Université L'arbi Ben Mhidi OEB
Département de séances de la matière
Module : Mécanique Quantique (S5)
Année universitaire 2023/2024

Durée : 1h30

Questions

1. **Moment cinétique orbital : Représentation matricielle**
   On considère un système quantique sans spin de moment cinétique orbital $\overrightarrow{L}$ une base de l'espace des états de ce système est constituée par les états propres communs à L^2 et L_z est notée $\mid l, m\rangle$.
   (a) Calculer les commutateurs $[L^2, L\pm]$ ainsi que $[L_z, L\pm]$. **(2pts)**
   (b) On suppose maintenant que :
   la particule a pour moment cinétique orbital $l = 1$; **(2,5pts)**
   Calculer dans la base $\mid l, m\rangle$, les éléments de matrices des opérateurs L^2 et L_z.
   (c) Déduire les valeurs propres et les vecteurs propres des opérateursL^2 et L_z.Justifier. **(2pts)**

2. **Addition de deux moments cinétiques**
   On considère deux moment angulaire orbitaux $\overrightarrow{L_1}$ et $\overrightarrow{L_2}$ tels que $l_1 = 1$ et $l_2 = 2$.
   (a) Donner les valeurs possibles de projections de l_1 et l_2 sur l'axe de quantifications (m_1 et m_2). **(2pts)**
   (b) Donner les valeurs possibles du moment cinétique total $\overrightarrow{L}$ issue du couplage de $\overrightarrow{L_1}$ et $\overrightarrow{L_2}$. **(2pts)**
   (c) On considère l'état $\mid l, m\rangle = \mid 3, 3\rangle$;
   Appliquer à cette état les deux opérateurs L_- et L_+ en utilisant la base couplé $\mid L, M\rangle$ et la base découplée $\mid l_1, m_1\rangle \bigotimes \mid l_2, m_2\rangle$. **(2.5pts)**

3. **Moment cinétique orbital : Représentation matricielle**
   (a) Ecrire l'équation de Schrödinger pour un potentiel de symétrie sphérique. **(2pts)**
   (b) Justifier que pour un potentiel central à symétrie sphérique la fonction d'onde s'écrit :$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_l^m(\theta, \varphi)$. **(2,5pts)**
   (c) Ecrire l'équation radiale décrivant une particule dans un potentiel $V(r)$. **(2pts)**
   (d) Une particule de masse m est liée par le potentiel sphérique suivant :
   $$\begin{cases} \infty & 0 < r < a \quad ...(i) \\ 0 & a < r < b \quad ...(ii) \\ V_0 & r > b \quad ...(iii) \end{cases}$$
   Ecrire l'équation radiale décrivant les états liées de cette particule dans les différents régions de l'espace ((ii) , (iii)). **(2pts)**

(e) Montrer que cette équation se transforme en une équation de Bessel en faisant les changement de variables $\rho = kr$ dans la région $a < r < b$ et $\rho = i\lambda r$ dans la région $r > b$avec $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ et $\lambda^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$. **(2pts)**

Indications :
On donne : $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{sin\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\widehat{L}^2}{\hbar^2 r^2}$
L'équation de Bessel : $\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)\right] R_l(r) = 0$

Bonne Chance