comme F est fermé ⊂ H de Hilbert ⇒ F est un Hilbert, d'après 3°

F admet une base orthonormale donc $p(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ 0,5

5° - $M = \{x \in H \,;\, \sum_{i=0}^{n} x_i = 0\}$ alors $\|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

(1) 5.1° - $M = \varphi^{-1}(0) = \ker \varphi$; $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i$ qui est continue car $|\varphi(x)| \leq \sqrt{n}\, \|x\|_{\ell^2}$.

1,5 5.2° - $M \oplus N = H$ ssi $\forall x \in H \Rightarrow \exists (x_1, x_2) \in M \times N \,;\, x = x_1 + x_2$ 0,5 et $x_2 \in M \Rightarrow x_2 = 0$

donc si $\sum_{i=0}^{n} x_2^i = 0 \Rightarrow x_2^i = 0, \forall i = \overline{0,n} \Leftrightarrow x_2^i = x_2^0 = \alpha \; \forall i = \overline{0,n}$ et $x_2^i = 0, \forall i \geq n+1$ 0,50

Alors $N = [(\underbrace{1, \cdots 1}_{n+1 \text{ élément}}, 0 \cdots 0)]$ convient 0,50

(2) 5.3°. Soit $x = (1, 0 \cdots 0) \Rightarrow d(x, M) = \|x - p(x)\|$ 0,5 soit $p(x) = (x_0, x_1 \cdots x_n, 0 \cdots 0)$

or $\forall x \in H \Rightarrow \exists y \in N \,;\, x = p(x) + y = p(x) + \alpha(\underbrace{1, \cdots 1}_{(n+1) \text{ elt}}, 0 \cdots 0)$ 0,5

donc $(1 - x_0, -x_1 \cdots -x_n, 0 \cdots 0) = \alpha(\underbrace{1, \cdots 1}_{(n+1) \text{ elt}}, 0 \cdots 0)$; $\sum_{i=0}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{n+1}$ 0,5

par conséquent $d(x, M) = \|\frac{1}{n+1}(1, \cdots 1, 0 \cdots 0)\| = \left(\sum_{i=0}^{n} 1^2/(n+1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. 0,5

Autre solution

---

pour l'exercice 1 → question 1°: $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$?

(1) $N(f+g)^2 = \underline{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)} + \underline{g^2(0) + \int_0^1 g'^2(t)} + 2\left[f(0) \cdot g(0) + \int_0^1 f'(t) \cdot g'(t)\, dt\right]$ 0,5 ≤ C. Schwarz

$\leq N(f)^2 + N(g)^2 + 2\left[\left(f(0), \left(\int_0^1 f'^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(g(0), \left(\int_0^1 g'^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right] \xrightarrow[0,5]{} \text{dans } \mathbb{R}^2$

$\leq N(f)^2 + N(g)^2 + 2\sqrt{F^2 \cdot G^2}$; F G C. Schwarz

$\leq (|F| + |G|)^2$

Donc $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.