L'arbi Ben M'hidi University

Faculty: Exact sciences , natural and life sciences
Department: MI
Academic year: 2023/2024
Module Algebra 1

Correction of Exam n^0 1

Exercice 1: (7 **pts**)
1) Montrons que

$$(P \vee Q) \wedge R \Longleftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$(P \vee Q) \wedge R$	$(P \wedge R)$	$(Q \wedge R)$	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0

(5 PTS)

(1 **pts pour chaque colonne)**
2) Montrons par récurrence que

$$\forall n \geq 1,\ \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

- Pour $n_0 = 1$, on a la proposition donnée est vraie car

$$\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{1+1}.........\text{(0.5 \textbf{pts})}$$

- Supposons que

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

est vraie et on montre que

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}=1-\frac{1}{n+2}$$

On a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)} \\
= & \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)} \\
= & 1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)} \\
= & 1+\frac{-(n+2)+1}{(n+1)\times(n+2)} \\
= & 1+\frac{-n-1}{(n+1)\times(n+2)} \\
= & 1+\frac{-(n+1)}{(n+1)\times(n+2)} \\
= & 1-\frac{1}{n+2}\text{......................}(1.5\ \textbf{pts})
\end{aligned}$$

<u>**Exercice 2 :**</u> (6 **pts**)

1. Soit la relation $\boldsymbol{R}$ définie :

$$\forall (x,y),\ (x',y')\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\ \boldsymbol{R}\ (x',y') \Leftrightarrow \exists a>0,\ \exists b>0,\quad x'=ax,\ y'=by.$$

Montrons que $\boldsymbol{R}$ est une relation d'équivalence.

i) Pour montrer que $\boldsymbol{R}$ est reflexive on montre que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\,\boldsymbol{R}\,(x,y)\text{ .... }(0.\mathbf{5}\ \textbf{pts})$$

on a $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=1.x$ et $y=1.y$ donc $(x,y)\,\boldsymbol{R}\,(x,y)$ **...............**(1.0 **pts**)

ii) Pour montrer que $\boldsymbol{R}$ est symétrique on montre que

$$\forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\,\boldsymbol{R}\,(x',y')\Rightarrow (x',y')\,\boldsymbol{R}\,(x,y)\text{ .... }(0.\mathbf{5}\ \textbf{pts})$$

On a

$(x,y)\ \boldsymbol{R}\ (x',y') \Rightarrow \exists a>0, \exists b>0,\ \ x'=ax,\ y'=by.$

$\Rightarrow x=\frac{1}{a}x',\ y=\frac{1}{b}y'$ avec $\frac{1}{a}>0,\ \frac{1}{b}>0.$

$\Rightarrow (x',y')\ \boldsymbol{R}\ (x,y)$

$\Rightarrow \boldsymbol{R}$ est symétrique**...............**(1.0 **pts**)

iii) Pour montrer que $\boldsymbol{R}$ est transitive on montre que

$$\forall (x,y),(x',y'),(x",y")\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\,\boldsymbol{R}\,(x',y')\ et\,(x',y')\,\boldsymbol{R}\,(x",y")\Rightarrow (x,y)\,\boldsymbol{R}\,(x",y")\text{ .... }(0.\mathbf{5}\ \textbf{pts})$$

On a $(x,y)\ \boldsymbol{R}\ (x',y') \Rightarrow \exists a>0, \exists b>0,\ \ x'=ax,\ y'=by$

et

$(x',y')\ \boldsymbol{R}\ (x",y") \Rightarrow \exists a'>0, \exists b'>0,\ \ x"=a'x',\ y"=b'y'$

$\Rightarrow x"=(a'a)\,x,\ y"=(b'b)\,y$ avec $a'a>0,\ b'b>0.$

donc $(x,y)\,\boldsymbol{R}\,(x",y")$et $\boldsymbol{R}$ est transitive**..............**(1.0 **pts**)
et par conséquence $\boldsymbol{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Déterminer la classe d'équivalence de $(1,0)$.
On a

$$\begin{aligned}\overline{(1,0)} &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (1,0)\,\boldsymbol{R}\,(x,y)\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \exists a>0,\ \exists b>0,\quad x=a.1,\ y=b.0\right\} \\ &= \left]0,+\infty\right[\times\{0\}\,.............\,(1.5\ \textbf{pts})\end{aligned}$$

<u>**Exercice 3:**</u>(7 **pts**)
1. Soit $G=\mathbb{R}^2$, on définit la loi de composition interne $*$ par

$$(x,y)\ \ *\ \ (x',y') = \left(x+x', ye^{x'}+y'e^{-x}\right)$$

Montrons que $(G,*)$ est un groupe.
i. L'élément neutre (2.0 **pts**)
Soit (e_1,e_2) l'élément neutre de G,alors

$$\forall\,(x,y)\in G\ :(x,y)*(e_1,e_2)=(e_1,e_2)*(x,y)=(x,y)\,..........\,(0.5\ \textbf{pts})$$

$\Rightarrow (x,y)*(e_1,e_2)=(x+e_1,ye^{e_1}+e_2e^{-x})=(x,y)$.
$\Rightarrow x+e_1=x$ et $ye^{e_1}+e_2e^{-x}=y$.
$\Rightarrow e_1=0$ et $y+e_2e^{-x}=y$
$\Rightarrow e_1=0$ et $e_2e^{-x}=0$
$\Rightarrow e_1=0$ et $e_2=0$ car $e^{-x}>0$
$\Rightarrow (e_1,e_2)=(0,0)$ est l'élément neutre de G........... (1.5 **pts**)
ii. L'élément symétrique (2.0 **pts**)
Soit (x',y') l'élément symétrique de (x,y), alors on a :

$$(x,y)*(x',y')=(x',y')*(x,y)=(e_1,e_2)\,..........\,(0.5\ \textbf{pts})$$

$\Rightarrow \left(x+x', ye^{x'}+y'e^{-x}\right)=(0,0)$.
$\Rightarrow x+x'=0$ et $ye^{x'}+y'e^{-x}=0$.
$\Rightarrow x'=-x$ et $ye^{-x}+y'e^{-x}=0$
$\Rightarrow x'=-x$ et $(y+y')\,e^{-x}=0$
$\Rightarrow x'=-x$ et $y+y'=0$ car $e^{-x}>0$
$\Rightarrow x'=-x$ et $y'=-y$
$\Rightarrow (x',y')=(-x,-y)$ est l'élément symétrique de (x,y).......... (1.5 **pts**)
iii. L'associativité (2.0 **pts**)
Soit (x,y), (x',y'), $(x",y")$ des éléments de G, montrons que

$$[(x,y)*(x',y')]*(x",y")=(x,y)*[(x',y')*(x",y")]\,............\,(0.5\ \textbf{pts})$$

On a

$[(x,y)*(x',y')]*(x",y") = \left(x+x', ye^{x'}+y'e^{-x}\right)*(x",y")$

$= \left(x+x'+x", \left(ye^{x'}+y'e^{-x}\right)e^{x"}+y"e^{-\left(x+x'\right)}\right) = \left(x+x'+x", ye^{x'+x"}+y'e^{x"-x}+y"e^{-x'-x}\right)$ .... (1)

$(x,y)*[(x',y')*(x",y")] = (x,y)*\left(x'+x", y'e^{x"}+y"e^{-x'}\right)$

$= \left(x+x'+x", ye^{\left(x'+x"\right)}+\left(y'e^{x"}+y"e^{-x'}\right)e^{-x}\right) = \left(x+x'+x", ye^{x'+x"}+y'e^{x"-x}+y"e^{-x'-x}\right)$ .... (2)

Donc (1) = (2) et par suite $*$ est associative..........(1.5 **pts**)

On conclut que $(G\ ,*)$ est un groupe.

2. $(G,*)$ n'est pas un groupe commutatif car

$$(1,0)\ *\ (0,1) = \left(1,e^{-1}\right) \text{ mais } (0,1)\ *\ (1,0) = \left(1,e^{1}\right)$$ .... (1.0 **pts**)

Bonne chance.

Rezzag.S