UNIVERSITE LARBI BEN M'HIDI – OUM EL BOUAGHI
Département : Mathématiques & Informatique

Module : Théorie variationnelle des équations elliptiques — Année académique : 2023/2024

Examen

Date : 21/01/2024 — Durée : 1h30

Exercice 1 (6+3+5=14 points).

Soient Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ et $(A, a_0, f, g) \in M_n(\mathbb{R}) \times L^\infty(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ avec $A\xi \cdot \xi \geq |\xi|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ et $a_0(x) \geq \frac{1}{2}$ p.p. $x \in \Omega$. On considère le problème aux limites :

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) + a_0 u = f \ \text{ dans } \ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta_A} = g \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

1) Établir la formulation variationnelle de (P) et montrer qu'il admet une solution faible unique u.

2) Montrer que

2.1) si $g(x) \geq 0$ p.p. $x \in \partial\Omega$ et $f \in L^\infty(\Omega)$, alors $u(x) \geq -2\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ p.p. $x \in \Omega$,

2.2) si $g = 0$ et $\Omega \in \mathcal{C}^2$, alors u est une solution forte de (P).

Exercice 2 (4+2 = 6 points).

Soient $I =]0,1[$, $(\beta_1, \beta_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ et $(a_1, a_0) \in L^\infty(I)^2$ avec $a_1(x) \geq \beta_1$ et $a_0(x) \geq \beta_0$ p.p. $x \in I$.

1) Montrer qu'il existe une suite croissante $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ et une base hilbertienne $(e_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(I)$ telles que

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty, \qquad (e_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \subset H_0^1(I)$$

et,

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \ \int_I a_1 (e_m)' v' dx + \int_I a_0 e_m v dx = \lambda_m \int_I e_m v dx \ \ \forall v \in H_0^1(I).$$

2) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \ \lambda_m \geq 2\beta_1 + \beta_0$.

Bon succès

Corrigé type avec barème

Exercice 1 (6+3+5=14 points)

1) Formulation variationnelle (2,5 points)**.** On suppose que $u \in H^2(\Omega)$. En multipliant les deux membres de l'équation $-\mathrm{div}(A\nabla u) + a_0 u = f$ par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$ et intégrant sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \big(\mathrm{div}(A\nabla u)\big) v dx + \int_\Omega a_0 uv dx = \int_\Omega fv dx.$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_A}\right)(\gamma_0 v) d\sigma + \int_\Omega a_0 uv dx = \int_\Omega fv dx. \quad \boxed{\mathbf{0,75\ pt}}$$

Tenant compte de la condition « $\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = g$ sur $\partial\Omega$ », on arrive à l'équation

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega a_0 uv dx = \int_\Omega fv dx + \int_{\partial\Omega} g\gamma_0 v d\sigma. \quad \boxed{\mathbf{0,75\ pt}}$$

Toutes les intégrales apparaissant dans la dernière équation existent dès que $u \in H^1(\Omega)$, on n'a plus besoin que u soit dans $H^2(\Omega)$. D'où la formulation variationnelle

$$(\mathrm{PV}) \begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega a_0 uv dx = \int_\Omega fv dx + \int_{\partial\Omega} g\gamma_0 v d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad \boxed{\mathbf{1\ pt}}$$

Résolution (3,5 points)**.** Posons $V = H^1(\Omega)$,

$$a(u,v) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega a_0 uv dx \ , \ \langle \ell, v\rangle = \int_\Omega fv dx + \int_{\partial\Omega} g\gamma_0 v d\sigma, \ \forall (u,v) \in V^2 ,$$

et montrons que toutes les conditions du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites.

La condition LM1 est satisfaite car $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert (théorème 2.3). $\boxed{\mathbf{0,25\ pt}}$

Montrons que les conditions LM2 et LM3 sont satisfaites. Pour tout $(u,v) \in V^2$, on a

$(A, \nabla u, \nabla v) \in M_n(\mathbb{R}) \times L^2(\Omega)^n \times L^2(\Omega)^n \Rightarrow (A\nabla u, \nabla v) \in L^2(\Omega)^n \times L^2(\Omega)^n \Rightarrow A\nabla u . \nabla v \in L^1(\Omega)$ et

$$\left| \int_\Omega A\nabla u . \nabla v dx \right| \le \|A\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \le \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \right) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}$$

$$\le \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \right) \|u\|_V \|v\|_V ,$$

$(a_0, u, v) \in L^\infty(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \Rightarrow (a_0 u, v) \in L^2(\Omega)^2 \Rightarrow a_0 uv \in L^1(\Omega)$ et

$$\left| \int_\Omega a_0 uv dx \right| \le \|a_0 u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_V \|v\|_V .$$

On en déduit que $a(\cdot,\cdot)$ est une application bien définie de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ et que

$$|a(u,v)| \le \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|u\|_V \|v\|_V , \ \forall (u,v) \in V^2,$$

donc $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ (la bilinéarité est claire). $\boxed{\mathbf{1\ pt}}$

Passons à la condition LM4. Pour tout $u \in V$, on a, en utilisant le fait que $A\xi \cdot \xi \geq |\xi|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ et $a_0(x) \geq \frac{1}{2}$ p.p. $x \in \Omega$,

$$a(u,u) \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^n} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_V ,$$

donc $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur V. $\boxed{\mathbf{1,25\ pts}}$

Montrons maintenant que les conditions LM5 et LM6 sont satisfaites. Pour tout $v \in V$, on a $(f,v) \in L^2(\Omega)^2 \ \Rightarrow \ fv \in L^1(\Omega)$ et

$$\left|\int_\Omega fvdx\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_V ,$$

$(g,\gamma_0 v) \in L^2(\partial\Omega)^2 \ \Rightarrow \ g\gamma_0 v \in L^1(\partial\Omega)$ et (voir le théorème 2.8)

$$\left|\int_{\partial\Omega} g\gamma_0 vd\sigma\right| \leq \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}C_{\gamma_0}\|v\|_{H^1(\Omega)} = C_{\gamma_0}\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|v\|_V .$$

On en déduit que ℓ est une application bien définie de V dans $\mathbb{R}$ et que

$$|\langle \ell, v\rangle| \leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_{\gamma_0}\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)\|v\|_V ,\forall v \in V.$$

La linéarité de ℓ étant évidente, on conclut qu'elle est une forme linéaire continue sur V. $\boxed{\mathbf{1\ pt}}$

<u>Conclusion</u> : Les six conditions du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites, on conclut que (PV) admet une solution unique, donc (P) admet une solution faible unique u.

2.1) On applique le théorème 4.6 (principe du maximum) à la fonction $u + 2\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ en prenant $E = H^1(\Omega)$ et $b_1 = 0$:

On a $u \in H^1(\Omega)$ et $2\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \in C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$, donc $u + 2\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \in H^1(\Omega)$ $\boxed{\mathbf{0,5\ pt}}$

PM1) $\displaystyle\int_\Omega A\nabla v \cdot \nabla v dx + \int_\Omega a_0 v^2 dx \geq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \ \forall v \in E,$ $\boxed{\mathbf{0,5\ pt}}$

PM2) $\displaystyle\int_\Omega A\nabla\left(u + 2\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\right).\nabla v dx + \int_\Omega a_0\left(u + 2\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\right) v dx = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v dx +$

$$+\int_\Omega a_0 uvdx + \int_\Omega 2\|f\|_{L^\infty(\Omega)} a_0 vdx = \int_\Omega \left(f + 2\|f\|_{L^\infty(\Omega)} a_0\right) vdx + \int_{\partial\Omega} g\gamma_0 vd\sigma \geq$$

$$\int_\Omega \left(f + \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\right) vdx + \int_{\partial\Omega} g\gamma_0 vd\sigma \geq 0, \forall v \in V_+$$ $\boxed{\mathbf{1,5\ pts}}$

PM3) $\left(u + 2\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\right)_- \in H^1(\Omega)$, selon la proposition 4.2. $\boxed{\mathbf{0,5\ pt}}$

<u>Conclusion</u> : Les trois conditions du théorème 4.6 (principe du maximum) sont satisfaites, on conclut que $u + 2\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \geq 0$ p.p. dans Ω, i.e. $u(x) \geq -2\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ p.p. $x \in \Omega$.

2.2) On montre d'abord que $u \in H^2(\Omega)$. On a : $u \in H^1(\Omega)$, $A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n\left(C^1(\overline{\Omega})\right)$, $A\xi \cdot \xi \geq |\xi|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $f - a_0 u \in L^2(\Omega)$ parce que $(f, a_0, u) \in L^2(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \times L^2(\Omega)$, et

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega (f - a_0 u) vdx, \ \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

En exploitant le théorème 3.8 pour $(m, V) = \big(0, H^1(\Omega)\big)$, on en déduit que $u \in H^2(\Omega)$. $\boxed{\textbf{2 pts}}$

Ensuite, on montre que : $-\mathrm{div}(A\nabla u) + a_0 u = f$ p.p. dans Ω. En utilisant le fait que $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, on a, pour tout $\varphi \in D(\Omega)$,

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi dx + \int_\Omega a_0 u\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx \;\Rightarrow\; \langle -\mathrm{div}(A\nabla u) + a_0 u, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle.$$

D'où

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) + a_0 u = f \quad \text{dans } \Omega, \text{ au sens des distributions.} \quad \boxed{\mathbf{0,75\ pt}}$$

D'autre part, on a : $f \in L^2(\Omega)$, $\mathrm{div}(A\nabla u) \in L^2(\Omega)$ car $(A, u) \in M_n(\mathbb{R}) \times H^2(\Omega)$ et $a_0 u \in L^2(\Omega)$ car $(a_0, u) \in L^\infty(\Omega) \times L^2(\Omega)$, donc : $-\mathrm{div}(A\nabla u) + a_0 u = f$ p.p. dans Ω. $\boxed{\mathbf{0,75\ pt}}$

Pour terminer, on montre que : $\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. En appliquant la formule de Green (en sens inverse), on obtient

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(A\nabla u) v dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_A}\right)(\gamma_0 v) d\sigma + \int_\Omega a_0 u v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Du fait que $-\mathrm{div}(A\nabla u) + a_0 u = f$, ceci se réduit à

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_A}\right) \gamma_0 v d\sigma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Compte tenu du corollaire 2.12, ceci donne $\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = 0$, i.e. $\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. $\boxed{\mathbf{1,5\ pts}}$

Exercice 2 (4+2=6 points)

1) Il s'agit de résoudre le problème de valeurs propres variationnel suivant

$$(\mathrm{PVPV}) \begin{cases} \text{trouver } (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times (H_0^1(I) \setminus \{0\}) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_I a_1 u' v' dx + \int_I a_0 u v dx = \lambda \int_I u v dx \;\; \forall v \in H_0^1(I). \end{cases} \qquad \boxed{\mathbf{1\ pt}}$$

En posant $V = L^2(I)$, $W = H_0^1(I)$, $a(u, v) = \int_I a_1 u' v' dx + \int_I a_0 u v dx$, $\forall (u, v) \in W^2$,

le problème (PVPV) devient : $(\mathrm{PVPV}) \begin{cases} \text{trouver } (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times (W \setminus \{0\}) \text{ tel que} \\ a(u, v) = \lambda (u|v)_V \;\forall v \in W. \end{cases}$

Montrons que toutes les conditions du théorème 5.5 sont satisfaites. Selon la remarque 5.10, les conditions DSV1 à DSV4 sont satisfaites. $\boxed{\mathbf{0,25\ pt}}$

Montrons que les conditions DSV5 et DSV6 sont également satisfaites. Pour tout $(u, v) \in W^2$, on a $(a_1, u', v') \in L^\infty(I) \times L^2(I)^2 \;\Rightarrow\; (a_1 u', v') \in L^2(I)^2 \Rightarrow a_1 u' v' \in L^1(I)$ et

$$\left|\int_I a_1 u' v' dx\right| \leq \|a_1 u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} \leq \|a_1\|_{L^\infty(I)} \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} \leq \|a_1\|_{L^\infty(I)} \|u\|_W \|v\|_W,$$

$(a_0, u, v) \in L^\infty(I) \times L^2(I)^2 \;\Rightarrow\; (a_0 u, v) \in L^2(I)^2 \Rightarrow a_0 u v \in L^1(I)$ et

$$\left|\int_I a_0 u v dx\right| \leq \|a_0 u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq \|a_0\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq \|a_0\|_{L^\infty(I)} \|u\|_W \|v\|_W.$$

On en déduit que $a(\cdot,\cdot)$ est une application bien définie de $W \times W$ dans $\mathbb{R}$ et que

$$|a(u, v)| \leq \big(\|a_1\|_{L^\infty(I)} + \|a_0\|_{L^\infty(I)}\big) \|u\|_W \|v\|_W, \quad \forall (u, v) \in W^2.$$

La bilinéarité et la symétrie de $a(.,.)$ étant claires, on conclut que les conditions DSV5 et DSV6 sont satisfaites. $\boxed{\mathbf{1,25\ pts}}$

Passons à la condition DSV7. Pour tout $u \in W$, on a, en utilisant le fait que $a_1(x) \geq \beta_1$ et $a_0(x) \geq \beta_0$ p.p. $x \in I$ ainsi que l'inégalité de Poincaré (voir la proposition 2.18),

$$a(u,u) = \int_I a_1(u')^2 dx + \int_I a_0 u^2 dx \geq \beta_1 \|u'\|^2_{L^2(I)} + \beta_0 \|u\|^2_{L^2(I)} \geq \beta_1 \|u'\|^2_{L^2(I)} =$$

$$\frac{\beta_1}{2}\left(\|u'\|^2_{L^2(I)} + \|u'\|^2_{L^2(I)}\right) \geq \frac{\beta_1}{2}\left(\|u'\|^2_{L^2(I)} + 2\|u\|^2_{L^2(I)}\right) \geq \frac{\beta_1}{2}\|u\|^2_W ,$$

donc $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur W. $\boxed{\mathbf{1,5\ pts}}$

Les conditions requises étant toutes satisfaites, nous concluons grâce au théorème 5.5 qu'il existe une suite croissante $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ et une base hilbertienne $(e_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(I)$ telles que

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty, \ \ (e_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \subset H_0^1(I) \ \text{ et},$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \ \int_I a_1 (e_m)' v' dx + \int_I a_0 e_m v dx = \lambda_m \int_I e_m v dx \ \ \forall v \in H_0^1(I).$$

2) Selon la proposition 5.8, on a

$$\lambda_1 = \min_{u\in H_0^1(I)\setminus\{0\}} \frac{a(u,u)}{\|u\|^2_{L^2(I)}} = \min_{u\in H_0^1(I)\setminus\{0\}} \frac{\int_I a_1(u')^2 dx + \int_I a_0 u^2 dx}{\|u\|^2_{L^2(I)}}. \ \ \boxed{\mathbf{0,5\ pt}}$$

D'autre part, en utilisant le fait que $a_1(x) \geq \beta_1$ et $a_0(x) \geq \beta_0$ p.p. $x \in I$ ainsi que l'inégalité de Poincaré, on a, pour tout $u \in H_0^1(I) \setminus \{0\}$,

$$\frac{\int_I a_1(u')^2 dx + \int_I a_0 u^2 dx}{\|u\|^2_{L^2(I)}} \geq \frac{\beta_1 \|u'\|^2_{L^2(I)} + \beta_0 \|u\|^2_{L^2(I)}}{\|u\|^2_{L^2(I)}} \geq \frac{2\beta_1 \|u\|^2_{L^2(I)} + \beta_0 \|u\|^2_{L^2(I)}}{\|u\|^2_{L^2(I)}} = 2\beta_1 + \beta_0.$$

D'où $\lambda_1 \geq 2\beta_1 + \beta_0$. Comme $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, alors : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \ \lambda_m \geq 2\beta_1 + \beta_0$. $\boxed{\mathbf{1,5\ pts}}$