Université Larbi Ben M'hidi Om El-Bouaghi
Département MI **M1 Mathématiques appliquées**
Matière : Compléments sur l'intégration et les espaces de Lebesgue **2023/2024**

Examen

Durée : 1H et 30m

Exercice 01 : [05 pts] Pour tous $x > -1$ et $t \in]0,1[$, on pose $f(x,t) = \dfrac{t^x - 1}{\ln(t)}$ et on admet que la fonction $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x,t)dt$ est bien définie sur $]-1,+\infty[$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ pour tout $t \in]0,1[$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial x} f(x,t) = t^x$ pour tous $x > -1$ et $t \in]0,1[$.
2. En déduire que F est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$.
3. Calculer $F(0)$ et déduire une expression simple de $F(x)$.

Exercice 02 : [03 pts] Soient $1 \leq p < q < \infty$, $f, g \in L_q(\Omega)$ et $h = f|g|^{\frac{q-p}{p}}$.

1. Calculer l'éxposant conjugué de $r = \dfrac{q}{p}$.
2. En utilisant l'inégalité de Hölder généralisée, montrer que $h \in L_p(\Omega)$.

Exercice 03 : [06 pts] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_n(\Omega) = 1$. Soit $f \in L_2(\Omega)$.

1. Montrer que $f \in L_1(\Omega)$.
2. Montrer que les fonctions $F_x : (x,y) \mapsto f^2(x), F_y : (x,y) \mapsto f^2(y)$ et $G : (x,y) \mapsto f(x)f(y)$ sont intégrables sur $\Omega \times \Omega$ et que
$$\int_{\Omega\times\Omega} F_x(x,y)dxdy = \int_{\Omega\times\Omega} F_y(x,y)dxdy = \int_\Omega f^2(x)dx \quad et \quad \int_{\Omega\times\Omega} G(x,y)dxdy = \Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)^2.$$
3. En déduire que la fonction $H : (x,y) \mapsto f(x) - f(y)$ appartient à $L_2(\Omega \times \Omega)$ et que
$$\|H\|^2_{2,\Omega\times\Omega} = 2\|f\|^2_{2,\Omega} - 2\Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)^2.$$

Exercice 04 : [06 pts] Soit $f \in L_1(\mathbb{R})$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on considère la fonction
$$f_y : x \in \mathbb{R} \mapsto f_y(x) = f(x-y)$$
qui est bien définie p. p. tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $(y_j)_{j\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{j\to\infty} y_j = \ell$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ quelconque. On admet qu'il existe $[c,d] \subset \mathbb{R}$ et $M > 0$ tels que
$$\varphi(x-\ell) = \varphi(x-y_j) = 0,\ \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \notin [c,d],$$
et
$$|\varphi(x-y_j) - \varphi(x-\ell)| < M, \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in [c,d].$$
En utilisant le théorème de convergence dominée (TCD), montrer que $\lim\limits_{j\to\infty} \|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell\|_{1,\mathbb{R}} = 0$.
2. Soient $j \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ quelconques. Montrer que
   2.a) $\|f_y - \varphi_y\|_{1,\mathbb{R}} = \|f - \varphi\|_{1,\mathbb{R}}$.
   2. b) $\|f_{y_j} - f_\ell\|_{1,\mathbb{R}} \leq 2\|f-\varphi\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell\|_{1,\mathbb{R}}$.
3. En utilisant un théorème de densité, montrer que $\lim\limits_{j\to\infty} \|f_{y_j} - f_\ell\|_{1,\mathbb{R}} = 0$.

Bon courage

Corigé de l'examen

Exercice 1 : [05 pts]

1. Pour tout $t \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables, de plus, pour tous $x > -1$ et $t \in]0,1[$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}f(x,t) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\frac{e^{x\ln t}-1}{\ln t}\Big) = e^{x\ln t} = t^x$
 .... (0.5 + 1 pt)
2. On a
   — La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1[$ pour tout $x > -1$.
   — La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est déribalble sur $]-1,+\infty[$ pour tout $t \in]0,1[$.
   — Pour tout $x > -1$ et $t \in]0,1[$, $\frac{\partial f}{\partial x}f(x,t) = t^x \leq 1$ et la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0,1[$.

   Donc, la fonction F est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et
   $F'(x) = \int_0^1 t^x dx = \Big[\frac{1}{x+1}t^x\Big]_0^1 = \frac{1}{x+1}$ .... (0.5 + 0.5 + 0.5 pt)
3. $F(0) = \int_0^1 \frac{t^0-1}{\ln t} = 0$ .... (0.5 pt)

   Pour tout $x > -1$, on a $F'(x) = \frac{1}{x+1}$, donc $F(x) = \ln(x+1) + C$ er comme $F(0) = 0$, il vient $C = 0$, donc $F(x) = \ln(x+1)$ .... (1.5 pt).

Exercice 02 :[03 pts]

1. $r' = \frac{r}{r-1} = \frac{\frac{q}{p}}{\frac{q}{p}-1} = \frac{q}{q-p}$ .... (1 pt)
2. On a $1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$, alors $1 = \frac{p}{q} + \frac{q-p}{q}$, d'où $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{q-p}{pq}$, c-à- dire $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\frac{pq}{q-p}}$. D'après l'inégalité de Hölder généralisée
   $\|h\|_{p,\Omega} \leq \|f\|_{q,\Omega}\||g|^{\frac{q-p}{p}}\|_{\frac{pq}{q-p},\Omega} = \|f\|_{q,\Omega}\|g\|_{q,\Omega}^{\frac{q-p}{p}} < \infty$ .... (2pts)

Exercice 03 : [06 pts]

1. On a $|\Omega| = 1 < \infty$, alors $L_2(\Omega) \subset L_1(\Omega)$ et comme $f \in L_2(\Omega)$ il vient $f \in L_1(\Omega)$ .... (1pt).
2. Pour tout $y \in \Omega$, on a
$$\int_\Omega F_x(x,y)dx = \int_\Omega f^2(x)dx = \|f\|_{2,\Omega}^2 < \infty$$
   et
$$\int_\Omega \Big(\int_\Omega F_x(x,y)dx\Big)dy = \int_\Omega \|f\|_{2,\Omega}^2 dy = \|f\|_{2,\Omega}^2 \int_\Omega \mathbf{1}_\Omega = \|f\|_{2,\Omega}^2|\Omega| = \|f\|_{2,\Omega}^2 < \infty.$$
   D'après le théorème de Tonelli, F_x est intégrable sur $\Omega \times \Omega$ et d'après le théorème de Fubini
   $\int_{\Omega\times\Omega} F_x(x,y)dxdy = \int_\Omega \Big(\int_\Omega F_x(x,y)dx\Big)dy = \int_\Omega f^2(x)dx$ .... (1pt)

   De la même manière, on montre que $\int_\Omega\int_\Omega F_y(x,y)dxdy = \int_\Omega f^2(y)dy$ .... (1pt)

   Finalement, pour presque tout $y \in \Omega$, on a
$$\int_\Omega G(x,y)dx = \int_\Omega f(x)f(y)dx = f(y)\int_\Omega f(x)dx < \infty, (\text{car} \quad f \in L_1(\Omega))$$
   et
$$\int_\Omega \Big(\int_\Omega G(x,y)dx\Big)dy = \int_\Omega f(y)\Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)dy = \Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)\Big(\int_\Omega f(y)dy\Big) = \Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)^2 < \infty.$$
   D'après le théorème de Tonelli, G est intégrables sur $\Omega \times \Omega$ et d'après le théorème de Fubini
   $\int_{\Omega\times\Omega} G(x,y)dxdy = \int_\Omega \Big(\int_\Omega G(x,y)dx\Big)dy = \Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)^2$ .... (1pt)
3. Comme les fonctions F_x, F_y et G sont intégrables sur $\Omega \times \Omega$, on a
$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Omega} H^2(x,y) &= \int_{\Omega\times\Omega} (f(x)-f(y))^2 dxdy \\ &= \int_{\Omega\times\Omega} \Big(f^2(x) + f^2(y) - 2f(x)f(y)\Big)dxdy \\ &= \int_{\Omega\times\Omega} \Big(F_x(x,y) + F_y(x,y) - 2G(x,y)\Big)dxdy \\ &< \infty,\end{aligned}$$

donc $H \in L_2(\Omega)$ .... (1pt).
Et d'après la question précédente

$$\|H\|^2_{2,\Omega\times\Omega} = \int_{\Omega\times\Omega} F_x(x,y) + \int_{\Omega\times\Omega} F_y(x,y) - 2\int_{\Omega\times\Omega} G(x,y)dxdy = 2\int_\Omega f^2(x)dx - \Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)^2,$$

d'où $\|H\|^2_{L_2(\Omega\times\Omega)} = 2\|f\|^2_{2,\Omega} - \Big(\int_\Omega f(x)x\Big)^2$ .... (1pt)

Exercice 04 : [06 pts]

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$. On a $\lim\limits_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |\varphi_{y_j}(x) - \varphi_\ell(x)|dx = \lim\limits_{j\to\infty}\int_c^d |\varphi_{y_j}(x) - \varphi_\ell(x)|dx.$
   La fonction φ est continue et $\lim\limits_j y_j = \ell$, alors,
   $\lim\limits_j |\varphi_{y_j}(x) - \varphi_\ell(x)| = \lim\limits_j |\varphi(x-y_j) - \varphi(x-\ell)| = |\varphi(x-\ell) - \varphi(x-\ell)| = 0.$ .... (1pt)
   D'autre part, $|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell| \leq M, \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in [c,d]$, et $\int_c^d M dx = M(d-c) < \infty$, d'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{j\to\infty}\int_c^d |\varphi_{y_j}(x) - \varphi_a(x)|dx = \int_c^d \lim\limits_{j\to\infty} |\varphi_{y_j}(x) - \varphi_\ell(x)|dx = 0$ .... (2pt)
2. **2.a)** En effectuant le changement de variable $t = x - y$, on trouve
   $\|f_y - \varphi_y\|_{1,\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - \varphi(x-y)|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(t) - \varphi(t)|dt = \|f - \varphi\|_{1,\mathbb{R}}$ .... (1pt)

   2. b) On a

$$\begin{aligned}\|f_{y_j} - f_\ell\|_{1,\mathbb{R}} &= \|f_{y_j} - \varphi_{y_j} + \varphi_\ell - f_\ell + \varphi_{y_j} - \varphi_\ell\|_{1,\mathbb{R}}\\ &\leq \|f_{y_j} - \varphi_{y_j}\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi_\ell - f_\ell\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell\|_{1,\mathbb{R}}\\ &=\leq \|f - \varphi\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi - f\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell\|_{1,\mathbb{R}}\end{aligned}$$

   Donc $\|f_{y_j} - f_\ell\|_{1,\mathbb{R}} \leq 2\|f - \varphi\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell\|_{1,\mathbb{R}}$ .... (1 pt)
3. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la densité de $C_c(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_{1,\mathbb{R}} \leq \frac{\varepsilon}{4}$, et comme $\lim\limits_{j\to\infty} \|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell\|_{1,\mathbb{R}} = 0$, il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell\|_{1,\mathbb{R}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $j > j_0$.
   Pour $j > j_0$, $\|f_{y_j} - f_\ell\|_{1,\mathbb{R}} \leq 2\|f - \varphi\|_{1,\mathbb{R}} + \|\varphi_{y_j} - \varphi_\ell\|_{1,\mathbb{R}} \leq 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,
   alors, $\lim\limits_j \|f_{y_j} - f_\ell\|_{1,\mathbb{R}} = 0$. .... (1 pt)