جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات والإعلام الآلي **السنة الجامعية : 2023 /2024**

المستوى : أولى رياضيات و إعلام آلي **امتحان في مادة التحليل 1** **المدة: ساعة و نصف**

التمرين الأول (6 نقاط):

1) ليكن b, a عددين ناطقين موجبين تماما حيث $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}^+$. بين أن $\sqrt{a}+\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^+$.

2) لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ محدودة من الأعلى، نعرف المجموعة $-A = \{-x; x \in A\}$.

أثبت أن $\inf(-A) = -\sup A$.

3) أثبت أن $\forall x \in \mathbb{R} : \arctan x + \operatorname{arc\,cotan} x = \frac{\pi}{2}$.

4) أكتب العبارة $L(x) = \sin^3 x \cos^3 x$ على الشكل الخطي. (لاحظ أن $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$).

التمرين الثاني (7 نقاط):

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $I = [2, +\infty[$ بـ $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 2$.

1) أ) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

ب) باستعمال نظرية التزايدات المنتهية أثبت أن: $\forall a, b \in I: |f(b) - f(a)| \leq \frac{3}{4}|b-a|$.

2) لتكن المتتاليتين $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين كما يلي $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}:$

أ) أدرس رتابة المتتاليتين $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ب) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}: |v_{n+1} - u_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|v_n - u_n|$.

ج) أثبت بالتراجع أن $\forall n \in \mathbb{N}: |v_n - u_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

3) بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين.

4) نضع $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \ell$.

أ) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}: |\ell - u_n| \leq |v_n - u_n|$. ب) استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد ℓ.

التمرين الثالث (7 نقاط):

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ e^{x^2} - \cos x, & x \leq 0 \end{cases}$.

1) أدرس استمرار g على $\mathbb{R}$. 2) باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x}$.

3) أدرس قابلية اشتقاق g على $\mathbb{R}$. 4) أكتب عبارة $g'(x)$ بدلالة x.

5) هل g من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$؟ برر إجابتك.

6) باستعمال قاعدة لوبيتال أحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} [g(x) - x]$ ، ماذا تستنتج؟

بالتوفيق.

جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

السنة الجامعية : 2023/ 2024

المستوى : أولى رياضيات و إعلام آلي

الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط لامتحان مادة التحليل 1

التمرين الأول (6 نقاط):

1) نفرض أن $\sqrt{a}+\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}^+$ و منه

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}^+\Longrightarrow\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\in\mathbb{Q}^+\Longrightarrow a+b+2\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}^+\Longrightarrow 2\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}^+\Longrightarrow\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}^+ .$$ (1)

و هذا يناقض الفرضية.

2) بما أن A محدودة من الأعلى فهي تقبل حدا أعلى نرمز له بـ M لدينا

(0.5) $$\sup A=M\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in A: x\le M\\ \forall\varepsilon>0,\exists a\in A: M-\varepsilon<a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in A: -x\ge -M\\ \forall\varepsilon>0,\exists a\in A: -M+\varepsilon>-a\end{cases}$$

(2×0.5) $$\begin{cases}\forall -x\in -A: -x\ge -M\\ \forall\varepsilon>0,\exists -a\in -A: -M+\varepsilon>-a\end{cases}\Leftrightarrow\inf(-A)=-M\Leftrightarrow\inf(-A)=-\sup A$$

3) نضع $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=\operatorname{arc\,tan} x+\operatorname{arc\,cotan} x$ لدينا $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{-1}{x^2+1}=0$ و منه (0.5)

(2×0.5) $$\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=f(0)=\operatorname{arc\,tan} 0+\operatorname{arc\,cotan} 0=\frac{\pi}{2}$$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}: \operatorname{arc\,tan} x+\operatorname{arc\,cotan} x=\frac{\pi}{2}$.

4) بوضع $\mathrm{z}=\cos 2x+i\sin 2x$ فإن $\frac{1}{\mathrm{z}}=\cos 2x-i\sin 2x$ ومنه

(0.5) $\sin 2x=\frac{1}{2i}\left(\mathrm{z}-\frac{1}{\mathrm{z}}\right)$ و $\forall k\in\mathbb{Z}: \sin k2x=\frac{1}{2i}\left(\mathrm{z}^k-\frac{1}{\mathrm{z}^k}\right)$ و منه

(0.5) $$L(x)=\sin^3 x\cos^3 x=(\sin x\cos x)^3=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^3=\frac{1}{8}\sin^3 2x=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2i}\left(\mathrm{z}-\frac{1}{\mathrm{z}}\right)\right]^3$$

(2×0.5) $$=-\frac{1}{64i}\left[\left(\mathrm{z}^3-\frac{1}{\mathrm{z}^3}\right)+3\left(\mathrm{z}-\frac{1}{\mathrm{z}}\right)\right]=-\frac{1}{64i}\left[(2i\sin 6x)-3(2i\sin 2x)\right]$$

إذن $L(x)=\frac{3}{32}\sin 2x-\frac{1}{32}\sin 6x$.

التمرين الثاني (7 نقاط):

$f(x)=\ln x-\frac{1}{x}+2$.

1) أ) $\forall x\in I: f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال I. (0.5)

ب) الدالة f مستمرة و قابلة للاشتقاق على المجال I بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على المجال $[a,b]$ (أو $[b,a]$)

نحصل على $|f(b)-f(a)|\le f'(c)|b-a|$ حيث $a<c<b$ أو $b<c<a$ و بما أن $a,b\in I$ فإن $c>2$. (0.5)

لدينا

(0.5) $$c>2\Longrightarrow c^2>4\Longrightarrow\frac{1}{c}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Longrightarrow f'(c)<\frac{3}{4}$$

ومنه $\forall a,b\in I: |f(b)-f(a)|\le \frac{3}{4}|b-a|$ (0.5)

2)

أ) لدينا $2=u_0<u_1=2.1931$ و f متزايدة تماما ومنه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما. (0.5)

$3=v_0>v_1=2.7653$ و f متزايدة تماما ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماما. (0.5)

ب) بوضع $a=u_n$ و $b=v_n$ في العلاقة السابقة نحصل على $|f(v_n)-f(u_n)|\le \frac{3}{4}|v_n-u_n|$ ومنه

$\forall n\in\mathbb{N}: |v_{n+1}-u_{n+1}|\le \frac{3}{4}|v_n-u_n|$. (0.5)

ج) $1\le 1 \Leftrightarrow |v_0-u_0|\le\left(\frac{3}{4}\right)^0$ (محققة)

نفرض $\forall n\in\mathbb{N}: |v_n-u_n|\le\left(\frac{3}{4}\right)^n$. (1)

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}: |v_{n+1}-u_{n+1}|\le \frac{3}{4}|v_n-u_n|\le\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.

3) لدينا $\forall n\in\mathbb{N}: 0\le|v_n-u_n|\le\left(\frac{3}{4}\right)^n$. و $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n-u_n)=0$ (0.5)

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين.

4).أ) بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين فإن $\ell=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(v_n)$ أي أن $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\le\ell\le v_n$ (0.5)

و منه $\forall n\in\mathbb{N}: 0\le \ell-u_n\le v_n-u_n$ أي أن $\forall n\in\mathbb{N}: |\ell-u_n|\le |v_n-u_n|$. (0.5)

ب) بحساب القيم المتتابعة لـ $|v_n-u_n|$ نحصل على $|v_8-u_8|=0.00\,9\,5312<0.01$ إذن يمكن اعتبار u_8 قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد ℓ حيث $u_8=2.5301$. (2×0.5)

التمرين الثالث (7 نقاط):

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ e^{x^2}-\cos x, & x\le 0\end{cases}$.

1) g مستمر في كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ و لدينا (0.25)

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x^2}-\cos x\right)=0=g(0)$. إذن g مستمرة عند 0 من اليسار. (0.5)

لدينا أيضا $\forall x>0: 0\le x^2\sin\frac{1}{x}\le x^2$ و منه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=0=g(0)$. إذن g مستمرة عند 0 من اليمين. (0.5)

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^{x^2}-\cos x\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}+\sin x}{1}=0$. (1)

3) g تقبل الاشتقاق في كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ و لدينا (0.25)

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-\cos x}{x}\right)=0$. (0.5)

لدينا من جهة أخرى $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$. $\forall x>0: 0\le x\sin\frac{1}{x}\le x$ و منه فإن

$\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} \left(x \sin\frac{1}{x}\right) = 0$ أي أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$. (0.5)

إذن g تقبل الاشتقاق عند 0 حيث $g'(0) = 0$.

4) عبارة $g'(x)$ بدلالة x.

$$g'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & ,x > 0 \\ 0 & ,x = 0 \\ 2xe^{x^2} + \sin x & ,x < 0 \end{cases}$$

أو اختصارا

$$g'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & ,x > 0 \\ 2xe^{x^2} + \sin x & ,x \leq 0 \end{cases}$$ (1)

5) g ليست من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$ لأن g'. ليست مستمرة عند 0 من اليمين وذلك لأن (0.5)

المتتاليتين (x_n) و (x'_n) حيث $x'_n = \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{3}}$ و $\forall n \in \mathbb{N}: x_n = \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ متقاربتين نحو 0.

لكن $\lim\limits_{n\to\infty} g'(x'_n) = -\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{n\to\infty} g'(x_n) = 0$ أي أن g' لا تقبل نهاية عند 0 من اليمين. (0.5)

6) ح ع ت

$$\lim_{x\to+\infty} [g(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\sin\frac{1}{x} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\right] = \frac{0}{0}$$

ح ع ت

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-\cos\frac{1}{x}+1}{-\frac{2}{x}}\right] = \frac{0}{0}$$ (0.5)

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(-\cos\frac{1}{x}+1\right)'}{\left(-\frac{2}{x}\right)'}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin\frac{1}{x}}{2}\right] = 0$$ (0.5)

نستنتج أن بيان الدالة g يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$. (0.5)