Corrigé "Méthodes Numérique"

Exercice 1 : (7,5 pts) $2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$

① On a $\det(A) = 4 \neq 0 \iff A$ est inversible (0,5)

donc le système (1) admet une unique solution (0,5)

② La solution du système par la méthode de Gauss :

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} L_1^0 \\ L_2^0 \\ L_3^0 \end{array} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1^1 \leftarrow L_1^0 \\ L_2^1 \leftarrow L_2^0 + \frac{1}{2}L_1^0 \\ L_3^1 \leftarrow L_3^0 \end{array}$$

(0,5) (0,5)

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1^2 \leftarrow L_1^1 \\ L_2^2 \leftarrow L_2^1 \\ L_3^2 \leftarrow L_3^1 + \frac{2}{3}L_2^1 \end{array}$$

(0,5)

d'où on a

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ \frac{3}{2}x_2 - x_3 = -1 \\ \frac{4}{3}x_3 = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

(0,5)

③ On a $\det(A_{[1]}) = 2 \neq 0$ (0,5)

$\det(A_{[2]}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ (0,5)

$\det(A) = 4$ (0,5)

d'où A admet une décomposition LU. (1)

4/ le code MatLab (3pts)

```
A = [2 -1 0 ; -1 2 -1; 0 -1 2];
b = [0; -1; 2];

n = length(A);
L = zeros(n);
U = zeros(n);

for k = 1 : n
    L(k, k) = 1;
end

U(1, :) = A(1, :);
L(:, 1) = A(:, 1) / U(1, 1);
for s = 2 : n
    for j = s : n
        U(s, j) = A(s, j) - L(s, 1 : s - 1) * U(1 : s - 1, j);
    end
    for i = s + 1 : n
        L(i, s) = (A(i, s) - L(i, 1 : s - 1) * U(1 : s - 1, s)) / U(s, s)
    end
```

(2)

Exercice 2 : 8,5 pts

① Les algorithmes de Jacobi et Gauss-Seidel :

Jacobi : À partir de x^0 donné on a :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_2^k + \frac{1}{4}x_3^k \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3^k \\ x_3^{k+1} = 1 - \frac{1}{3}x_1^k - \frac{1}{3}x_2^k \end{cases}$$

0,75

L'algorithmes de Gauss-Seidel : À partir de x^0 donné

on a :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_2^k + \frac{1}{4}x_3^k \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3^k \\ x_3^{k+1} = 1 - \frac{1}{3}x_1^{k+1} - \frac{1}{3}x_2^{k+1} \end{cases}$$

0,75

② On a : $|a_{11}| = 4 > |a_{12}| + |a_{13}| = 3$

$|a_{22}| = 2 > |a_{21}| + |a_{23}| = 1$

$|a_{33}| = 3 > |a_{31}| + |a_{32}| = 2$

1

donc A a diagonale strictement dominante =>

alors les méthode de Jacobi et Gauss-Seidel convergent.

③ La solution approchée du Système ②.

pour $k=0$ $\quad X^1 = ??$.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4} \\ x_2^1 = \frac{1}{2} \\ x_3^1 = \frac{3}{4} \end{cases} \qquad X^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$ 0,75 pt

$$\| X^1 - X^0 \| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

0,5 pt

$$= \sqrt{0,875}$$

$$= 0,935 > \varepsilon =$$

on contime

$k = 1$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = 0,687$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = 0,125$$ 0,75 pt

$$x_3^{(3)} = 1 - \frac{1}{3} \times 0,687 - \frac{1}{3} \times 0,125 = 0,729$$

$$\| X^2 - X^1 \| = \left\| \begin{pmatrix} 0,687 \\ 0,125 \\ 0,729 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0,437 \\ -0,375 \\ -0,021 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{(0,437)^2 + (-0,375)^2 + (-0,021)^2} = 0,576 < \varepsilon = 0,75$$

0,5 pt stop

Code Matlab de Jacobi : 3,5 pts

```
A=[4 -2 -1 ; 0 2 1; 1 1 3];
b=[1 ; 1; 3];
P=[1 ; 0; 1];
K= 4
N= length(B);
x = zeros (N, 1)

for k = 1 : K
    for i = 1 : N
        x(i) = (b(i) /A(i,i)) -
        ((A(i,[1 : i-1 , i+1 : N] * P([1 : i-1, i+1 : N]) /A(i,i)
    end
    x
    P = X
end.
```

Exercice 3 : 4 pts

1) Peu importe puisque $X^{(0)}$ n'a aucune chance d'être orthogonal à la solution X. Sachant que la norme $\|X^{(0)}\| \leq 1$ 0,5 pt

2) On calcule les itérés : $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{17}{20} \end{pmatrix}$, $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{197}{200} \end{pmatrix}$

$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1997}{2000} \end{pmatrix}$

$x^1 = AY^{(0)} = \begin{pmatrix} 20 \\ -17 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda^1 = 20$ et $y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{17}{20} \end{pmatrix}$ 1 pt

$x^2 = AY^1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -\frac{197}{20} \end{pmatrix}$ $-9,85$ $\quad \lambda^2 = 10 \quad y^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{197}{200} \end{pmatrix}$ 1 pt

$x^3 = AY^2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -\frac{1997}{200} \end{pmatrix}$ $-9,985$ $\quad \lambda^3 = 10 \quad y^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1997}{2000} \end{pmatrix}$ 1 pt

On remarque que ; λ^k converge vers 10 et y^k converge vers
0,25 pt 0,25 pt

le vecteurs propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.