Universitaire Larbi Ben M'hidi O.E.B 7 Jan 2024

Département de MI Durée : 1,5 h

L'examen Final -Analyse 3-

Exercice 01 : 04

Etudier la nature de chacune de séries numériques suivantes

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$, 02 2) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^{\alpha n}}$; $\alpha \in \mathbb{R}$. 02

9

Exercice 02 : 10

I) Considérons la suite de fonctions suivante

$$f_n(x) = nxe^{-nx}, \ \ x \geq 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

1) Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}^+$. 02
2) Démontrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$. 02
3) Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ où $0 < a < b$. 1,5

II) Considérons la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g_n(x)$ avec

$$g_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n+x}, \ \ x \geq 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

1) Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 0} g_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$. 1,5

2) Démontrer que $g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{n^2+nx}$, en déduire que la série $\sum_{n\geq 0} g_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. 01 + 1

Exercice 03 : 07

Considérons la série entière suivante

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-n+4}{n+1} x^n.$$

1) Déterminer le domaine de convergence de cette série. 01 + 01
2) Déterminer le réel $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{n^2-n+4}{n+1} = (n+1) - 3 + \frac{a}{n+1}.$$ 01

3) Calculer la somme $S(x)$ de cette série. 1,5
4) Considérons la fonction suivante

$$h(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}, \qquad x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}.$$

a) Démontrer l'égalité suivante 01

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{2-x}.$$

b) développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $h(x)$. 1,5

Correction EXAMEN II

Exo 1

1) $\frac{n}{n^3+1} \underset{V(+\infty)}{\sim} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$, et $\sum \frac{1}{n^2}$ Serie de Riemann $\alpha = 2 > 1$ Converge

alors $\sum \frac{n}{n^3+1}$ Converge d'après T.C.

2) On utilise la règle de D'Alembert, on obtient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left[(n+1)!\right]^\alpha}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^\alpha} = \frac{(n+1)^\alpha (n!)^\alpha . (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n!)(n!)^\alpha} = \frac{(n+1)^\alpha}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \alpha = 2 \Rightarrow \text{La Serie Converge} \\ +\infty & \alpha > 2 \Rightarrow \text{" diverge} \\ 0 & \alpha < 2 \Rightarrow \text{" Converge} \end{cases}$$

3) On utilise le critère de Liebniz car la série est une série alternée à partir d'un certain rang ; On pose $a_n = \frac{\ln n}{n}$ $n \geq 1$

et $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $x \geq 1$, la fonction associé à la suite $(a_n)_{n\geq 1}$

On a $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ donc $f(x)$ est décroissante $\forall x \geq 1 \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante et $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ Converge d'après Liebnitz.

Exo 2

I

1) Si $x = 0$, $\varphi_n(0) = 0$

Si $x \in]0,1[$ $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n \ln x = 0 \Rightarrow (\varphi_n)$ C.S vers $\varphi(x) = 0$

Si $x = 1$ $\varphi_n(1) = 0$

2) $\varphi_n(x)$ est une fonction dérivable sur $]0,1]$ et on a

$$\varphi_n'(x) = x^{n-1}(1+n\ln x) \text{ et } \varphi_n'(x)=0 \iff x = e^{-1/n}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & e^{-1/n} & & 1 \\
\hline
\varphi_n'(x) & & + & 0 & - & \\
\hline
\varphi_n(x) & 0 & \nearrow & \varphi_n(e^{-1/n}) & \searrow & 0
\end{array}$$

Donc $\sup\limits_{x\in[0,1]} |\varphi_n(x)| = \varphi_n(e^{-1/n}) = \dfrac{1}{ne} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \Longrightarrow (\varphi_n)$ C.U sur $[0,1]$ vers $\varphi(x)=0$.

II) 1) En utilisant le critère de D'Alembert, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}\times\frac{n}{x^n\ln x}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{nx}{n+1} = x < 1$$

Si $x=1$ $\quad f_n(1) = \dfrac{g_n(1)}{n} = 0 \Rightarrow \sum f_n$ C.S sur $[0,1]$.

2) On a $f_n(x) = \dfrac{g_n(x)}{n} \Rightarrow |f_n(x)| = \dfrac{|g_n(x)|}{n} \Rightarrow \sup|f_n(x)| = \dfrac{\sup|g_n(x)|}{n}$

$\Rightarrow \sup|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2e}$ $\quad \sum f_n$ C.N sur $[0,1]$.

et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$) converge $\Rightarrow$

3) Comme $\sum f_n$ C.N sur $[0,1]$ donc elle C.unif sur $[0,1] \Rightarrow$ on peut intégrer terme à terme et on a

$$\int_0^1 \sum_{n\geq1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n\geq1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{x^n\ln x}{n}\,dx = \sum\left\{\left[\frac{x^{n+1}\ln x}{n(n+1)}\right]_0^1 - \frac{1}{n(n+1)}\int_0^1 x^n\,dx\right\}$$

$$= \sum_{n\geq1}^{+\infty}\frac{-1}{n(n+1)^2}.$$

4) a) En utilisant la décomposition en éléments simples, on a

$$\frac{-1}{n(n+1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{(n+1)^2} \Rightarrow a=-1,\ b=c=1$$

par identification.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} - 1 \quad (\text{série télescopique}) \quad \left(u_n = \frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{n\geq1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n\geq2}\frac{1}{n^2} = \sum_{n\geq1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

$$-\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right) + \sum \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 2.$$

Exo3 $\quad a_n = \dfrac{n^2-n+4}{n+1}$

1) $$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-n+4}{n+1}\times\frac{n+2}{(n+1)^2-(n+1)+4}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{n^3} = 1$$

Si $|x|=1$ la serie est grossierement divergente $\Rightarrow$ la serie est absolument convergente sur $]-1,1[$.

2) par identification, on obtient $\alpha = 6$. c-à-d

$$\frac{n^2-n+4}{n+1} = n-2+\frac{6}{n+1}.$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(n-2+\frac{6}{n+1}\right)x^n = \sum_{n\geq 0}^{+\infty}(n+1)x^n - 3\sum_{n\geq 0} x^n + \frac{6}{x}\sum_{n\geq 0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$$= \sum_{n\geq 1}^{+\infty} n x^{n-1} - \frac{3}{1-x} + \frac{6}{x}\int \sum_{n\geq 0}^{+\infty} x^n\,dx$$

$$= \left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} x^n\right)' - \frac{3}{1-x} + \frac{6}{x}\int\frac{1}{1-x}\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)' - \frac{3}{1-x} - \frac{6}{x}\ln(1-x) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{3}{1-x} - \frac{6}{x}\ln(1-x)$$

3) Par la décomposition en éléments simples, on obtient directement que $a=-1$, $c=1$, $b=-1$

$$f(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x/2}.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} x^n \qquad |x|<1$$

et $$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}^{+\infty}(n+1)x^n \qquad |x|<1$$

et $$\frac{1}{1-x/2} = \sum_{n\geq 0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n} \qquad |x|<2$$

Alors

$$f(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty}\left(-n-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n, \qquad |x|<1.$$

Correction EXAMEN II

Exo 1

1) On a $\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ serie de Rieman $\alpha = \frac{3}{2} > 1$

Converge, alors $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ Converge d'après T.C.

3) On utilise le critère de D'Alembert, On obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{a(n+1)}} \times \frac{n^{an}}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) \frac{n^{an}}{(n+1)^{a(n+1)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (n+1) \frac{n^{an}}{(n+1)^{an}} \cdot \frac{1}{(n+1)^a} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} \frac{1}{(n+1)^{a-1}} = \frac{e^{-a}}{\lim_{n\to+\infty} (n+1)^{a-1}}$$

* Si $a > 1$. $\lim_{n\to+\infty} (n+1)^{a-1} = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0 < 1 \Rightarrow$ La serie Conv

* Si $a < 1$ $\lim_{n\to+\infty} (n+1)^{a-1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = +\infty \Rightarrow$ La Serie diverge.

* Si $a = 1$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-1} < 1 \Rightarrow$ La serie Converge.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{an}} = \lim \frac{1}{e^{\frac{a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}}} = \frac{1}{e^a} = e^{-a}.$$

2) $\sum \frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n\sqrt{n}} + \sum \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$

$\sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ serie de Rieman $\alpha = 3/2 > 1$ Converge.

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{n(n^{1/4})}} = \frac{\ln n}{n^{1/4}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Alors $\sum \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ Converge car $\sum \frac{1}{n n^{1/4}} = \sum \frac{1}{n^{5/4}}$ serie de Rieman $\alpha = \frac{5}{4} > 1$ Converge. (en utilisant le T.C).

Exo2

I) 1) si $x=0$ $\quad f_n(0)=0$

si $x>0$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} nx e^{-nx} = 0 \Rightarrow (f_n)$ C.S vers $f(x)=0$.

2) $(f_n(x))$ suite de fs dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$f_n'(x) = (n-n^2x)e^{-nx} = (1-nx)e^{-nx}$$ et on a

x	0		$1/n$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(1/n)$	$\searrow$	0

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \Rightarrow (f_n)$$ ne converge pas unif vers $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}_+$.

3) $x\in[a,b] \Rightarrow x\leq b \Rightarrow nx \leq nb$.

et $x \geq a \Rightarrow -nx \leq -na \Rightarrow e^{-nx} \leq e^{-na}$

donc $nx e^{-nx} \leq nb e^{-na}$

et $\sum nb e^{-na}$ série numérique converge, car : ×

d'après D'Alembert $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)b e^{-(n+1)a}}{nb\, e^{-na}} = \dfrac{n+1}{n} e^{-a} \xrightarrow{n\to+\infty} e^{-a} < 1$ car $a>0$

Alors $\sum nx e^{-nx}$ C.N sur $[a,b]$.

II) 1) En utilisant le critère de D'Alembert, on obtient :

$$\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)} = \frac{(n+1)x e^{-(n+1)x}}{(n+1)[n+1+x]} \times \frac{n(n+x)}{nx e^{-nx}} = \frac{x e^{-(n+1)x}}{(n+1+x)} \cdot \frac{n+x}{x e^{-nx}}$$

$$= \frac{n+x}{n+1+x} e^{-x} \longrightarrow e^{-x} < 1 \quad x>0$$

si $x=0$ $\quad g_n(0) = \dfrac{f_n(0)}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum g_n(x)$ C.S sur $\mathbb{R}_+$.

2) On a: $g_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{n+x} = \frac{n x e^{-nx}}{n(n+x)} = \frac{f_n(x)}{n(n+x)}$.

Donc $\sup_{x\in\mathbb{R}_+} g_n(x) = \sup\left\{\frac{f_n(x)}{n(n+x)}\right\} \leq \frac{\sup f_n(x)}{n^2} \leq \frac{e^{-1}}{n^2}$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ série de Riemann $\alpha=2>1$ converge $\Rightarrow \sum g_n$

c-n sur $\mathbb{R}_+$.

<u>Ex03</u>: $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$

1) $R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$.

si $x=1$, $\frac{1}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}$ série de Riemann converge.

si $x=-1$ $\sum\frac{(-1)^n}{n(n+2)}$ série alterné converge d'après Liebnitz.

donc la série converge absolument sur $[-1,1]$.

2) D'après la composition en elements simples on obtient $a=1/2$, $b=-1/2$.

Donc $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right]$.

3) $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)x^n\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\int \sum x^n dx\right) - \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=2}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right]$

$= \frac{-1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} - x - \frac{x^2}{2}\right)$

$= -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{-1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2x^2}\left(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}\right)$

$$\frac{-1}{2-x} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x/2} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2^n} = -\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n\geq 0}(2x)^n = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n .$$

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{(1-x/2)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1/2}{(1-x/2)^2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{2^{n+1}}$$

$$h(x) = -\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2^{n+1}} + \sum_{n\geq 0} 2^n x^n + \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{2^{n+1}}$$