Université Larbi ben M'hidi Oum EL Bouaghi
Département de Mathématiques et informatique

Examen : Systèmes dynamiques et introduction au chaos

Mastre 2. Option : Mathématiques Appliquées. Durée : 1h :15m. le 16/01/2024

Exercice 1 *(3pts)*

Question de cours : Expliquez la thèorème de Devaney d'un système dynamique chaotique ?

Exercice 2 *(6pts)*

Soit le système dynamique non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y - x\sqrt{x^2+y^2} \\ \dot{y} = -x + ay - y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \tag{1}$$

où a est un paramètre réel.

1) Calculer $x\dot{x} + y\dot{y}$ et en déduire le point fixe (x^*, y^*) du système (1).

2) Déterminer la matrice Jacobienne au point fixe (x^*, y^*) et déterminer les valeurs propres du point fixe (x^*, y^*)

3) Que pouvez-vous conclure sur la stabilité du point fixe pour $a > 0, a = 0, a < 0$ à partir de ces valeurs propres.

4) Montrer que lorsque $a < 0$ alors le point fixe (x^*, y^*) est asymptotiquement stable (Utiliser la fonction Lyapunov).

5) Utiliser les coordonnées polaires $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ et montrer que l'on obtient l'équation suivante

$$\begin{cases} \dot{r} = (a-r)r \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$$

Exercice 3 *(5.5pts)*

Soit le système dynamique continu non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = -(\alpha\cos x + \cos y)\sin x, \quad x \in [0,\pi] \\ \dot{y} = (\cos x - \alpha\cos y)\sin y, \quad y \in [0,\pi] \end{cases} \tag{2}$$

où α est un paramètre réel.

1) Trouver les points fixes (x^*, y^*)

2) Déterminer la matrice Jacobienne en fonction de α.

3) Pour les points fixes, trouvez les valeurs propres et évaluez leur stabilité.

4) Quel type de point fixe se trouve si $\alpha = 0$.

Exercice 4 *(5.5pts)*

Soit le système dynamique discret suivant :

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n}{1+x_n^2} - \beta x_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

où $x_n \in \mathbb{R}$ et β est un paramètre réel.

1) Déterminer les points fixes du système (3) et déterminer dans quels intervalles de β ils existent..

2) Déterminer $f'(x_n)$ et étudier la stabilité du point fixe non trivial dans l'intervalle de paramètres $\beta \in]-1, 0[$.

3) Supposons que la valeur de x_n est petite et positive $x_n \approx \epsilon$, puis montrer au premier ordre en ϵ qu'il existe point péroidique d'order 2 (deux cycles) à $\beta = 2$.

Bon courage Dr. Djeddi Kamel.