جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات والإعلام الآلي **السنة الجامعية : 2023/ 2024**

المستوى : أولى رياضيات و إعلام آلي **الإجابة النموذجية مع سلم التنقيط لامتحان مادة التحليل 1**

<u>التمرين الأول (6 نقاط):</u>

1) نفرض أن $\sqrt{a}+\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}^+$ و منه

(1) $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}^+\Longrightarrow\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\in\mathbb{Q}^+\Longrightarrow a+b+2\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}^+\Longrightarrow 2\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}^+\Longrightarrow\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}^+$.

و هذا يناقض الفرضية.

2) بما أن A محدودة من الأعلى فهي تقبل حدا أعلى نرمز له بـ M لدينا

(0.5) $$\sup A=M\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in A: x\le M\\ \forall\varepsilon>0,\exists a\in A: M-\varepsilon<a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in A: -x\ge -M\\ \forall\varepsilon>0,\exists a\in A: -M+\varepsilon>-a\end{cases}$$

(0.5+0.5) $$\begin{cases}\forall -x\in -A: -x\ge -M\\ \forall\varepsilon>0,\exists -a\in -A: -M+\varepsilon>-a\end{cases}\Leftrightarrow\inf(-A)=-M\Leftrightarrow\inf(-A)=-\sup A$$

3) نضع $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=\operatorname{arc\,tan}x+\operatorname{arc\,cotan}x$ لدينا $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{-1}{x^2+1}=0$ و منه (0.5)

(0.5+0.5) $$\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=f(0)=\operatorname{arc\,tan}0+\operatorname{arc\,cotan}0=\frac{\pi}{2}$$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}: \operatorname{arc\,tan}x+\operatorname{arc\,cotan}x=\frac{\pi}{2}$.

4) بوضع $\mathrm{z}=\cos 2x+i\sin 2x$ فإن $\frac{1}{\mathrm{z}}=\cos 2x-i\sin 2x$ ومنه

(0.5) $\sin 2x=\frac{1}{2i}\left(\mathrm{z}-\frac{1}{\mathrm{z}}\right)$ و $\forall k\in\mathbb{Z}: \sin k2x=\frac{1}{2i}\left(\mathrm{z}^k-\frac{1}{\mathrm{z}^k}\right)$ و منه

(0.5) $$L(x)=\sin^3x\cos^3x=(\sin x\cos x)^3=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^3=\frac{1}{8}\sin^3 2x=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2i}\left(\mathrm{z}-\frac{1}{\mathrm{z}}\right)\right]^3$$

(0.5+0.5) $$=-\frac{1}{64i}\left[\left(\mathrm{z}^3-\frac{1}{\mathrm{z}^3}\right)+3\left(\mathrm{z}-\frac{1}{\mathrm{z}}\right)\right]=-\frac{1}{64i}\left[(2i\sin 6x)-3(2i\sin 2x)\right]$$

إذن $L(x)=\frac{3}{32}\sin 2x-\frac{1}{32}\sin 6x$.

<u>التمرين الثاني (7 نقاط):</u>

$f(x)=\ln x-\frac{1}{x}+2$.

1) أ) $\forall x\in I: f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال I. (0.5)

ب) الدالة f مستمرة و قابلة للاشتقاق على المجال I بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على المجال $[a,b]$ (أو $[b,a]$)

نحصل على $|f(b)-f(a)| \leq f'(c)|b-a|$ حيث $a<c<b$ أو $b<c<a$ و بما أن $a,b \in I$ فإن $c>2$. (0.5)

لدينا

$$c>2 \Longrightarrow c^2>4 \Longrightarrow \frac{1}{c}+\frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Longrightarrow f'(c)<\frac{3}{4}$$ (0.5)

ومنه $\forall a,b \in I: |f(b)-f(a)| \leq \frac{3}{4}|b-a|$ (0.5)

2)

(0.5)

أ) لدينا $2=u_0<u_1=2.1931$ و f متزايدة تماما ومنه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما.

(0.5)

$3=v_0>v_1=2.7653$ و f متزايدة تماما ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماما.

ب) بوضع $a=u_n$ و $b=v_n$ في العلاقة السابقة نحصل على $|f(v_n)-f(u_n)| \leq \frac{3}{4}|v_n-u_n|$ ومنه

$\forall n \in \mathbb{N}: |v_{n+1}-u_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|v_n-u_n|$. (0.5)

ج) $1 \leq 1 \Leftrightarrow |v_0-u_0| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0$ (محققة)

(1)

نفرض $\forall n \in \mathbb{N}: |v_n-u_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}: |v_{n+1}-u_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|v_n-u_n| \leq \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.

3) لدينا $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq |v_n-u_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$. و $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ ومنه $\lim_{n\to\infty}(v_n-u_n)=0$ (0.5)

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين.

4).أ) بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتين فإن $\ell=\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n=\inf_{n\in\mathbb{N}}(v_n)$ أي أن

(0.5)

$\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq \ell \leq v_n$

و منه $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq \ell-u_n \leq v_n-u_n$ أي أن $\forall n \in \mathbb{N}: |\ell-u_n| \leq |v_n-u_n|$. (0.5)

ب) بحساب القيم المتتابعة لـ $|v_n-u_n|$ نحصل على $|v_8-u_8|=0.00\,9\,5312<0.01$ إذن يمكن اعتبار (0.5)

u_8 قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد ℓ حيث $u_8=2.5301$. (0.5)

التمرين الثالث (7 نقاط):

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, x>0 \\ e^{x^2}-\cos x, x\leq 0\end{cases}$.

1) g مستمر في كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ و لدينا (0.25)

$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x)=\lim_{x\to 0}\left(e^{x^2}-\cos x\right)=0=g(0)$. إذن g مستمرة عند 0 من اليسار. (0.5)

لدينا أيضا $\forall x>0: 0 \leq x^2\sin\frac{1}{x} \leq x^2$ و منه $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=0=g(0)$. إذن g مستمرة عند 0 من اليمين. (0.5)

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(e^{x^2}-\cos x\right)'}{(x)'}=\frac{2xe^{x^2}-\sin x}{1}=0$. (1)

3) g تقبل الاشتقاق في كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ و لدينا (0.25)

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^{x^2}-\cos x}{x}\right)=0$. (0.5)

لدينا من جهة أخرى $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$. و $\forall x>0: 0\le x\sin\frac{1}{x}\le x$ و منه فإن

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$ أي أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$. (0.5)

إذن g تقبل الاشتقاق عند 0 حيث $g'(0)=0$.

4) عبارة $g'(x)$ بدلالة x.

$g'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & ,x>0\\ 0 & ,x=0\\ 2xe^{x^2}-\sin x & ,x<0\end{cases}$ أو اختصارا $g'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & ,x>0\\ e^{x^2}-\cos x & ,x\le0\end{cases}$. (1)

5) g ليست من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$ لأن g' ليست مستمرة عند 0 من اليمين وذلك لأن (0.5)

المتتاليتين (x_n) و (x'_n) حيث $x'_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{3}}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: x_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ متقاربتين نحو 0.

لكن $\lim\limits_{n\to\infty}g'(x'_n)=-\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{n\to\infty}g'(x_n)=0$ أي أن g' لا تقبل نهاية عند 0 من اليمين. (0.5)

6) ح ع ت $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\sin\frac{1}{x}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\right]=\frac{0}{0}$

ح ع ت $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-\cos\frac{1}{x}+1}{-\frac{2}{x}}\right]=\frac{0}{0}$ (0.5)

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(-\cos\frac{1}{x}+1\right)'}{\left(-\frac{2}{x}\right)'}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin\frac{1}{x}}{2}\right]=0$$ (0.5)

نستنتج أن بيان الدالة g يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ معادلته. (0.5)