Corrigé type de l'Examen EVN

Ex 1 (4,5)

1,75 1° N est une norme ?

Soit $\Phi : (f,g) \mapsto \Phi(f,g) = f(0)\,g(0) + \int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,dt$ 0,25

(E, Φ) est un préhilbertien $\Rightarrow$ $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ est un EV normé. 0,5

Il est clair que Φ est bilinéaire symétrique positive 0,75

$\|f\|_\Phi = 0 \Rightarrow f'(t) = 0\ \forall t \in [0,1]$ et $f(0) = 0 \Rightarrow f \equiv cte = f(0) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ 0,25

1,5 2° $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}\, N(f)$?

comme $f \in C^1[0,1] \Rightarrow f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$, alors 0,5

$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt \leq |f(0)| + \left(\int_0^1 |f'(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 0,5 Schwarz $\int_0^1 f \cdot 1$

$\leq \sqrt{2}\left(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 0,5 Young (Schwarz $\mathbb{R}^2$)

$|f(x)|^2 \leq 2\left(|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2\,dt\right) \Rightarrow \|f\|_\infty \leq \sqrt{2}\, N(f)$.

1 3° $\|\cdot\|_\infty$ et $N(\cdot)$ sont-elles équivalentes ?

Soit $(x_n) = x^n$, $\|x^n\| = 1$ et $N(x^n) = \frac{n}{\sqrt{2n+1}} \Rightarrow \frac{N(x_n)}{\|x_n\|_\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ 0,25×4

donc les deux normes ne sont pas équivalentes.

Ex 2 (6)

2) 1° Continuité de Φ ?

$|\Phi(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sup \frac{1}{2^n} \cdot |x_n| \leq 1 \cdot \|x\| \Rightarrow \Phi$ est continue

et $\|\Phi\| \leq 1$ ——— ① 0,5 0,5

D'autre part $\exists\, x^0 \in \ell^0$: $x_0 = (\underbrace{1, 0, \ldots}_{1+N \text{ éléments}}, 0, \ldots 0) \in \ell^0$ / $\|x\|_1 \leq 1$ (0,5) et

$|\Phi(x^0)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{2^n} + 1 = 1 \leq \|\Phi\| \Rightarrow \|\Phi\| \geq 1$ 0,5 ②

donc $\|\Phi\| = 1$.

4) 2° $\nexists\, h \in H = \operatorname{Ker}\Phi$: $d(x, F) = \|x - h\|$?

(0,5) On montre par l'absurde ; on suppose qu'il $\exists\, h \in H$: $d(x, H) = \|x - h\|$, alors 0,25

$d(x, H) = \frac{|\Phi(x)|}{\|\Phi\|} = \frac{|\Phi(x - h)|}{\|\Phi\|} = \|x - h\|$ 0,25 $\Rightarrow \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n - h_n}{2^n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - h_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x_n - h_n|$

donc $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)|x_n - h_n| \leq 0 \Rightarrow |x_n - h_n| = 0\ \forall\, 1 \leq n \leq N$ 0,25 $\Rightarrow x_0 = h_0$ ou $x_0 \in H$ 0,25 0,5

(0,5) D'une part on a : $\|\Phi\| \underset{(1)}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{|\Phi(x)|}{\|x\|} \underset{(2)}{\geq} \sup_{x \neq 0} \frac{|\Phi(x - h)|}{\|x\|} = \frac{|x_0|}{\sum |x_i|} \underset{(3)}{=} 1 \Rightarrow x_i = 0\ \ i = \overline{1, N}$ 0,25×4 0,25

et par suite $h_i = 0\ \forall\, i = \overline{1, n}$. Donc $\Phi(x) = x_0 = x_0 - h_0$, alors 0,25

$|x_0| = |x_0 - h_0| \Rightarrow h_0 = 0$ ou $h_0 = 2x_0$ 0,25

1,5 [0,5 • le cas $h_0 = 2x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{h_0}{2} \Rightarrow x \in H$ contradiction avec $x \notin H$

• le cas $h_0 = 0$, on a d'une part : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, y_0 \in H$: $|x_0 - h_0| < |y_0 - x_0| < |x_0 - h_0| + \varepsilon$

on fait $\varepsilon \to 0 \Rightarrow x_0 - h_0 = \pm(x_0 - y_0) \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}(h_0 + y_0)$ condition ou $y_0 = h_0 = 0$

D'après = de la médiane : ← (0,5)

$\frac{1}{2}|x_0 - h_0| = |x_0 - y_0| + |y_0 - h_0| - |(y_0 - h_0) + (y - x_0)|$ ...