Université Oum El Bouaghi
Master 1-Mathématiques Appliquées
Examen Analyse Fonctionnelle1 (S1)
Lundi-15/01/2024(Durée: 1h30)

Exercice 1. *(Questions de cours)* (05 pts)

Enoncer le théorème de Banach-steinhaus
Enoncer le théorème de l'application ouverte
Enoncer le thérème du graphe fermé
Enoncer le théorème de l'inverse continu de Banach
Enoncer le théorème de Hanh-Banach (cas réel-Forme analytique).

Exercice 2. *(*08pts)

Soit S l'ensemble des suites infinies $x = (x_n)$ de nombres complexes. On rappelle que S est muni des opérations usuelles est un espace vectoriel complexe. Soit $a = (a_n)$, un éléments fixé de S, dont tous les éléments sont différents de 0. On pose:

$$E = \left\{ x \in S; \quad \sum_{n\geq 0} |a_n x_n| < +\infty \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ x \in S; \quad \sup_{n\geq 0} \frac{|x_n|}{|a_n|} < +\infty \right\}.$$

1) Vérifier que :

i) E est sous-espace vectoriel de S et $\|\cdot\|_E \; : \; x \longmapsto \sum_{n\geq 0} |a_n x_n|$ est une norme sur E.

ii) Fest sous-espace vectoriel de S et $\|\cdot\|_F \; : \; x \longmapsto \sup_{n\geq 0} \frac{|x_n|}{|a_n|}$ est une norme sur E.

On suppose que E et F sont munis des normes précédentes.

2) Pour $n \geq 0$, (e_n) désigne la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le terme de rang n qui est égal à un. Démontrer que tout $x = (x_n) \in E$, $x_N = \sum_{n=0}^{N} x_n e_n$ converge dans E vers x,c'est-à-dire:

$$x = \sum_{n\geq 0} x_n e_n.$$

3) Soit E^* l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E, muni de sa norme usuelle, notée $\|\cdot\|_{E^*}$. Pour $f \in E^*$, on pose:

$$\Phi(f) = (f(e_n)).$$

Montrer que:

$i)$ Φ est une application continue de E^* dans F.

$ii)$ Φ est surjective.

$iii)$ Φ est une isométrie de E^* sur F

Exercice 3. (07pts)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions définies par:

$$f_n(x) = \sqrt{n}\chi_{\left[n,n+\frac{1}{n}\right]}(x)$$

1) Montrer que f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,+\infty[)$ mais ne converge pas fortement dans $L^2([0,+\infty[)$.

2) Montrer que f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$ pour $p < 2$.

Bon courage

Corrigé type de l'examen d'analyse fonctionnelle 1

Master1 - Mathématiques Appliquées

Université Oum EL Bouaghi

Departement MI (15/01/2024)

(p1)

Ex01 : Voir le cours (5pts) → 1pt, 1pt, 1pt, 1pt, 1pt

Ex02 (08pts) : 1) i) E s.e.v de S ?

* $E \neq \emptyset$
* $\forall x, y \in E \overset{?}{\Longrightarrow} x+y \in E$

On a : $\sum_{n\geq 0} |a_n(x_n+y_n)| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n x_n| + \sum_{n\geq 0} |a_n y_n| < +\infty$

donc $x+y \in E$.

$\sum_{n\geq 0} |a_n(\lambda x_n)| = \lambda \sum_{n\geq 0} |a_n x_n| < +\infty$ donc $\lambda x \in E$.

d'où E s.e.v de S.

(0,5pt)

$\|x\| = \sum_{n\geq 0} |a_n x_n|$, $\forall x = (x_n) \in E$ une norme sur E ?

- $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$
- $\|\lambda x\| = \sum_{n\geq 0} |a_n \lambda x_n| = |\lambda| \sum_{n\geq 0} |a_n x_n| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} |a_n x_n| = 0 \Leftrightarrow |a_n x_n| = 0, \ \forall n \geq 0$

$\Leftrightarrow a_n x_n = 0, \ \forall n \geq 0 \Leftrightarrow x_n = 0, \ \forall n \geq 0$ car $a_n \neq 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

- $\|x+y\| = \sum_{n\geq 0} |a_n(x_n+y_n)| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n x_n| + \sum_{n\geq 0} |a_n y_n|$

$= \|x\| + \|y\|$.

(01pt)

ii) F s.e.v de S ?

- $F \neq \emptyset$?
- $\forall x,y \in F \Rightarrow x+y \in F$

na, $\frac{|x_n+y_n|}{|a_n|} \leq \frac{|x_n|}{|a_n|}+\frac{|y_n|}{|a_n|} \Rightarrow \sup\limits_{n\geq 0} \frac{|x_n+y_n|}{|a_n|} \leq \sup\limits_{n\geq 0} \frac{|x_n|}{|a_n|} +$

$\sup\limits_{n\geq 0} \frac{|y_n|}{|a_n|} \Rightarrow \sup\limits_{n\geq 0} \frac{|x_n+y_n|}{|a_n|} < +\infty$ donc $x+y \in F$.

0,5pt

$\sup\limits_{n\geq 0} \frac{|\lambda x_n|}{|a_n|} = |\lambda| \sup\limits_{n\geq 0} \frac{|x_n|}{|a_n|} < +\infty \Rightarrow \lambda x \in F$.

d'ou F s.e.v de S.

$\|x\| = \sup\limits_{n\geq 0} \frac{|x_n|}{|a_n|}$ une norme sur E ?

1pt

- $\|x\| \geq 0$, $\forall x \geq 0$
- $\|\lambda x\| = \sup\limits_{n\geq 0} \frac{|\lambda x_n|}{|a_n|} = |\lambda| \sup\limits_{n\geq 0} \frac{|x_n|}{|a_n|} = |\lambda| \|x\|$.
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{n\geq 0} \frac{|x_n|}{|a_n|} = 0 \Leftrightarrow |x_n| = 0, \forall n \geq 0 \ (a_n \neq 0)$

$\Leftrightarrow x_n = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

- $\|x+y\| = \sup\limits_{n\geq 0} \frac{|x_n+y_n|}{|a_n|} \leq \sup\limits_{n\geq 0} \frac{|x_n|}{|a_n|} + \sup\limits_{n\geq 0} \frac{|y_n|}{|a_n|} = \|x\| + \|y\|$

2) $e_n = (0, \dots, 1, 0, \dots)$, $n \geq 0$; $x = (x_n) \in E$,

$x_N = \sum\limits_{n=0}^{N} x_n e_n \xrightarrow[N\to\infty]{E} x = \sum\limits_{n\geq 0} x_n e_n$?

P3

On a ; $\|x - x_N\|_E = \|\sum_{n\geq N+1} x_n e_n\|_E = \|\sum_{n\geq N+1} x_n\|_E =$

$\sum_{n\geq N+1} |a_n x_n|$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini, car

c'est le reste de la série convergente $\sum_n |a_n x_n|$. 01pt

3) E^* espace dual de E.

Soit $f \in E^*$; $\phi(f) = f(e_n)$

i) $\phi \in E^*$? ϕ linéaire car f linéaire.

ϕ continue ? On a : $\|\phi(f)\|_F = \sup_{n\geq 0} \frac{|\phi(f)|}{|a_n|} = \sup_{n\geq 0} \frac{|f(e_n)|}{|a_n|}$

01pt

Mais $|f(e_n)| \leq \|f\|_{E^*} \|e_n\|_E = \|f\|_{E^*} \cdot |a_n|$ d'où $\|\phi(f)\|_F \leq \|f\|_{E^*}$ ... (1)

ainsi $\phi \in \mathcal{L}(E^*, F)$ et $\|\phi\|_{\mathcal{L}(E^*,F)} \leq 1$.

ii) Soit $y = (y_n) \in F$, on définit une forme linéaire sur E

on pose : $f(x) = \sum_{n\geq 0} x_n y_n$, $\forall x \in E$ 01pt

$|f(x)| = |\sum_{n\geq 0} x_n y_n| \leq \sum_{n\geq 0} |x_n y_n| = \sum_{n\geq 0} |a_n x_n| \left|\frac{y_n}{a_n}\right| \leq \|y\|_F \|x\|_E$

donc f continue et $\|f\|_{E^*} \leq \|y\|_F$ ... (2).

Finalement, on a ; $\phi(f) = y$ car $f(e_n) = y_n$, $\forall n$

et (2) implique $\|b\|_{E^*} \leq \|\phi(b)\|_F \cdots (3)$ (P4)

on a : $\forall y \in F, \exists b \in E^* : \phi(b) = y$ c.à.d ϕ surjective (1pt)

(ii) d'après (1) et (2) on a : $\|\phi(b)\|_F = \|b\|_{E^*}$

c.à.d ϕ isométrie. (01pt)

Exo3 (07pts)

Soit (f_n) une suite : $f_n(x) = \sqrt{n}\, \chi_{[n, n+\frac{1}{n}]}(x)$

1) Soit $g \in \mathcal{C}_c(]0,+\infty[)$ (fonction continue à support compact) $\overline{\mathcal{C}_c(]0,+\infty[)} = L^2(]0,+\infty[)$.

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) g(x)\, dx = \sqrt{n} \int_n^{n+1/n} g(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ (2pts)

par densité des fcts continues à support compact,

$f_n \longrightarrow 0$. (02pts)

$\|f_n\|_2 = 1$ donc f_n ne converge pas fortement vers 0

dans $L^2(]0,+\infty[)$. (03pts)

2) pour $p < 2$ on a : $\int_0^{+\infty} |f_n(x)|^p\, dx = \int_n^{n+1/n} n^{\frac{p}{2}}\, dx = n^{\frac{p}{2}-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc f_n converge fortement vers 0 dans $L^p(]0,+\infty[)$.