Ex3 11,00

2 1°. $d(x,F) = \|x - p(x)\|$ ?

Par définition $d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\|$, or $p(x)\in F \Rightarrow d(x,F) \leq \|x - p(x)\|, \forall x \in E$ 0,5

D'autre part, comme $H$ est $\Delta$ Hilbert, alors $H = F \oplus F^\perp$ 0,25

donc $\forall x \in H \Rightarrow \exists x_1 \in F^\perp : x = p(x) + x_1$ 0,25 et d'après Pythagore

0,5 $\forall y \in F$, on a : $\|x-y\|^2 = \|p(x) - y + x_1\|^2 = \|p(x)-y\|^2 + \|x_1\|^2 = \|p(x)-y\|^2 + \|x - p(x)\|^2$

on déduit que : $\|x-y\| \geq \|x - p(x)\|, \forall y \in F$ et par suite $d(x,F) = \|x - p(x)\|$ 0,50

3° L'existence d'une base orthonormée ?

1,5 Comme $F$ est 1 s.e. de dimension finie $\subset H$ de Hilbert $\Rightarrow F$ est Hilbert qui a une base $\beta = \{x_i \ \ i = \overline{1,n}\}$. $|\beta| = n$.

Le résultat au cœur qui assure l'existence d'une base orthonormale est celui de Gram Schmidt. La base est $\{e_i \ \ i = \overline{1,n}\}$ définie comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = x_1 \\ e_{i+1} = \dfrac{y_{i+1}}{\|y_{i+1}\|} : y_{i+1} = x_{i+1} - P_{F_i}(x_{i+1}),\ \forall i = \overline{1,n-1} \quad F_i = [\{x_j \ , j = \overline{1,i}\}] \end{cases}$$ 0,5

on montre que $(y_i)_i$ est une famille orthogonale ; soit $i < j$, on a :

$$\langle y_i, y_j \rangle = \langle y_i, x_j - P_{F_{j-1}}(x_j) \rangle = \langle x_i, x_j - P_{F_{j-1}}(x_j) \rangle - \langle P_{F_{i-1}}(x_i), x_j - P_{F_{j-1}}(x_j) \rangle$$

$F_i \subset F_{j-1}$, $x_j - P_{F_{j-1}}(x_j) \perp F_{j-1}$ ; $F_{j-1}$, $x_j - P_{F_{j-1}}(x_j) \perp F_j$

0,5 × 2 = 1

$= 0 - 0 = 0$

alors $(y_i)$ est orthogonale et par conséquent $(e_i)_{i=\overline{1,n}}$ est base orthonormale.

3 2° a) $p(x) \in F = [\{e_i\}, i = \overline{1,n}] \Rightarrow \exists\, \alpha_i \ / \ i = \overline{1,n} : p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

or $x - p(x) \in F^\perp \Rightarrow \langle x - p(x), e_i \rangle = 0 \ \ \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow \langle x, e_i \rangle = \langle p(x), e_i \rangle = \alpha_i, i = \overline{1,n}$

1 Alors, $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

2 b) Introduisant $H = L^2([0,1])$, muni du produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g$ 0,5

posons $F$ = le s.e. des polynômes de degré $\leq 1$, i.e. $F = [\{1, t\}]$.

Le problème $\inf_{\alpha,\beta} \int_0^1 |t^2 - \cancel{\alpha t} - \beta|^2 dt \iff \exists h \in F : d(t^2, F) = \inf_{\alpha,\beta} \int_0^1 |t^2 - \alpha t - \beta|^2 dt$

(0,5)

et d'après 1°. $d(t^2, F) = \|t^2 - p(t^2)\|^2_{L^2}$ : $p(\cdot)$ = projection orthogonale de $t^2$ sur $F$.

0,5 alors $p(t^2) = \alpha t - \beta$ ; d'après a) $p(t^2) = \sum_{i=1}^{2} \langle t^2, e_i \rangle e_i$

Il est préférable de calculer $e_i \ \ i = \overline{1,2}$

$e_1 = x_1 = 1$ et $y_2 = t - \alpha \perp F_1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow y_2 = t - \frac{1}{2}$ et par suite $e_2 = 2\sqrt{3}t - \sqrt{3}$.

0,5 donc $p(t^2) = \sum_{i=1}^{2} \langle t^2, e_i \rangle e_i = (\int_0^1 t^2 \cdot 1) \cdot 1 + (\int_0^1 t^2 (2\sqrt{3}t - \sqrt{3}))(2\sqrt{3}t - \sqrt{3}) = t - \frac{1}{6}$.

Alors $\inf \int_0^1 |t^2 - \alpha t - \beta|^2 dt$ est atteint pour $\alpha = 1$ et $\beta = -\frac{1}{6} \Rightarrow \inf \int_0^1 |t^2 - t - \frac{1}{6}|^2 = \frac{31}{180}$.

4° - $B$ est une base de Hilbert ssi $F = [B]$ et $B$ est orthonormée.