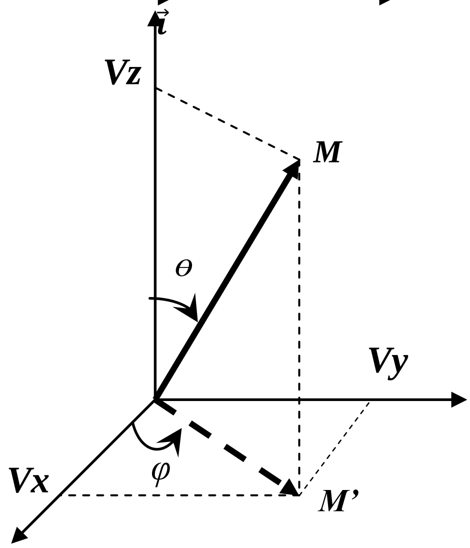


$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y} = V\cos\alpha\,\vec{i} + V\sin\alpha\,\vec{j}$

$\vec{V} = \begin{pmatrix} Vx \\ Vy \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} \\ \vec{V} = \|\vec{V}\|\vec{u} \end{cases}$ => $\vec{U} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$

b) Dans l'espace



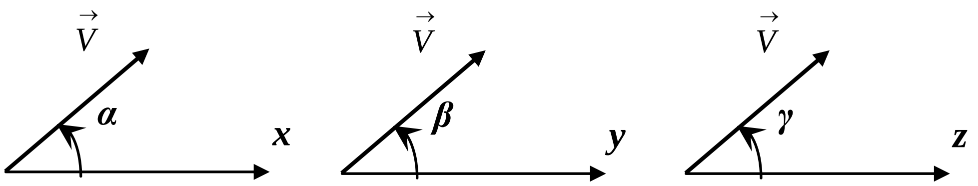
$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y} + \vec{V_z}$

$\begin{cases} V_x = V\cos\varphi\sin\theta \\ V_y = \mathrm{V}\sin\varphi\sin\theta \\ V_z = V\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

II.7 Les cosinus directeurs

Le vecteur $\vec{V}$ forme les angles α, β et γ respectivement avec les axes *OX*, *OY* et *OZ*.



$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

cosα, cosβ et *cosγ* sont appelés les cosinus directeur du vecteur $\vec{V}$.

$$\begin{cases} \vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \\ \quad = V(\cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}) \end{cases}$$

$\vec{V} = V\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}$

Exemple:

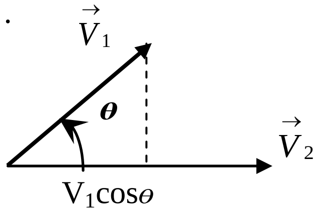
$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 1/\sqrt{14} \\ \cos\beta = 2/\sqrt{14} \\ \cos\gamma = 3/\sqrt{14} \end{cases}$$

II.8. Produit scalaire et produit vectoriel

II.*8.1 Produit scalaire*

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est définie par

$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 V_2 \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$, θ, *l'angle compris entre* $\vec{V}_1$ *et* $\vec{V}_2$.



$$\begin{cases} \theta < \pi/2 \ \Rightarrow \ \vec{V_1}.\vec{V_2} > 0 \\ \theta > \pi/2 \ \Rightarrow \ \vec{V_1}.\vec{V_2} < 0 \\ \theta = \pi/2 \ \Rightarrow \ \vec{V_1}.\vec{V_2} = 0 \end{cases}$$

- $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = V_1^2$
- $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 V_2 \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ *et* $\vec{V}_2 . \vec{V}_1 = V_2 V_1 \cos(\vec{V}_2, \vec{V}_1)$

  $\Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 . \vec{V}_1$, on dit que le produit scalaire est commutatif.

- $\vec{V}_1(\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$
- $(\vec{V_1} + \vec{V_2})^2 = {V_1}^2 + {V_2}^2 + 2V_1V_2\cos\theta$
- $(\vec{V_1} - \vec{V_2})^2 = {V_1}^2 + {V_2}^2 - 2V_1V_2\cos\theta$

a) Produit scalaire des vecteurs unitaires

D’après les propriétés du produit scalaire, on aura:

$* \ \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

$* \ \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0$

b) Projection d’un vecteur

Si on considère la valeur $V_2 \cos\theta$ la projection du vecteur $\vec{V}_2$ sur $\vec{V}_1$, on peut donc récrire le produit scalaire sous la forme suivante :

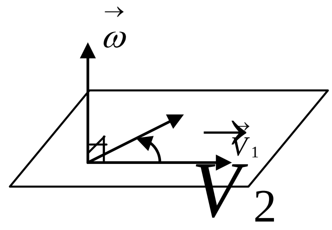
$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 \, proj \vec{V}_2 / \vec{V}_1$, Ceci conduit à : $proj \vec{V}_2 / \vec{V}_1 = \dfrac{\vec{V}_1 . \vec{V}_2}{V_1}$ *et* $proj \vec{V}_1 / \vec{V}_2 = \dfrac{\vec{V}_1 . \vec{V}_2}{V_2}$

Exemple :

Calculer les projections du vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur les axes *ox*, *oy* et *oz* et sur la droite (Δ) : y = x.

Rép. $proj\, \vec{V}/_{ox} = 2, proj\, \vec{V}/_{oy} = 3, proj\, \vec{V}/_{oz} = 0 proj\, \vec{V}/_{\Delta} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

II.8.2 Produit vectoriel



Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est un vecteur $\vec{\omega}$ défini par :

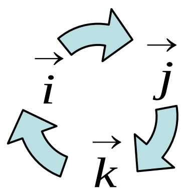
$\vec{\omega} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$. Le module du vecteur $\vec{\omega}$ est donné par la relation:

$|\vec{\omega}| = |\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}| = |\vec{V_1}||\vec{V_2}|\, sin(\vec{V_1}, \vec{V_2})$

Analytiquement, le produit vectoriel des vecteurs $\vec{V_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ s'exprime par :

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

a) Propriétés du produit vectoriel



D'après les propriétés du produit vectoriel, on a :

$* \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$

$* \vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

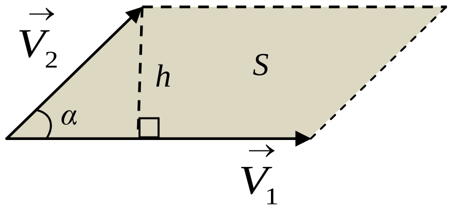
$* \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}, \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath} \;\; et \; \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$

Ces trois relations se déduisent l'une de l'autre par permutation circulaire.

On aura de même: $\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}, \vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k}$ et $\vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}$.

b) Module du produit vectoriel

Le module du produit vectoriel de deux vecteur représente la surface d'un équilatérale compris entre ses deux vecteurs.



$\|\vec{V_1} \hat{} \vec{V_2}\| = V_1 V_2 \, sin(\vec{V_1}, \vec{V_2})$

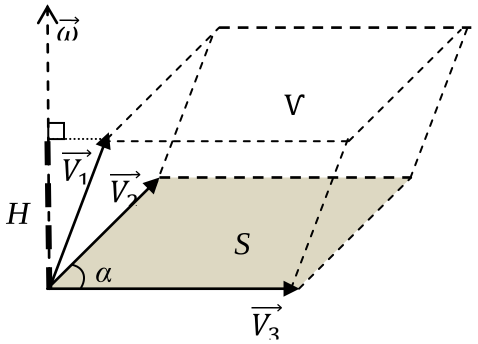
$h = V_2 \, sin(\vec{V_1}, \vec{V_2})$, donc $S = \|\vec{V_1} \hat{} \vec{V_2}\| = h. V_1$

II.8.3 Produit mixte

Le produit mixte des trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ est définie par le produit scalaire suivant:

$\vec{V_1}. (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = V_1. \|\vec{V_2} \hat{} \vec{V_3}\|\, cos(\vec{V_1}, \vec{\omega})$

Où, $H = \overrightarrow{V_1} cos(\overrightarrow{V_1}, \vec{\omega})$ *et* $S = \|\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\|$

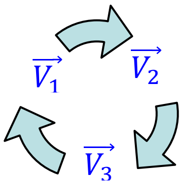


Graphiquement, le produit, $V = H.S$, représente le volume d'un parallélépipède compris entre les trois vecteurs.

Remarque: le produit mixte des trois vecteurs obéit la propriété de permutation circulaire:

$\overrightarrow{V_1}.(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) = \overrightarrow{V_2}.(\overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_1}) = \overrightarrow{V_3}.(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2})$

Exemple: calculer le volume d'un parallélépipède défini par les vecteurs



$\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} et\ \overrightarrow{V_3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Rep. $V = 3\ (uv)$

II.9. Moment d'un vecteur

II.*9.1 Moment d'un vecteur par apport à un point*

Le moment d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par apport à un point *O* est défini par le vecteur $\vec{\tau}_{\overrightarrow{AB}/o}$ tels que:

$\vec{\tau}_{\overrightarrow{AB}/o} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$, et le module du moment s'écrit: $\left|\vec{\tau}_{\overrightarrow{AB}/o}\right| = OA.AB\ \sin\theta$

II.*9.2 Moment d'un vecteur par apport à un axe*

Le moment d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par apport à un axe $\vec{\tau}_{\overrightarrow{AB}/\Delta}$ est donné par le produit scalaire:

$\tau_{\overrightarrow{AB}/\Delta} = \vec{\tau}_{\overrightarrow{AB}/o}.\overrightarrow{u_\Delta}$ avec, $\overrightarrow{u_\Delta}$, le vecteur unitaire de l'axe (Δ).

II.10 Dérivées d'un vecteur

Soit le vecteur: $\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$

La dérivée temporelle par rapport au temps est définie : $\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$

Quelques caractéristiques des dérivées de vecteur:

$$\frac{d\left(\vec{A}+\vec{B}\right)}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d\left(\lambda\vec{A}\right)}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\vec{A} + \lambda\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d\left(\vec{A}.\vec{B}\right)}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\vec{B} + \vec{A}\frac{d\vec{B}}{dt}$$

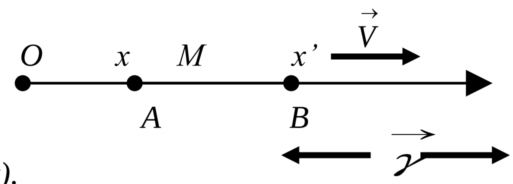
$$\frac{d\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\wedge\vec{B} + \vec{A}\wedge\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Chapitre III :

Cinématique du point

III.1 Définitions

La cinématique du point matériel vise à décrire les mouvements (vitesse, accélération, trajectoire d'un mobile, équation horaire,... etc.) sans se préoccuper des causes qui les provoquent. Elle repose cependant sur les notions physiques de l'espace et du temps. La position d'un point matériel est donnée par les 03 coordonnées de position du point dans l'espace. On dit qu'il possède 03 degrés de liberté de mouvement.



III.2 Mouvement rectiligne

La position du mobile est déterminée par l'abscisse : $x=x(t)$.

- A l'instant t, la particule se trouve au point A : $x=OA$.
- A l'instant t', la particule se trouve au point B : $x'=OB$.

III.2.1 La vitesse du mobile

***a) Vitesse moyenne* :** Ont défini la **vitesse moyenne** entre A et B par : $V_{moy} = \frac{OB-OA}{t'-t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Où, Δx, la distance parcourue entre A et B pendent l'intervalle de temps Δt.

***b) Vitesse instantanée* :** La vitesse instantanée $V_{inst.}$ est définie par la dérivée du déplacement par rapport au temps : $\vec{V}_{inst.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

III.2.2 L'accélération du mobile

***a) Accélération moyenne* :** Ont définie l'accélération moyenne entre A et B par: $\gamma_{moy} = \frac{V'-V}{t'-t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$

Où, ΔV la variation de la vitesse entre A et B pendent l'intervalle de temps Δt.

***b) Accélération instantanée* :** l'accélération instantanée $\gamma_{inst.}$ est définie par la dérivée de la vitesse par rapport au temps : $\gamma_{inst.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

III.2.3 Représentation graphique de vecteur vitesse et accélération

Le vecteur vitesse $\vec{V}$ est représenté par un vecteur de module $\frac{dx}{dt}$ et orienté vers le même sens du mouvement.

- si $\vec{OM}$ et $\vec{V}$ ont le même sens, $\frac{dx}{dt} > 0$, le mouvement est accéléré.
- si $\vec{OM}$ et $\vec{V}$ ont le sens opposé, $\frac{dx}{dt} < 0$, le mouvement décéléré.

III.3 Mouvement curviligne

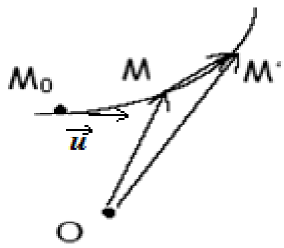
III.3.1 Vecteur position

On se place donc dans un référentiel (R) donné. Pour définir la position d'un point matériel placé en un point géométrique M, on doit choisir un point *O* fixe dans le référentiel (*R*) par rapport auquel on pourra la définir. La position du point M est alors définie par le vecteur lié (bipoint) $\vec{OM} = \vec{r}$, appelé " ***vecteur position*** " et le choix de l'origine « O » est arbitraire

Quand le point matériel se déplace, le point M se déplace et le vecteur $\vec{OM}(t) = \vec{r}(t)$ varie en fonction du temps. La courbe (C) décrite par le point M est la trajectoire du point matériel.

$S = \widehat{M_0M}$: abscisse curviligne

S=S(t), l'équation horaire



III.3.2 Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur $\vec{OM}(t) = \vec{r}(t)$, $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Soit M position du point à l'instant *t* et ***M'*** à l'instant infiniment voisin t'= t+Δt, Δt = t'-t le vecteur position $\vec{OM}$ varie de $\vec{OM}' - \vec{OM} = \vec{MM}'$

$$\vec{V} = lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{OM'} - \overline{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Si *M* est infiniment voisin du point M', on à $\overline{MM'} \approx \widehat{MM'}$. Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire au point M.

III.3.3 Vecteur accélération

Dans un mouvement quelconque, la vitesse peut varier au cours du temps. Elle change en tout point de la trajectoire en grandeur et en direction. Le vecteur accélération est défini comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{\gamma} = lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{v(t')} - \overrightarrow{v(t)}}{\Delta t} = lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{v(t)}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

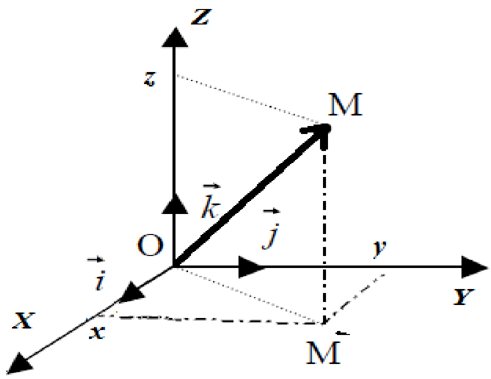
Ces définitions sont données par rapport à un référentiel donné.

III.4 Repères et systèmes des coordonnées

Les notions de position, vitesse et accélération d'un mobile M sont définies par rapport à un référentiel ; cartésiennes, Intrinsèque, Polaire, cylindriques ou sphériques. On peut soit manipuler des vecteurs, soit choisir d'utiliser leurs composantes par rapport à un repère donné, solidaire de (R) qui est généralement orthonormé. Le choix du repère, comme celui de son origine, est arbitraire est indépendant de la notion du mouvement. On le choisit de manière à simplifier les expressions mathématiques. La description du mouvement d'une particule M nécessite la définition de trois vecteurs, à savoir : le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, le vecteur vitesse ($\vec{V}$) et le vecteur accélération $\overrightarrow{(\gamma)}$.

III.4.1 Système de coordonnées cartésiennes

Dans le repère *R(o,x,y,z)*, on choisit un point fixe *O* et trois axes orthogonaux ayant pour origine commune le point *O*, portant trois vecteurs unitaires, ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$). On a alors un repère orthonormé ou un trièdre rectangle (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$).



III.4.1.1 Vecteur position

Dans le système de coordonnées cartésiennes, la position de la particule M est définie par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ exprimé en fonction des éléments du repère (x,y,z) telles que :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Au cous du mouvement du point *M* dans lespace, le vecteur position est une fonction du temps:

$$\overrightarrow{r(t)} = \overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}.$$

III.4.1.2 Vecteur vitesse: $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Les vecteurs unitaires ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) sont fixes dans le repère cartésien, donc :

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

On note aussi:

$$\vec{V} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

Les composantes en coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse sont donc :

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \;\; ; \; V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \; ; \;\; V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

III.4.1.3 Vecteur accélération: $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

On peut écrire donc: $\vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$.

III.4.2 Système **de coordonnées intrinsèques**

La valeur algébrique de l'arc (M_A M_B) est l'abscisse curviligne S du mobile. $\overrightarrow{u_T}$ et $\overrightarrow{u_N}$ forment une base orthonormée et la projection de ces vecteurs dans le repère cartésien donne :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_T} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_N} = -\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

III.4.2.1 Composantes du vecteur vitesse

Par définition, le vecteur est la dérivée du vecteur position :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS}\frac{dS}{dt}$$

Le module de vitesse *V* dans ce système s'exprime par la dérivé de l'abscisse curviligne *S* par rapport au temps : V =dS/dt. Donc, l'expression de la vitesse prend la forme :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS}.\frac{dS}{dt} = V\frac{d\vec{r}}{dS}$$

Le terme $\frac{d\vec{r}}{dS}$, représente un vecteur unitaire tangentiel $\overrightarrow{u_T}$. Donc, le vecteur vitesse est tangentiel à la trajectoire du mobile et prend la forme : $\vec{V} = V\,\overrightarrow{u_T}$.

III.4.2.2 Composantes du vecteur accélération

A son tours, le vecteur accélération $\boldsymbol{\vec{\gamma}}$ est définie par la dérivée temporelle du vecteur vitesse selon :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V.\overrightarrow{u_T}) = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{u_T} + V\frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{u_T}}}{\boldsymbol{dt}}$$

Pour trouver l'expression du terme $\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt}$, ont fait intervenir l'abscisse curviligne *S* et l'angle *Θ* formée entre l'axe OX et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$$\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_T}}{dS}\frac{dS}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_T}}{d\theta}\frac{d\theta}{dS}\frac{dS}{dt}$$

La dérivée du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_T}$ par rapport à *Θ* donne : $\frac{d\overrightarrow{u_T}}{d\theta} = \overrightarrow{u_N}$

Pour un déplacement élémentaire *dΘ*, le mobile fait un arc élémentaire *dS*. Donc, le terme $\frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{R}$

Où, *R*, représente le rayon de courbure de la trajectoire. L'expression, $\frac{d\overrightarrow{u_T}}{d\theta}$ prend la forme suivante :

$$\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt} = \frac{V}{R}\overrightarrow{u_N}$$

On trouve donc le vecteur accélération par:

$$\vec{\gamma} = \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\gamma_T}\overrightarrow{u_T} + \underbrace{\frac{V^2}{R}}_{\gamma_N}\overrightarrow{u_N}$$

La composante γ_T est liée au changement de module de la vitesse et portée sur l'axe muni du vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{u_T}}$. Alors que γ_N, la composante normale est liée au changement de la direction du vecteur vitesse et dirigé vers le côté concave de la trajectoire. Dans certains cas et pour déterminer le rayon de courbure *R* de la trajectoire, on utilise les composantes intrinsèques de l'accélération.

Remarque :

Pour un mouvement rectiligne, il n'y a pas de variation de la direction du vecteur vitesse. Donc, la composante γ_N=0. Ce qui implique que le rayon de la courbure correspondant à cette trajectoire est infini.

III.4.3 Système de coordonnées polaires

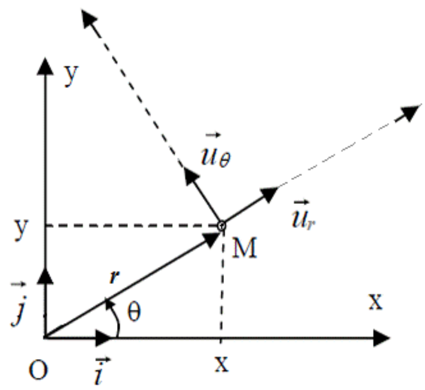
Le système de coordonnées polaires est un repère plan à symétrie de rotation. Les éléments du repère polaire sont *r* et *Θ*.

Le rayon polaire *r(t)* représente le module du vecteur position :

$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

L'angle polaire *Θ(t)*, représente l'angle compris entre l'axe OX et le vecteur position.

La base du système de coordonnées polaire est formée par deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ liée au point M.



$\overrightarrow{u_r}$, ayant la même direction et le sens du vecteur position : $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}$

$\overrightarrow{u_\theta}$, est perpendiculaire et vecteur $\overrightarrow{u_r}$ et orienté vers le sens d'accroissement de l'angle *Θ*.

III.4.3.1 Relation avec les coordonnées cartésiennes

La relation entre les éléments du repère cartésien (*x*,*y*) et celles du polaire (*r, Θ*) sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

La relation entre les éléments du repère polaire (r, Θ) et celles du cartésien (x,y) sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

La relation entre les vecteurs unitaires du repère polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et celles du repère cartésien $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est exprimée par la relation suivante :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

III.4.3.2 Vecteur position : $\overrightarrow{OM}$

Le vecteur position lient l'origine O avec le mobile M OM est définie par :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\overrightarrow{u_r}$$

III.4.3.3 Vecteur vitesse $\vec{V}$

Par définition :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\overrightarrow{u_r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}$$

La dérivée du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r}$ peut être déterminée par l'intermédiaire de la variable Θ :

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$$

Remplaçons cette relation dans l'expression de la vitesse on trouve :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\overrightarrow{u_r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$$

Donc les composantes, radiale et transversale, de la vitesse sont :

$$\begin{cases} V_r = \dfrac{dr}{dt} \\ V_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

III.4.3.4 Vecteur accélération $\vec{\gamma}$

Par définition :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta}\right] = \frac{d^2r}{dt^2}\overrightarrow{u_r} + \frac{dr}{dt}\frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{u_r}}}{\boldsymbol{dt}} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{u_\theta}}}{\boldsymbol{dt}}$$

La dérivée temporelle du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\theta}$ peut-être aussi déterminée par l'intermédiaire de la variable Θ :

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_r}$$

On obtient donc l'expression de l'accélération sous la forme:

$$\vec{\gamma} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\overrightarrow{u_r} + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\overrightarrow{u_\theta}$$

Donc les composantes, radiale et transversale, de l'accélération sont :

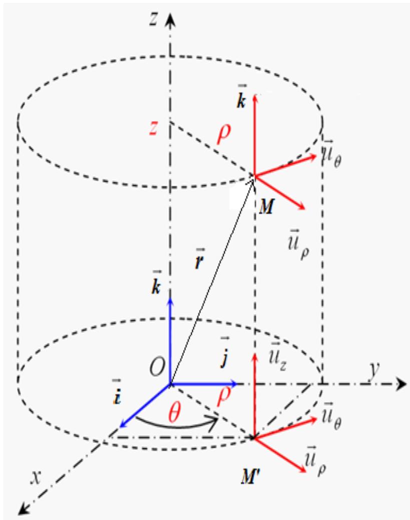
$$\begin{cases} \gamma_r = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ \gamma_\theta = 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

III.4.4 Système de coordonnées cylindriques

Ces coordonnées sont adaptées pour décrire un problème à symétrie axiale d'axe Oz. C'est un repère spatial choisi pour l'étude d'un mouvement spirale ou sur une surface cylindrique.

La définition du repère cylindrique par rapport au repère cartésien est donnée sur la figure ci-contre.

Le mouvement d'un mobile M au système de coordonnées cylindriques est décomposé en deux mouvements.



Un mouvement dans le repère polaire qui est en fait la projection du mouvement de M sur le plan (XOY) et un mouvement de translation selon l'axe OZ.

Les éléments du repère cylindrique sont :

ρ: le module du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ qui représente la projection du vecteur $\overrightarrow{O\mathrm{M}}$ sur le plan (XOY).

Θ : l'angle compris entre l'axe OX et le vecteur $\vec{\rho} = \overrightarrow{OM'}$.

Z : représente la hauteur du point M par rapport au plan (XOY).

Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}\ et\ \vec{k}$ constituants la base du repère cylindrique.

III.4.4.1 Relation avec les coordonnées cartésiennes

Projection des vecteurs unitaires du repère cylindriques $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \vec{k})$ dans le système de coordonnées cartésiennes est exprimée par la relation suivante :

$$\overrightarrow{u_\rho} = \frac{\vec{\rho}}{\rho} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_\rho}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$

Le repère cylindrique est en fait, une extension du repère polaire dans l'espace, est les grandeurs cinématiques définissants le mouvement du point M ($\overrightarrow{O\mathrm{M}}, \vec{V} et\ \vec{\gamma}$) peuvent être exprimé sur la base des expressions précédentes.

La relation entre les éléments du repère cartésien (*x*, *y*, *z*) et celles du polaire (*r*, *Θ*, *z*) sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

La relation entre les éléments du repère polaire (r, Θ) et celles du cartésien (x,y) sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

III.4.4.2 Vecteur position $(\overrightarrow{OM})$

Le vecteur position lient l'origine *O* avec le mobile *M*, est définie par :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k}$$

III.4.4.3 Vecteur vitesse $(\vec{V})$

Par définition :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k}\right] = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Le vecteur vitesse s'écrit donc par : $\vec{V} = V_\rho\overrightarrow{u_\rho} + V_\theta\overrightarrow{u_\theta} + V_z\vec{k}$.

$$\begin{cases} V_\rho = \frac{d\rho}{dt} \\ V_\theta = \rho\frac{d\theta}{dt} \\ V_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

III.4.4.4 Vecteur accélération $\vec{\gamma}$

Le vecteur accélération est définition par la dérivé du vecteur vitesse. L'expression finale de l'accélération dans le système de coordonnées cylindriques est:

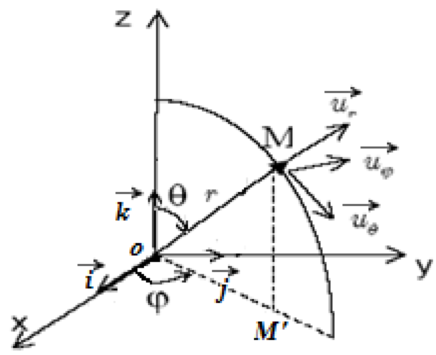
$$\vec{\gamma} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\overrightarrow{u_\rho} + \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\overrightarrow{u_\theta} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Donc les composantes de l'accélération sont :

$$\begin{cases} \gamma_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ \gamma_\theta = 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2} \\ \gamma_z = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

III.4.5 Système de coordonnées sphériques

Ces coordonnées sont adaptées pour décrire un problème à symétrie sphérique, lorsque le problème présente une symétrie sphérique autour d'un point *O* que l'on prend pour origine du repère d'espace. Les éléments du système de coordonnées sphériques sont : *r, Θ et φ* telles que :



$r = \|\overrightarrow{OM}\|$, *Θ angle* $(\overrightarrow{Oz},\overrightarrow{OM})$; *φ= angle*$(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})$.

La base associée à ce système de coordonnées est :

III.4.5.1 Vecteur position $(\overrightarrow{OM})$

La projection du vecteur position dans le repère cartésien peut être exprimé par :

$$\vec{r} = r\left(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\right)$$

Dans le système de coordonnées sphériques, le vecteur position prend la formule :

$$\vec{r} = r\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}$$

III.4.5.2 Relation avec les coordonnées cartésiennes

On passe des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Le passage inverse des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées sphériques est effectué par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arctan\left(\sqrt{x^2+y^2}/z\right) \\ \varphi = arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

III.4.5.3 Vecteurs unitaires du repère sphériques $(\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}},\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}},\overrightarrow{\boldsymbol{u_\varphi}})$

Il est utile de connaitre les expressions des vecteurs unitaires de système de coordonnées sphériques avec celles du repère cartésien. Cela permettra de trouver les dérivées temporelle et spéciales qui rentre dans la formulation du vecteur vitesse et accélération.

A partir du vecteur position, on peut déduire le vecteur unitaire radial : $\overrightarrow{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ *et* $\overrightarrow{u_\theta}$, appartiennes au plan méridien avec, $\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_r}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.

Les trois vecteurs, $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}$ *et* $\overrightarrow{u_\varphi}$, forment un repère orthonormé, donc l'expression du vecteur $\overrightarrow{u_\varphi}$ Peut être déterminé par le produit vectoriel des deux premiers vecteurs : $\overrightarrow{u_\varphi} = \overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta}$, donc :

$$\begin{cases}\overrightarrow{u_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\\ \overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}\\ \overrightarrow{u_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}\end{cases}$$

III.4.5.4 Vecteur vitesse $(\vec{V})$

Par définition :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[r\overrightarrow{u_r}] = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{u_r}}}{\boldsymbol{dt}}$$

Le vecteur unitaire radial $\overrightarrow{u_r}$ dépond de deux variables Θ et φ donc sa dérivée temporelle $d\overrightarrow{u_r}$ est données par :

$$d\overrightarrow{u_r} = \frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\varphi}d\varphi$$

On divise les deux côté de l'équation par dt on trouve :

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

Les dérivées partielles donnent :

$$\frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\theta} = \overrightarrow{u_\theta}\ et\ \frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\varphi} = \sin\theta\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{u_r}}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{u_\varphi}$$

Donc, le vecteur vitesse dans le système de coordonnées sphériques prend la forme :

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{u_\varphi}$$

Le vecteur vitesse s'écrit donc par : $\vec{V} = V_r\overrightarrow{u_r} + V_\theta\overrightarrow{u_\theta} + V_\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$.

$$\begin{cases}V_r = \dfrac{dr}{dt}\\ V_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}\\ V_\varphi = r\sin\theta\dfrac{d\varphi}{dt}\end{cases}$$

III.4.5.5 Vecteur accélération $\vec{\boldsymbol{\gamma}}$

Le vecteur accélération est définition par la dérivé temporelle du vecteur vitesse:

$$\vec{\gamma} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{u_\varphi}\ \right]$$

On est besoin donc des dérivées temporelles des trois vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\ et\ \overrightarrow{u_\varphi}$.

Par la même méthode que $\overrightarrow{u_r}$, la dérivée du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\theta}$ s'exprime par :

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{u_\varphi}$$

Pour la dérivée temporelle du vecteur $\overrightarrow{u_\varphi}$, on utilise encore le produit vectoriel entre les deux autre vecteurs unitaires, $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ pour exprimer la dérivée dans le système de coordonnées sphériques.

$$\frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta})}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} \wedge \overrightarrow{u_\theta} + \overrightarrow{u_r} \wedge \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt} = -\sin\theta \frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{u_r} - \cos\theta \frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$$

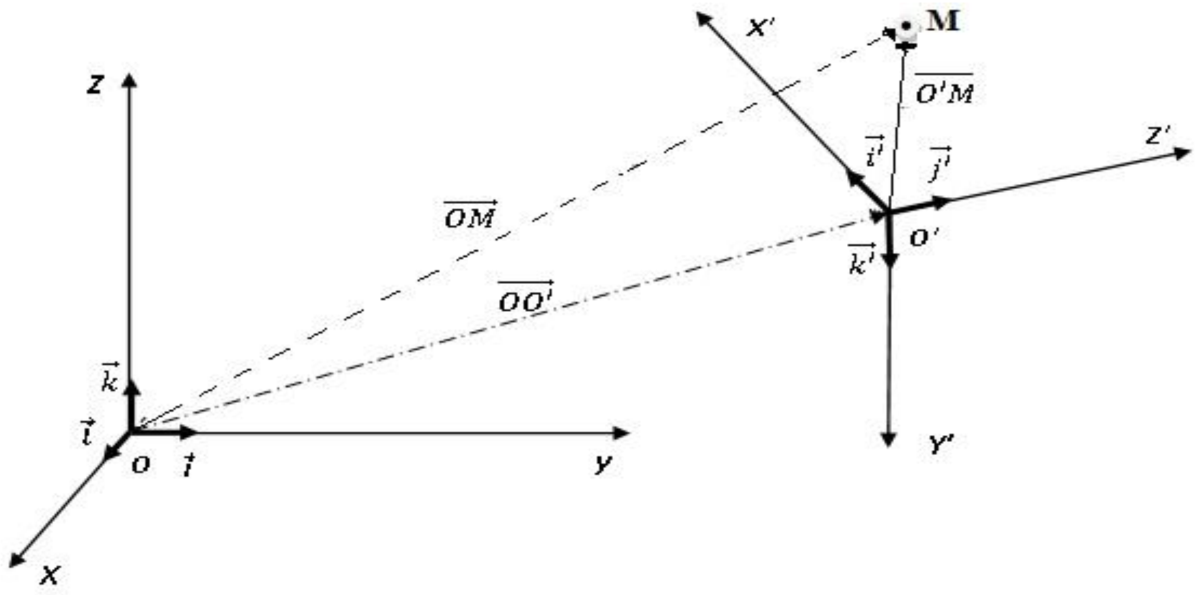
Donc les composantes de l'accélération sont :

$$\begin{cases} \gamma_r = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ \gamma_\theta = 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - r\cos\theta\sin\theta\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ \gamma_\varphi = 2r\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}\sin\theta + r\sin\theta\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} \end{cases}$$

III.5 Mouvement relatif

III.5.1 Définitions

On considère deux repères $R_1(x,y,z)$ fixe (absolue) et $R_2(x',y',z')$ en mouvement (relatif).



Le mouvement du mobile M par rapport au repère fixe R_1 peut être défini par deux méthodes:

1- Projection directe du mouvement du point M dans R_1 : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

2- Projection du mouvement du point M dans R_2 puis dans R_1 : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

Avec, $\overrightarrow{OO'} = x_{O'}\,\vec{i} + y_{O'}\,\vec{j} + z_{O'}\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'}$

III.5.2 Calcul de la vitesse et l'accélération

Le calcul de la vitesse absolue ainsi que l'accélération absolue (par rapport au repère fixe) s'effectue par deux méthodes: Méthode directe (ou dérivée directe) et la méthode de décomposition des vitesses et d'accélérations.

III.5.2.1 Méthode de dérivée directe

La vitesse et l'accélération du mobile par rapport au repère fixe (absolu) R_1 et le repère mobile (relative) R_2 sont exprimés par :

- la vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$: la vitesse du point M par rapport à R_1: $\overrightarrow{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R_1$.

- la vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$: la vitesse du point M par rapport à R_2: $\overrightarrow{V_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/R_2$.

- l'accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}$: l'accélération du point M par rapport à R_1: $\overrightarrow{\gamma_a} = \frac{d\overrightarrow{V_a}}{dt}/R_1$.

- l'accélération relative $\overrightarrow{\gamma_r}$: l'accélération du point M par rapport à R_2: $\overrightarrow{\gamma_r} = \frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}/R_2$.

III.5.2.2 Méthode de décomposition des vitesses et d'accélérations

a) Décomposition des vitesses

La vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$ est calculée par la dérivé du vecteur position, $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ par rapport au repère fixe (absolu) R_1:

$$\overrightarrow{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R_1 = \frac{d\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right)}{dt}/R_1 = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R_1 + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/R_1$$

La dérivée du vecteur $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{r'}$ par rapport à R_1 s'écrit sous la forme:

$$\frac{d\overrightarrow{r'}}{dt}/R_1 = \frac{d(x'\overrightarrow{\imath'} + y'\overrightarrow{\jmath'} + z'\overrightarrow{k'})}{dt} = \frac{dx'}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'} + x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

$$\overrightarrow{V_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{r'}}{dt}/R_2}_{\overrightarrow{V_r}} + \left[x'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right]$$

Le terme entre crochets contient la dérivée des vecteurs unitaires du repère mobile. Donc, pour identifier ce terme en étudie les cas suivants:

1) R_2 en* translation *par rapport à R_1: c-à-d, $\vec{\imath} = \overrightarrow{\imath'}, \vec{\jmath} = \overrightarrow{\jmath'}, \vec{k} = \overrightarrow{k'}$.

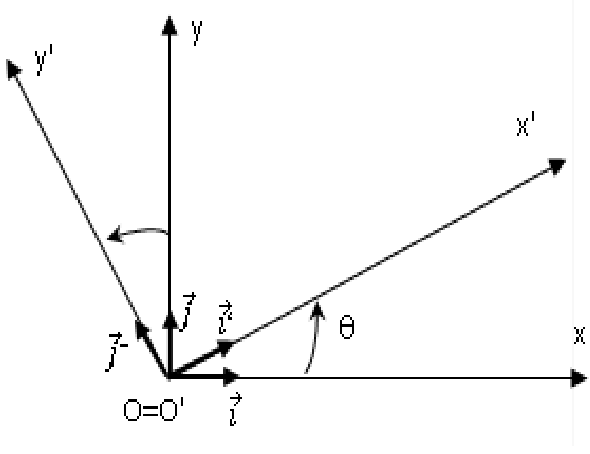
$$\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} = \vec{0}$$

$$donc, \frac{d\overrightarrow{r'}}{dt}/R_1 = \frac{d\overrightarrow{r'}}{dt}/R_2$$

2) ***R_2 en* rotation *par rapport à R_1***

Pour simplifier les calculs, on suppose que R_2 est en rotation par rapport à l'axe OZ du repère R_1 avec une vitesse angulaire constante ω. La vitesse angulaire prend la forme: $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k}$.

Les vecteurs unitaires du repère mobile (R_2) peuvent être donnés en fonction de celle du repère absolue selon les relations suivantes:



$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{j}' = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{\imath'}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \omega\dfrac{d\overrightarrow{\imath'}}{d\theta} \\ \dfrac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{\jmath'}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \omega\dfrac{d\overrightarrow{\jmath'}}{d\theta} \\ \dfrac{d\overrightarrow{k'}}{dt} = \vec{o}, \quad \vec{k}//\overrightarrow{k'} \end{cases}$$

Donc, $\begin{cases} \frac{d\vec{\imath'}}{d\theta} = \vec{\jmath'} \\ \frac{d\vec{\jmath'}}{d\theta} = -\vec{\imath'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{\imath'}}{dt} = \omega\vec{\jmath'} \\ \frac{d\vec{\jmath'}}{dt} = -\omega\vec{\imath'} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\vec{r'}}{dt}/R_1 = \frac{d\vec{r'}}{dt}/R_2 + \omega\left(x'\vec{\jmath'} - y'\vec{\imath'}\right)$

L'expression entre parenthèse peut être déterminée par le produit vectoriel entre le vecteur de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et le vecteur position $\vec{r'}$:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r}\,' = \begin{vmatrix} \vec{i}\,' & \vec{j}\,' & \vec{k}\,' \\ 0 & 0 & \omega \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = -\omega y'\vec{i} + \omega x'\vec{j}\,'$$

$$\frac{d\vec{r'}}{dt}\Big/R_1 = \frac{d\vec{r'}}{dt}\Big/R_2 + \vec{\omega} \wedge \vec{r'} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{d\vec{r'}}{dt}/R_1 = \frac{d\vec{r'}}{dt}/R_2 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

Cette expression traduit la dérivée d'un vecteur qui appartient au repère mobile entre deux repères (fixe et mobile).

$$donc,\ \ \vec{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R_1 = \frac{d\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right)}{dt}/R_1 = \frac{d\vec{r'}}{dt}/R_2 + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R_1 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Le premier terme représente la vitesse relative, $\vec{V_r} = \frac{d\vec{r'}}{dt}/R_2$, et le reste c'est la vitesse d'entrainement qui traduit la vitesse, $\vec{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R_1 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$**.**

Alors, la vitesse absolue par la méthode de décomposition des vitesses s'écrit:

$$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$$

b) Décomposition des accélérations

Par définition, $\vec{\gamma_a} = \frac{d\vec{V_a}}{dt}/R_1 = \frac{d(\vec{V_r}+\vec{V_e})}{dt}/R_1 = \frac{d\vec{V_r}}{dt}/R_1 + \frac{d\vec{V_e}}{dt}/R_1$

$\vec{V_r}$ est un vecteur définie dans le repère R_2, donc sa dérivée par rapport à R_1 prend la forme:

$\frac{d\vec{V_r}}{dt}/R_1 = \frac{d\vec{V_r}}{dt}/R_2 + \vec{\omega} \wedge \vec{V_r} = \vec{\gamma_r} + \vec{\omega} \wedge \vec{V_r}$

$$\frac{d\vec{V_e}}{dt}/R_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R_1 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)/R_1 = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}/R_1 + \frac{d\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}{dt}/R_1$$

$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}/R_1 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/R_1$$

$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}/R_1 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{r'}}{dt}/R_2 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}/R_1 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{V_r} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\frac{d\overrightarrow{V_e}}{dt}/R_1 = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}/R_1 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{V_r} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}/R_2 + 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_r} + \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}/R_1 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

On définit l'accélération relative: $\overrightarrow{\gamma_r} = \frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}/R_2$

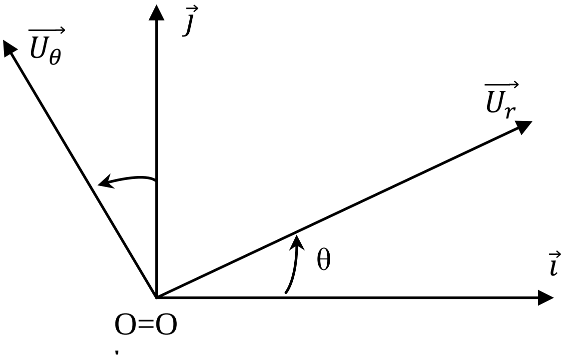
- l'accélération de Coriolis: $\overrightarrow{\gamma_c} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$

- l'accélération d'entrainement: $\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}/R_1 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_c} + \overrightarrow{\gamma_e}$

III.5.3 Application

Etude de mouvement du système de coordonnées polaires $(\overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta})$ par rapport au repère cartésien $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.



$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

$$\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{o'M}}{dt}/R_2 = \frac{d}{dt}\left(r\vec{u}_r\right)/R_2 = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r$$

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{oo'}}{dt}/R_{1=\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{o'M} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k} \wedge r\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{v}_a = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_e$$

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt}/R_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{u}_r\right)/R_2 \Rightarrow \vec{\gamma}_r = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2\frac{d\theta}{dt}\vec{k} \wedge \frac{dr}{dt}\vec{u}_r \Rightarrow \vec{\gamma}_c = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \ldots\ldots(2)$$

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{oo'}}{dt^2}/R_{1=\vec{0}} + \frac{d\omega}{dt} \wedge \overrightarrow{o'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{o'M})$$

$$\frac{d\omega}{dt} \wedge \overrightarrow{o'M} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{k} \wedge r\vec{u}_r = r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{o'M}) = \frac{d\theta}{dt}\vec{k} \wedge \left(\frac{d\theta}{dt}\vec{k} \wedge r\vec{u}_r\right) = \frac{d\theta}{dt}\vec{k} \wedge \left(r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right) = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_e = r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_a = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u}_\theta$$

Chapitre IV :
Dynamique du point matériel

IV.1 Introduction

La dynamique c'est la science qui cherche dans les causes du mouvement et les interactions entre les systèmes étudiés et les forces qui les entourent. La dynamique permet d'expliquer la majorité des mouvements vibratoires, mouvement des charges, mouvement des planètes, mouvement des fluides,…, elle permet aussi de définir les trajectoires des corps et d'autres applications industrielles. Généralement il existe quatre (04) types de forces :

1. forces de gravitation (interaction entre les masses),
2. forces électriques (interaction entre les charges),
3. forces magnétiques (charges mobiles, courantes),
4. forces nucléaires (interaction entre les particules forment les noyaux des atomes).

Toutes ces interactions peuvent être représentées par une grandeur physique appelée, la force $\vec{F}$. Donc, la dynamique c'est l'étude de la relation qui existe entre la force et les autres grandeurs cinématiques. Ces relations sont connues par les lois de NEWTON.

IV.2 Lois de Newton

IV.2.1 Principe d'inertie (1ère loi de NEWTON)

Considérons un objet qui se déplace sur un plan horizontal parfaitement lisse.

a) au repos, le corps est en équilibre sous l'effet simultané de la force de poids et la réaction du plan : $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$.

b) l'objet est en mouvement rectiligne avec une vitesse constante, du fait qu'il n'existe pas de forces de frottement. Les forces de poids et de réaction sont perpendicularités au plan. Donc, la somme des forces exercées est nulle. $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$.

Enoncé de la 1ère loi de Newton «l'objet est au repos s'il est déjà au repos et en mouvement rectiligne avec une vitesse constante s'il est déjà en mouvement».

IV.2.2 Référentiel Galiléen

On peut affecter le mouvement de l'objet précédent soit :

- à un repère externe (Galiléen) ; du faite que la vitesse est constante, l'accélération est nulle et la relation $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$, reste valable.
- A un repère mobile attaché au centre de gravité de l'objet. Lors de son déplacement, la relation $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$ reste valable car l'objet est en équilibre (fixe) dans ce repère.

« Tout repère déplaçant avec une vitesse constante par rapport à un autre repère Galiléen, est considéré aussi Galiléen ».

IV.2.3 Quantité de mouvement

C'est une grandeur physique vectorielle liant deux grandeurs; la masse (m) et la vitesse ($\vec{V}$) par la relation : $\vec{P} = m\vec{V}$. On peut conclure que :

- Tout objet libre sa quantité de mouvement est constante.
- La vitesse ($\vec{V}$) constante, ce si implique que la trajectoire est une ligne droite.
- La variation de la quantité de mouvement, la vitesse ou le rayon de courbure signifie que l'objet est soumis sous l'effet des forces extérieures.

IV.2.4 Principe de la conservation de la quantité de mouvement

On considère une sphère A au repos et une autre sphère B déplaçant avec une vitesse constate V_o. Les deux sphères se coalisent. Et se déplacent dans deux différentes directions avec deux vitesses différentes $\vec{V}_A$ et $\vec{V}_B$. Si on suppose que le système soit isolé, on trouve :

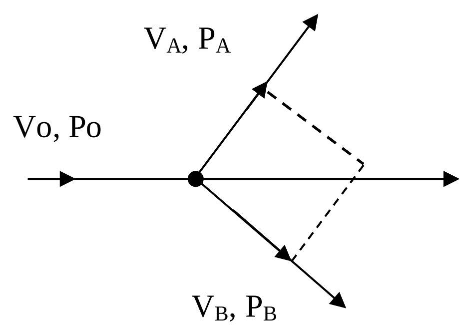
- la quantité de mouvement avant le choc est : $\vec{P}_o = m_B \vec{V}_o$.
- la quantité de mouvement après le choc est : $\vec{P} = m_A \vec{V}_A + m_B \vec{V}_B = \vec{P}_A + \vec{P}_B$.

Appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement avant et après le choc, on trouve : $\vec{P}_o = \vec{P}_A + \vec{P}_B$.

$$\Delta \vec{P}_A = \vec{P}_A - \vec{0}$$

$$\Delta \vec{P}_B = \vec{P}_B - \vec{P}_o = \vec{P}_B - (\vec{P}_A + \vec{P}_B) = -\vec{P}_A$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{P}_A = -\Delta \vec{P}_B$$



« La quantité de mouvement d'un système isolé est conservé (constate)»

IV.3 Principe fondamental de la dynamique (2ème loi de NEWTON)

En réalité, le mouvement d'un corps est toujours associé à des forces de frottements qui engendrent une variation dans sa quantité de mouvement. La variation de la quantité de mouvement d'un corps par rapport au temps est égale à la résultante des forces extérieures appliquées.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{\gamma}$$

IV.4 Principe l'action et de la réaction (3ème loi de NEWTON)

D'après la formule précédente $\Delta \vec{P}_A = -\Delta \vec{P}_B$ et selon le 2ème principe de newton on peut écrire $\frac{d\vec{P}_A}{dt} = -\frac{d\vec{P}_B}{dt}$: ce qui donne $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$

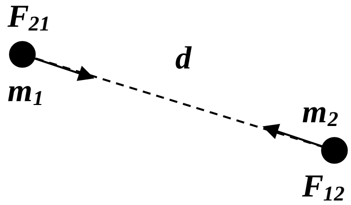
Donc les forces $\vec{F}_A$ *et* $\vec{F}_B$ sont au sens opposés et de même intensité.

IV.5 Quelques lois de forces

IV.5.1 Force de gravitation universelle

C'est une force attractive entre deux masses m_1 et m_2 séparées l'une de l'autre par une distance ***d***.

$$F_{12} = F_{21} = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$



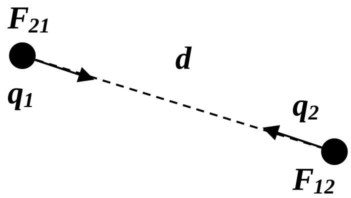
G, la constante de gravitation égale à $6.67.10^{-11}$ [m³/kg s²]

Au voisinage de la terre, la force de gravitation c'est elle qui maintien les objets sur le sol et qui fait couler les rivières et qui aussi qui maintient l'atmosphère terrestre.

IV.5.2 Force électrique

C'est une force qui apparaît entre deux charges q_1 et q_2 séparées l'une de l'autre par une distance **d**.

$$F_{12} = F_{21} = \frac{Kq_1q_2}{d^2}$$



K, la constante électrique égale à 9.10^9 [Nm²/C²]

Cette force est une force d'attraction si les charges sont de signe opposé et de répulsion si elles sont de même signe.

Cette force est responsable à la stabilité des électrons autours des noyaux et c'est elle qui assure la cohésion de la matière solide.

IV.5.3 Force Nucléaire

Les neutrons et les protons dans le noyau sont maintenues ensemble par l'interaction nucléaire qui rond la stabilité de l'atome. Cette interaction est très intense ce qui explique la raison pour laquelle il faut des énergies considérables pour briser les noyaux.

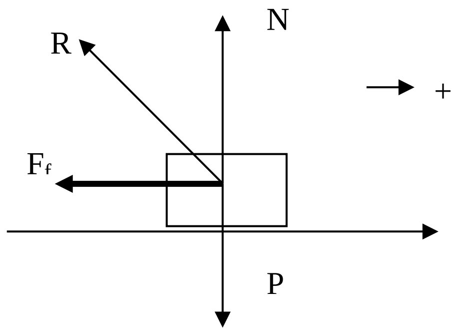
IV.6 Force de frottement

Le mouvement d'un corps sur un plan rigide ou à l'intérieur d'un fluide est toujours associé à une perte d'énergie où quantité de mouvement due à l'interaction entre les particules des deux corps en contact. La résultante de ces forces est appelée les forces de frottement qui sont opposées au sens de mouvement. L'effet retardataire des mouvements se traduit par une force appelée force de frottement.

IV.6.1 Force de frottement sur un plan solide

Théoriquement cette force dépond de plusieurs paramètres tels que la nature des deux corps et la vitesse relative à l'interface. L'expérience montre que dans la plus part des cas cette force est proportionnelle à la composante normale de l'action de contact $\vec{R}$ exercée entre deux corps. La constante de proportionnalité est appelée coefficient de frottement $\boldsymbol{\mu}$.

$$\vec{F}_f = \mu \vec{N}$$



IV*.6.2 Force de frottement dans un fluide*

La force de frottement à l'intérieur d'un fluide dépond de la vitesse du corps et de la viscosité du fluide selon la relation : $\vec{F}_{Af} = -k\mu\vec{V}$

Pour une sphère de rayon R, k=6πR.

La viscosité $\boldsymbol{\mu}$ est une propriété dépendante du fluide :

- Air : $\boldsymbol{\mu}$ =1.81.10^{-4} (Pa.s).
- Eau : $\boldsymbol{\mu}$ =10^{-2} (Pa.s).
- Glycérine : $\boldsymbol{\mu}$ = 0.15 (Pa.s).

IV.7 Le moment cinétique

IV.7.1 Définition

Le moment cinétique d'un corps mobile par rapport au point fixe ***I*** est définie par le produit vectoriel : $\vec{L}_I = \vec{IM} \wedge \vec{P} = \vec{IM} \wedge m\vec{V}$. M appartient à l'axe portant le vecteur $\vec{P}$.

De même, le moment d'une force $\vec{F}$ s'écrit : $\vec{\mathrm{M}}_I = \vec{IM} \wedge \vec{F} = \vec{IM} \wedge m\vec{\gamma}$

IV.7.2 Théorème du moment cinétique

Le dérivé temporel du moment cinétique d'une particule est égal au moment de la résultante des forces appliquées à cette particule.

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} = \frac{d(\vec{IM} \wedge \vec{P})}{dt} = \frac{d(\vec{IM} \wedge m\vec{V})}{dt} = \vec{IM} \wedge \sum \vec{F} \;\Rightarrow \vec{\mathrm{M}}_I = \frac{d\vec{L}_I}{dt}$$

IV.8. Les forces centrales

IV.8.1 Définition

On dit que le mouvement est central (sous l'effet d'une force centrale), si la résultante des force appliquées sur le corps est à chaque instant dirigée vers un point fixe appelé centre des forces ou d'accélérations ($\vec{IM} // \vec{F}$).

Citons la force : de gravité, électrique,…etc.

IV.8.2 Le moment cinétique en présence d'une force centrale

Le moment cinétique $\vec{L}_I$ d'une particule soumise uniquement à une force centrale est constant en module en sens avec une trajectoire est plane.

$$\vec{IM} // \vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_I}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_I = C^t$$

Autrement dit, si le moment cinétique est constant, le mouvement est central.

IV.9 Les équations différentielles

L'équation différentielle de mouvement s'écrit d'après le 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton: $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$, *où* $\vec{F} = m\vec{\gamma}$.

$\vec{F}$, représente la résultante des forces appliquées sur le centre de gravité du corps en mouvement. Choisissons un repère adéquat au mouvement, on passe de la relation vectorielle précédente à un système d'équations différentielles.

IV.9.1 Au système de coordonnées cartésien

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \begin{cases} Fx = m\,x'' \\ Fy = m\,y'' \\ Fz = m\,z'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{11}x'' + A_{12}x' + A_{13}x = B_1 \\ A_{21}y'' + A_{22}y' + A_{23}y = B_2 \\ A_{31}z'' + A_{32}z' + A_{33}z = B_3 \end{cases}$$

IV.9.2 Au système de coordonnées intrinsèque

On remplace les composantes des forces, en suite on utilise la relation entre la vitesse linéaire et angulaire pour arriver au système d'équations suivant :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \begin{cases} F_T = m\dfrac{dV}{dt} \\ F_N = m\dfrac{V^2}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(\theta)d\theta = f_2(V)dV \\ f_1(\theta) + N = m\dfrac{V^2}{R} \end{cases}$$

Les fonctions $f_1$et f_3 dépond de l'angle θ et f_2 dépond de la vitesse *v*. N représente une force normale à la trajectoire.

IV.10 Applications

1°/ Equation différentielle de 1ére degré sans second membre Ay'+By=0

Ay'+By=0 ➔ *y'=dy/dx=-(B/A)y* ➔ *dy/y=-(B/A)dx donc:* $y=C_1e^{-(B/A)x}$

2°/ Equation différentielle de 1ére degré avec second membre Ay'+By=f(x)

La solution de cette équation se compose de deux (02) solutions générales et particulières. $Y=y_G+y_p$
La solution générale y_G consiste à mettre le second membre *f(x)=0*. donc $y_G= C_1e^{-(B/A)x}$.
La solution particulière y_p prend la même forme que celle du second membre f(x). Par exemple *f(x)=x*, ➔ $y_p=ax+b$. On remplace y_p dans l'équation principale et en détermine *a=-1/2* et *b=-1/4* puis on écrit la solution : $y= C_1e^{-(B/A)x}-0.5x-0.25$.

3°/ Equation différentielle de 2éme degré **Ay″+By'+Cy=f(x)**

La résolution de cette équation s'effectue par la même méthode précédente selon la valeur de f(x), $y=y_G+y_p$. Pour la solution générale, *Ay″+By'+Cy=0*, il faut donc calculer le déterminant $\Delta=B^2-4AC$.

Si $\Delta>0$, $r_{1,2} = \dfrac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$ *et* $y_G = C_1e^{r1X} + C_2e^{r2X}$

Si $\Delta=0$, $r_1 = r_2 = \dfrac{-B}{2A}$ *et* $y_G = C_1e^{r1X} + C_2\,xe^{r2X}$

Si $\Delta<0$, $r_{1,2} = \alpha + i\beta$ $\alpha_2 = \dfrac{-B}{2A}$ *et* $\beta = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2A}$ $y_G = C_1e^{\alpha x}\cos(\beta x + C_2)$

4°/ Equation différentielle de 2éme degré de la forme **y″+ω²y=0**

La solution de cette forme prend la forme : $y=A\cos\omega x+B\sin\omega x$.

5°/ Equation différentielle de 2éme degré de la forme **y″-ω²y=0**

La solution de cette forme prend la forme : $y=A\,ch\omega x+B\,sh\omega x$.

Avec, $ch\omega x = \dfrac{e^{\omega x} + e^{-\omega x}}{2}$ et $sh\omega x = \dfrac{e^{\omega x} - e^{-\omega x}}{2}$

Chapitre V:

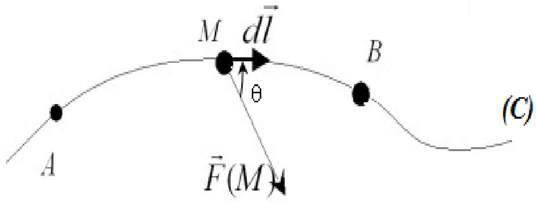
Travail et énergie

V.1 Travail d'une force

Soit la particule M qui se déplace sur la trajectoire (C). Durant son mouvement, elle fait un déplacement curviligne dS liant entre les points A et B durant un intervalle de temps dt.

Le travail élémentaire dW du mobile de A à B est défini par le produit scalaire :

$$dW = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} = F.dl.\cos\theta$$



On constate que le travail considère seulement la force tangentielle à la trajectoire (F_T).

$$dW = F_T.dl$$

Donc, toute force perpendiculaire à la trajectoire ($\vec{F} \perp \overrightarrow{dl}$) son travail est nul comme exemple citons les force de réaction.

V.2. Expression du travail dans différents systèmes de cordonnées

V.2.1 Systèmes de coordonnées cartésiennes

$$\vec{F}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{dl}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$dW = F_x dx + F_y\, dx + F_z dz \;\Rightarrow\; W_A^B = \int_{xA}^{xB} F_x dx + \int_{yA}^{yB} F_y\, dx + \int_{zA}^{zB} F_z dz$$

V.2.2 Systèmes de coordonnées intrinsèques

$$\vec{F}\begin{pmatrix} F_T \\ F_N \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{dl}\begin{pmatrix} dS \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dW = F_T dS = F_T\, Vdt \Rightarrow\; W_A^B = \int_{tA}^{tB} F_T\, Vdt$$

V.2.3 Systèmes de coordonnées polaires

$$\vec{F}\begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{dl}\begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \end{pmatrix}$$

$$dW = F_r dr + F_\theta\, rd\theta \Rightarrow\; W_A^B = \int_{rA}^{rB} F_r dr + \int_{\theta A}^{\theta B} F_\theta\, rd\theta$$

V.2.4 Systèmes de coordonnées cylindriques

$$\vec{F}\begin{pmatrix} F_\rho \\ F_\theta \\ F_z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{dl}\begin{pmatrix} d\rho \\ \rho d\theta \\ dz \end{pmatrix}$$

$$dW = F_\rho d\rho + F_\theta\, \rho d\theta + F_z dz \Rightarrow\; W_A^B = \int_{\rho_A}^{\rho_B} F_\rho d\rho + \int_{\theta A}^{\theta B} F_\theta\, \rho d\theta + \int_{zA}^{zB} F_z dz$$

V.2.5 Systèmes de coordonnées sphériques

$$\vec{F}\begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{dl}\begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ r\sin\theta\, d\varphi \end{pmatrix}$$

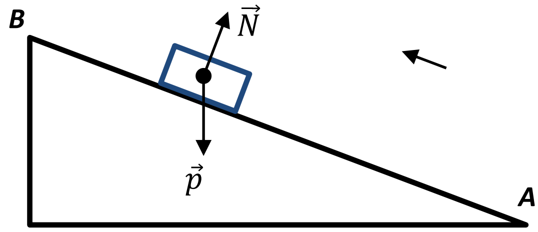
$$dW = F_r dr + F_\theta\, rd\theta + F_\varphi r\sin\theta\, d\varphi \Rightarrow W_A^B = \int_{\rho_A}^{\rho_B} F_r dr + \int_{\theta A}^{\theta B} F_\theta\, rd\theta + \int_{zA}^{zB} F_\varphi r\sin\theta\, d\varphi$$

V.3 Travail d'une force constante

Le travail d'une force constante du point A vers un autre B s'écrit :

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \vec{F}.\left(\vec{l_B} - \vec{l_A}\right) = \vec{F}.\left(\vec{l_B} - \vec{l_A}\right) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

Donc, le travail dépend de la différence entre les deux positions et non pas de la forme de la trajectoire suivie.



Exemple : Travail de la force de pesanteur

$$dW = dW(\vec{p}) = +\, d\underbrace{W(\vec{N})}_{0} = -mg\vec{k}.dh\vec{k} = -mgh$$

$$\Rightarrow W_A^B = -mgH$$

En conclusion, le travail d'une force constante ne dépend pas de la trajectoire.

V.4 Puissance d'une force

La puissance est définie par la dérivée du travail par rapport au temps :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\vec{F}.\vec{dl})}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$$

Doc, la puissance instantanée d'un point matériel M est le produit scalaire de la résultante des forces qui agissent sur M par la vitesse de ce point. Autrement-dit, le travail élémentaire fourni par un point matériel se déplaçant d'une quantité finie *dl*, est donné par :

$$dW = P.dt$$

V.5 Energie cinétique

L'énergie cinétique d'une particule *M* de masse *m* et de vecteur vitesse $\vec{V}$ sous l'effet d'une force est le scalaire E_c défini par: $E_C = \frac{1}{2}mV^2$.

Le travail de la résultante des forces, $dW(\vec{F})$, quand la particule se déplace de la position *A* à la position *B*, est :

$$dW = F_T.dl = m\gamma_T.dl = m\frac{dV}{dt}dl = mVdV$$

$$W_A^B = \int_A^B dW = m\int_A^B VdV \Rightarrow W_A^B = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta E_C = W_A^B}$$

Théorème de l'énergie cinétique

« Le travail de la résultante des forces (conservatives et non conservatives) appliquées sur une particules (*M)* en mouvement, entre deux points A et B, est égale à la variation de son énergie cinétique entre A et B ».

V.6 Energie potentielle

Dans quelques type de forces comme la force de gravitation et force de raideur, on constate que le travail effectué égale à la différence de l'énergie potentielle entre le point de départ A et le point d'arrivée B.

Exemple : force de gravitation

$$W_A^B = -mgH = mg(H_A - H_B) = Ep_A - Ep_B \Rightarrow W_A^B = -\Delta Ep$$

Cette expression traduit le théorème de l'énergie potentielle et valable seulement pour des forces conservatives.

V.7 Énergie mécanique

L'énergie potentielle *Ep* d'un mobile est une énergie traduit l'état du système. Cette énergie peut être transformée en énergie cinétique *Ec* et vice versa. Selon le théorème des énergies cinétique et potentiel.

$$\begin{cases} W_A^B = E_C(B) - E_C(A) \\ W_A^B = E_p(A) - E_p(B) \end{cases}$$

Par l'égalité entre ces deux équations on trouve :

$$E_C(A) + E_p(A) = E_C(B) + E_p(B)$$

Cette expression montre que la quantité $E_C + E_p$ reste constante sur toute la trajectoire. Pour le cas des forces conservatives, cette quantité s'appelle : l'Energie Mécanique : $E_M = E_C + E_p$.

Donc, $E_M(A) = E_M(B)\ ou\ \Delta E_M = 0$.

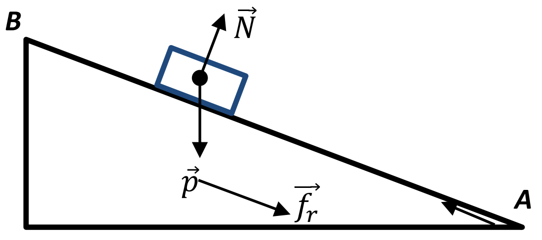
Remarque :

- Cette relation, $\Delta E_M = 0$, est valable seulement pour des forces conservatives.

- pour une force non-conservative (exp. Force de frottement), la variation de l'énergie mécanique égale au travail de cette force.

$$W_A^B = \underbrace{W(\vec{p})}_{mgH} + \underbrace{W(\vec{N})}_{0} + \underbrace{W(\vec{f_r})}_{-f_r.(x_B - x_A)}$$

$$\Rightarrow \Delta E_M = -fr.[AB] = W(\vec{f_r})$$



V.8 Forces conservative

En peut trouver la relation entre la force et l'énergie potentiel par :

$$\int_A^B \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} = Ep_A - Ep_B \Rightarrow \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} = dEp$$

En système de coordonnées cartésiennes, la dérivée de l'énergie potentielle (dE_p), de la force ($\overrightarrow{F}$.) et l'expression de vecteur de déplacement élémentaire ($\overrightarrow{dl}$), s'expriment respectivement par :

$$dEp = \frac{\partial Ep}{\partial x}dx + \frac{\partial Ep}{\partial y}dy + \frac{\partial Ep}{\partial z}dz$$

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} \ \text{ et } \ \overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

Remplaçons ces expressions dans la relation, $\overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} = dEp$, on trouve :

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

Donc, la relation entre la force et l'énergie potentiel s'exprime par :

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right) = -\overrightarrow{grad}E_p$$

Si F est conservative, elle dérive d'une énergie potentielle E_p et elle peut s'écrire: $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$.

$\overrightarrow{grad}$, est un opérateur différentiel vectoriel s'exprime dans les systèmes de coordonnées selon :

- *Dans le système de coordonnées cartésiennes :*

$$\overrightarrow{grad}E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

- *Dans le système de coordonnées polaires :*

$$\overrightarrow{grad}E_p = \frac{\partial E_p}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

- *Dans le système de coordonnées cylindriques :*

$$\overrightarrow{grad}E_p = \frac{\partial E_p}{\partial \rho}\overrightarrow{u_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

- *Dans le système de coordonnées sphériques :*

$$\overrightarrow{grad}E_p = \frac{\partial E_p}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

Remarques :

- Pour qu'une force $\vec{F}$ soit conservative, il faut que : $\overrightarrow{Rot}\vec{F} = -\overrightarrow{Rot}\,\overrightarrow{grad}E_p = \vec{0}$.

- Le travail d'une force conservative sur un chemin fermé est nul : $\oint \vec{F}\overrightarrow{dl} = 0$.

Références bibliographiques

- ZIANI Nossair et BOUTAOUS Ahmed, MECANIQUE DU POINT MATERIEL. COURS et EXERCICES, Université des sciences et technologie d'Oran Mohamed Boudiaf Algerie 2015/2016.
- BENALLEGUE Lamria, DEBIANE Mohamed, GOURARI Azeddine et MAHAMDI Ammar, Physique I Mécanique du point matériel, Edité par la Faculté de Physique USTHB Alger, 2011.
- KHENE, Samir, Mécanique du point matériel; cours et 201 exercices corrigés ; 1ère année LMD, Edition Connaissances Et Savoirs, 2015.
- FIZAZI Ahmed, Mécanique du point Matériel, Rappel de cours et Exercices Corrigés, Office de publication universitaires, Edition N° 5231, 2016.
- FERADJI Boubekri, Initiation à la mécanique du point matériel-cours et séries de travaux dirigés, Office de publication universitaires, Edition N° 5480, 2016.
- Alain Gibaud et Michel Henry, COURS DE PHYSIQUE MÉCANIQUE DU POINT, Edition Dunod, Paris 2017.