Exercice 02 : 4,5 pt

$P_3(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$ 0,5 pt

$L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \dfrac{(x-0,5)(x-1)(x-2)}{(0-0,5)(0-1)(0-2)}$ 0,5

$L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{0,5(0,5-1)(0,5-2)} = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{\frac{3}{8}}$ 0,5

$L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \dfrac{x(x-0,5)(x-2)}{(1-0)(1-0,5)(1-2)} = \dfrac{x(x-0,5)(x-2)}{-\frac{1}{2}}$ 0,5

$L_3(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \dfrac{x(x-0,5)(x-1)}{(2-0)(2-0,5)(2-1)} = \dfrac{x(x-0,5)(x-1)}{3}$ 0,5

$P_3(x) = 0 \times \dfrac{(x-0,5)(x-1)(x-2)}{-1} + y\,\dfrac{8}{3}\,x(x-1)(x-2) + 3(-2)\,x(x-0,5)(x$

$+\ 2.\dfrac{1}{3}x(x-0,5)(x-1)$ 0,5

$= \left(\dfrac{8y-16}{3}\right)x^3 + (-8y+14)\,x^2 + \left(\dfrac{16y-17}{3}\right)x$ 0,5

2) Si le coefficient de x^3 est 6 alors

0,5 $\dfrac{8y-16}{3} = 6 \Rightarrow y = \dfrac{17}{4}$ 0,5

Exercice 03 : 4 pt

$g^{(1)}(h) = \dfrac{4\,g\left(\frac{h}{2}\right) - g(h)}{4-1}$

On a $g(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ 0,5

$h = 0,1$ 0,5

$g(h) = \dfrac{f(1,7+0,1) - f(1,7-0,1)}{2 \times 0,1} = \dfrac{f(1,8) - f(1,6)}{0,2}$

$= 2,833031$ 0,5

$$g\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})}{2\cdot\frac{h}{2}} = \frac{f(1,7+0,05) - f(1,7-0,05)}{0,1} \quad (0,5)$$

$$= \frac{f(1,75) - f(1,65)}{0,1} = 2,82949 \quad (0,5)$$

$$f'(1,7) = g^{(1)}(h) = \frac{4\times 2,82949 - 2,83303}{3} = 2,828315 \quad (0,5)$$

la valeur exacte est $f'(x) = (sh\,x)' = (ch\,x)$

$$f'(1,7) = 2,82315 \quad (0,5)$$

$$l'erreur = |2,82315 - 2,828315| = 0,0000005 \quad (0,5)$$

Exercice 04: (6pt)

(a) méthode des trapèzes:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2,4-0}{6} = 0,4 \quad (0,5)$$

alors

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4

(0,5)

la formule des trapèzes composite est:

$$I_T = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) \quad (0,5)$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_6) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5\right.$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(0) + f(2,4) + 2(f(0,4) + f(0,8) + f(1,2) + f(1,6) + f(2)\right)$$

(0,5)

$$= \frac{0,4}{2}(0 + 0,71 + 2(0,69 + 0,98 + 0,98 + 0,9 + 0,8) \quad (0,5)$$

$$= 1,88110 \quad (0,5)$$

(0,5)

b)

$$I_S = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_6) + 2(f(x_2) + f(x_4)) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5\right.$$

$$= \frac{0,4}{3}\left(0 + 0,71 + 2(0,98 + 0,9) + 4(0,69 + 0,98 + 0,81)\right)$$

(0,5)

$= 1,91361$ (0,5)

$|I_{ex} - I_T| = |\ln \frac{169}{25} - 1,88110| = 0,029$ (0,5)

$|I_{ex} - I_S| = |\ln \frac{169}{25} - 1,91361| = 0,0025$ (0,5)

la valeur approchée par la méthode de Simpson est plus précise la valeur obtenue par la méthode des Trapèzes, car la méthode de simpson est d'ordre 4 par contre la méthode des trapèzes est d'ordre 2. (0,5)

Exercice 01: (5,5 pt) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, $\alpha = 3$ (0,5)

1) (i) $f'(x) = 2x - 6 \neq 0 \quad \forall x \neq 3$. (0,5)

(ii) $f''(x) = 2 > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ (0,5)

(iii) $\alpha \in]2,5, 3,5[=]a, b[$. (0,5)

(iv) $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| = \left|\frac{0,25}{-1}\right| = 0,25 < b-a = 1$ et $\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| = \left|\frac{0,25}{1}\right| = 0,25 < b-a = 1$ (0,5)

2) méthode de newton simple: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (0,5)

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 3,5$ (0,25)

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3,5 - \frac{f(3,5)}{f'(3,5)} = 3,25$ (0,25)

$x_3 = 3,125$ (0,25) $\quad x_4 = 3,0625$ (0,25)

3) méthode de Newton modifié: $x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ (0,5)

$m = 2$ car la racine est double.

$x_1 = x_0 - 2\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - 2\frac{f(4)}{f'(4)} = 3 = \alpha$ (0,5)

4) programme en matlab (1,5)