# Université d' Oum-El-Bouaghi

## Faculté SENV, Département de M.I.

### Contrôle de Logique Mathématique 2023

Pr. Dr. Zekraoui Hanifa

1. **Exercice (6 points)**

   Donner les valeurs des formules logiques suivantes en précisant sa nature (Tautologie, antilogie, conséquence logique,....)

   **a.** Pour tous propositions $P$ et $Q$, On a la formule $\alpha$:

   $$\alpha : \quad ((P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q))$$

   **b.** Pour tous propositions $P$, $Q$ et $R$ On a la formule $\beta$:

   $$\beta : \ \neg (P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg (Q \wedge R)$$

   Note: $\neg$ : Négation

2. **Exercice (8 points)**

   **a.** Montrer par disjonction des cas la propriété suivante:

   $$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists k \ \in \mathbb{N} \ \exists r \in \{0,1,2,3\}, n = 4k + r$$

   **b.** Soit $E$ un ensemble. Montrer que

   $$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), C_E (A \cap B) = (A \Delta B) \cup C_E (A \cup B)$$

3. **Exercice (6 points)**

   Citer les suivants:

   **a.** l'axiome du choix.

   **b.** Le théorème de Cantor-Bernestein.

   **c.** Le théorème de Cantor sur l'ensemble des parties.

# Solution du contrôle de logique 2023

Solution de l'exercice 1

**a.** $\alpha : ((P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q))$

| $P$ | $Q$ | $\neg Q$ | $P \wedge \neg Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Comme $\alpha$ est fausse par tout, alors $\alpha$ est une antilogie.

**b.** $\beta : \neg (P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg (Q \wedge R)$

| $P$ | $Q$ | $R$ | $\neg P$ | $Q \wedge R$ | $\neg (Q \wedge R)$ | $P \vee (Q \wedge R)$ | $\neg (P \vee (Q \wedge R))$ | $\neg P \wedge \neg (Q \wedge R)$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Comme $\beta$ est vraie par tout, alors $\beta$ est une tautologie.

Solution de l'exercice 2:

**a.** Comme $n \in \mathbb{N}$, alors $n$ soit pair ou impair:

**i)** Pour $n$ pair$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, n = 2m$.

Comme $m \in \mathbb{N}$, alors $m$ soit pair ou impair:

Pour $m$ pair$\Rightarrow$ $k \in \mathbb{N}, m = 2k$. Ainsi,

$$n = 4k \tag{1}$$

Pour $m$ impair$\Rightarrow$ $k \in \mathbb{N}, m = 2k+1$. Ainsi,

$$n = 4k+2 \tag{2}$$

**ii)** Pour $n$ impair$\Rightarrow$ $\exists m \in \mathbb{N}, n = 2m+1$.

Ainsi pour $m$ pair:

$$n = 4k+1 \tag{3}$$

Pour $m$ impair

$$n = 4k+3 \tag{4}$$

De $eq\,(1)\,, eq\,(2)\,, eq\,(3)$ et $eq\,(4)$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k\ \ \in \mathbb{N}\ \exists r \in \{0,1,2,3\}\,, n = 4k+r$$

**b.**

$$\begin{aligned}
C_E\,(A \cap B) &= \{x \in E \wedge x \notin (A \cap B)\} \\
&= \{x \in E \wedge ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \notin A \wedge \notin B))\} \\
&= \{x \in A \wedge x \notin B\} \cup \{x \in B \wedge x \notin A\} \cup \{x \in E \wedge x \notin (A \cup B)\} \\
&= A\Delta B \cup C_E\,(A \cup B)
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3

Réviser votre cours (chapitre 2: Théorie des ensembles).