Université L'arbi Ben Mhidi OEB
Département de séances de la matière
Module : Mécanique Quantique (S5)
Année universitaire 2023/2024

Durée : 1h30

Réponses

1. **Moment cinétique orbital : Représentation matricielle**
On considère un système quantique sans spin de moment cinétique orbital $\overrightarrow{L}$ une base de l'espace des états de ce système est constituée par les états propres communs à L^2 et L_z est notée $\mid l, m\rangle$.

(a)

$$\begin{aligned}\left[L^2, L\pm\right] &= \left[L^2, L_x \pm iL_y\right] \\ &= \left[L^2, L_x\right] \pm i\left[L^2, L_y\right] = 0\end{aligned} \qquad \text{(2 x 0,5pts)}$$

$$\begin{aligned}\left[L_z, L\pm\right] &= \left[L_z, L_x\right] \pm i\left[L_z, L_y\right] \\ &= i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) \\ &= i\hbar(L_y \mp iL_x) = -i\hbar(L_x \pm iL_y) \\ &= -i\hbar L\pm\end{aligned} \qquad \text{(2 x 0,5pts)}$$

(b) $l = 1$;
$-l \leq m \leq l \ \Rightarrow m = \{-1, 0, 1\}$ (2 x 0,5pts)
Vecteurs de base : $\{\mid l, m >\} = \{\mid 1, 1 >, \mid 1, 0 >, \mid 1, -1 >\}$

$$\begin{cases} L^2 \mid l, m > = \hbar^2 \ l(l+1) \mid l, m > \\ L_z \mid l, m > = \hbar \ m \ \ \mid l, m > \end{cases}$$

La dimension des matrice : $2l + 1 = (2(1) + 1) = 3 \Rightarrow (3x3)$ (0,5pts)

$$L^2 \quad \begin{array}{c|ccc} & \mid 1,-1\rangle & \mid 1,0\rangle & \mid 1,1\rangle \\ \hline \mid 1,-1\rangle & \hbar^2 & 0 & 0 \\ \mid 1,0\rangle & 0 & \hbar^2 & 0 \\ \mid 1,1\rangle & 0 & 0 & \hbar^2 \end{array}$$

$< l', m' \mid L^2 \mid l, m >= \hbar^2 \ l(l+1)\delta_{ll'} \ \delta_{mm'}$

$$L^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de meme pour L_z: (0,5pts)
$< l', m' \mid L_z \mid l, m >= m \, \hbar \, \delta_{ll'} \ \delta_{mm'}$

$$L_z = \hbar \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Les valeurs propres de L^2 sont $\lambda = \{2\hbar^2, 2\hbar^2, 2\hbar^2\}$, de L_z sont $\lambda = \{-\hbar^2, 0, \hbar\}$. (2 x 0,5pts)

Justification:
Les matrice sont diagonals donc les valeurs propres sont les éléments de la diagonale. (0,5pts)
Les vecteurs propres sont les vecteurs de la base $\{| 1,1 >, | 1,0 >, | 1,-1 >\}$ pour les deux opérateurs. (0,5pts)

$$\begin{cases} L^2 \mid 1,-1\rangle & = 2\hbar^2 \mid 1,-1\rangle \\ L^2 \mid 1,0\rangle & = 2\hbar^2 \mid 1,0\rangle \\ L^2 \mid 1,1\rangle & = 2\hbar^2 \mid 1,1\rangle \end{cases} \quad \begin{cases} L_z \mid 1,-1\rangle & = -\hbar \mid 1,-1\rangle \\ L_z \mid 1,0\rangle & = 0 \\ L_z \mid 1,1\rangle & = -\hbar \mid 1,1\rangle \end{cases}$$

2. **Addition de deux moments cinétiques**
On considère deux moment angulaire orbitaux $\overrightarrow{L_1}$ et $\overrightarrow{L_2}$ tels que $l_1 = 1$ et $l_2 = 2$.

(a) $l_1 = 1 \Rightarrow m_1 = -1, 0, 1$ (1pts)
$l_2 = 2 \Rightarrow m_2 = -2, -1, 0, 1, 2$ (1pts)

(b) $| L_1 - L_2 | \leq L_1 + L_2 \Rightarrow 1 \leq L \leq 3 \Rightarrow L = \{1, 2, 3\}$

$$L = \begin{cases} 1 \rightarrow m_L = -1, 0, 1 \\ 2 \rightarrow m_L = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 3 \rightarrow m_L = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$ (3 x 0,5pts)

(c) $L_+ \mid 3,3 >= \hbar\sqrt{3(3+1) - 3(3+1)} \mid 3,4 >= 0.$ (0,5pts)
$L_+ \mid L, M >= \hbar\sqrt{L(L+1) - M(M+1)} \mid L, M+1 >$
$L_+ \mid 3,3 >= 0$ (0,5pts)
$\mid 3,3 >=\mid 1,1 > \bigotimes \mid 2,2 >$
$L_+ \mid 3,3 >=\mid (L_{+1} \ + \ L_{+2}) \mid 1,1 > \bigotimes \mid 2,2 >$

$$\begin{cases} L_{+1} \mid 1,1 >= \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1+1)} \ \mid 1,0 > \\ L_{+2} \mid 2,2 >= 0 \Rightarrow (L_{+1} + L_{+2}) \mid 1,1 > \bigotimes \mid 2,2 >= 0 \end{cases}$$ (0,5pts)

$L_- \mid 3,3 >= \hbar\sqrt{3(3+1) - 3(3-1)} \mid 3,2 >= \hbar \mid 3,2 >$ (2 x 0,5pts)
$(L_{-1} + L_{-2}) \mid 1,1 > \bigotimes \mid 2,2 >= \hbar\sqrt{}(\mid 1,0 > \bigotimes \mid 2,2 >) + \hbar\sqrt{}(\mid 1,1 > \bigotimes \mid 2,1 >)$ (0,5pts)

3. **Moment cinétique orbital : Représentation matricielle**

(a) L'équation de Schrödinger pour un potentiel de symétrie sphérique:
$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\widehat{L}^2}{2mr^2} + V(r)\right] \Psi(r,\theta,\varphi) = E\Psi(r,\theta,\varphi)$ (1pts)

(b) Justifier que pour un potentiel central à symétrie sphérique la fonction d'onde s'écrit :$\Psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$.
L'hamiltonien de l'équation (1) peut s'écrire :
$H = H_r + H_{\theta,\varphi}$ avec $H_r = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,r + V(r)$ (1pts)
$H_{\theta,\varphi} = \frac{L^2}{2m\,r^2}$ donc on peut factoriser la fonction d'onde $\Psi(r,\theta,\varphi) = R_l(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$

(c) L'équation radiale décrivant une particule dans un potentiel $V(r)$: (1pts)

$$\frac{d^2R(r)}{d\,r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{dR(r)}{d\,r} + \left\{\frac{2m\,E}{\hbar^2} - \frac{2m}{\hbar^2}V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\}R(r) = 0 \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) = \frac{1}{r^2}(2r\,\frac{\partial}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}) = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ L^2Y_l^m(\theta,\varphi) = \hbar^2\,l(l+1)\,Y_l^m(\theta,\varphi) \end{cases}$$

(d) Dans la région: $0 < r < b$ (1pts)

$$(2) \Rightarrow \frac{d^2R(r)}{d\,r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{dR(r)}{d\,r} + \left\{\frac{2m\,E}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\}R(r) = 0 \qquad (3)$$

Dans la région: $r > b$ (1pts)

$$(2) \Rightarrow \frac{d^2R(r)}{d\,r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{dR(r)}{d\,r} + \left\{\frac{2m\,(E-V_0)}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\}R(r) = 0 \qquad (4)$$

(e) dans la région $a < r < b$ et $\rho = kr$, $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$
Pour l'équation (3) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} &= \frac{d\rho}{dr}\frac{d}{d\rho} \\ &= k\,\frac{d}{d\rho} \\ \frac{d^2}{dr^2} &= k^2\,\frac{d^2}{d\rho^2} \end{aligned}$$

(0,5pts)

On remplace dans (3):

$$k^2\,\frac{d^2R(\rho)}{d\,\rho^2} + \frac{2}{\rho}\,k^2\,\frac{dR(\rho)}{d\,\rho} + \left\{k^2 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\,k^2\right\}R(\rho) = 0$$

(0,5pts)

$$\div\,k^2 \Rightarrow \frac{d^2R(\rho)}{d\,\rho^2} + \frac{2}{\rho}\,\frac{d\,R(\rho)}{d\,\rho} + \left\{1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right\}R(\rho) = 0$$

Dans la région $r > b$
Pour l'équation (4) :

$$
\begin{aligned}
\rho = i\lambda r \Rightarrow \frac{d}{d\,r} \\
= i\lambda\ \frac{d}{d\,\rho}\ et \frac{d^2}{d\,\rho^2} \\
= -\lambda \frac{d^2}{d\,\rho^2}
\end{aligned}
$$

(0,5pts)

$$
(4) \Rightarrow\ -\lambda^2 \frac{d^2}{d\,\rho^2} + \frac{2\,i\lambda}{\rho}\,(i\lambda)\,\frac{d}{d\,\rho} + \left\{-\lambda^2 + \lambda^2 \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right\} R(\rho) = 0
$$

(0,5pts)

$$
\div - \lambda^2 \Rightarrow\ \frac{d^2}{d\,\rho^2} + \frac{2}{\rho}\,\frac{d\,R(\rho)}{d\,\rho} + \left\{1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right\} R(\rho) = 0
$$