جامعة العربي بن مهيدي - أم البواقي — السنة الجامعية: $2023-2024$

قســـــم الريـــــاضيـــــات — مقـــــــرر التوزيعات

الإمتحان الأول (المدة: ساعة و نصف)

التمرين الأول (5 **نقاط**):

نعتبر في المستوي $\mathbb{R}^2$ المزود بالنظيم الإقليدي $\|\cdot\|$، التطبيق $f : B(0,1) \to \mathbb{R}$ المعرف بـ $f(x) = \dfrac{x_1}{\|x\|}$.

١. بمفهوم التوزيعات أحسب المشتقات التالية $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$.

٢. من أجل أي قيمة لـ $p \in [1, +\infty[$ يكون f في $W^{1,p}(B(0,1))$؟

التمرين الثاني (5 **نقاط**):

ليكن $N \geq 1$، $m \in \mathbb{N}$ و $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$. نعتبر المؤثر التفـــــاضلي التالي: $A = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$.

مع $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$ و $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N}$.

١. بين أن المؤثر معرف جيد من $H^m(\mathbb{R}^N)$ نحو $H^{-m}(\mathbb{R}^N)$.

٢. من الواضح أن المؤثر السابق خطي، هل هو مستمر؟

[تذكير: ليكن E و F فضاءات شعاعية نظيمية، من المعروف أن نظيم التطبيق الخطي و المستمر $f : E \to E$ يعطى بـ $\|\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$.]

٣. لاحظ أن $\|Au\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^N)} \geq \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}$ استنتج أن المؤثر متباين و باستعمال نظرية ريس بين أن المؤثر غامر.

٤. استنتج أنه من أجل كل $f \in H^{-m}(\mathbb{R}^N)$ المعادلة $Au = f$ تقبل حلا وحيدا .

التمرين الثالث (5 **نقاط**):

ليكن $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ فضاءين شعاعين جزئيين من $D'(\mathbb{R}^N)$ بحيث: $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^N), \forall u \in \mathcal{A}, \forall v \in \mathcal{B} : \varphi \cdot u \in \mathcal{A}, \varphi \cdot v \in \mathcal{B}$.

و ليكن

$$f \,:\, (\mathcal{A} \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)) \cdot (\mathcal{B} \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \quad : \quad (u,v) \longmapsto f(u,v)$$

ثنائي الخطية بحيث $supp\, f(u,v) \subset supp\, u + supp\, v$. عندئذ إذا وضعنا

$$\mathcal{C} = \{(u,v) \in \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}, \text{متزاوجان} (supp\, u, supp\, v)\}$$

عندئذ يمكن تمديد التطبيق f إلى

$$\tilde{f} \,:\, \mathcal{C} \to D'(\mathbb{R}^N) \quad : \quad (u,v) \longmapsto \tilde{f}(u,v)$$

المطلوب: باستعمال التمديد السابق هل يمكن إعطاء تبرير للتعميمات المقدمة في الدرس لجداء التزاوج في $D'(\mathbb{R}^N)$.

بالتوفيق

جامعة العربي بن مهيدي - أم البواقي   2023 - 2024

قسم الرياضيات   التوزيعات 02

+0,75

التصحيح النموذجي

التمرين 01: (8 نقاط)

$$f : \overset{\overset{B}{\shortparallel}}{B(0,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x=(x_1,x_2) \longmapsto f(x) = \frac{x_1}{\|x\|}$$

1) من أجل كل $\varphi \in D(B)$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} f, \varphi \right\rangle_{D',D} = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle_{D',D} \quad (1)$$

$$= -\int_{B(0,1)} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

(1)

$$-\int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \underbrace{\int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{(x_1)^2}{\|x\|^3} \right) \varphi}_{(*)} + \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{x_1}{\|x\|} \varphi \nu_1}_{(**)}$$

$\nu=(\nu_1,\nu_2)$ هو الشعاع الناظمي على سطح الكرة $B(0,\varepsilon)$.

(1) الطرف (**) يمكن حصره بتابع يؤول الى 0 مع $\varepsilon \to 0$

الطرف (*) يمكن المرور الى النهاية لأن التابع قابل للمكاملة في 0.

أي:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle_{D',D} = \int_{B(0,1)} \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{(x_1)^2}{\|x\|^3} \right) \varphi \, dx$$

ومنه المشتق للتابع f حسب x_1 بمفهوم التوزيعات ممثل ب $\Rightarrow \dfrac{x_2^2}{\|x\|^3}$ (2)

وبنفس الطريقة يمكن اثبات أن : $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ معرف بمفهوم التوزيعات

ممثل بالتابع القابل للمكاملة محليا : $-\frac{x_1 x_2}{\|x\|}$ ½

② من الواضح أن $f \in L^p(B(0,1))$ ومن أجل p نجد أن :

$$\int_{B(0,1)} \left| \frac{x_2^2}{\|x\|^3} \right|^p = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{(r|\sin\theta|)^{2p}}{r^3}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} |\sin\theta|^{2p} d\theta \int_0^1 r^{1-p}$$

التكامل متقارب $1-p>-1 \iff \boxed{p<2}$ (1)

بنفس الطريقة $\frac{\partial f}{\partial x_2} \in L^p(B(0,1))$ معناه (1) $p<2$

التمرين 02 : (5 نقاط)

①

$$A = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}.$$

$$A : H^m(\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^{-m}(\mathbb{R}^N)$$

في المؤثر A يشتق $2m$ مرة كأقصى رتبة وبالتالي الأس ينزل بـ $2m$ أي $H^{m-2m}(\mathbb{R}^N) \equiv H^{-m}(\mathbb{R}^N)$. فهو φ في $H^{-m}(\mathbb{R}^N)$ (1)

② * A خطي (واضح)

* A مستمر لأن :

$$\|Au\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{v\neq 0} \frac{|\langle Au, v\rangle_{H^{-m},H^m}|}{\|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}}$$

$$= \sup_{v\neq 0} \frac{\left|\left\langle \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u, v\right\rangle_{H^{-m},H^m}\right|}{\|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}}$$

$$= \sup_{v\neq 0} \frac{\left|\sum_{|\alpha|\le m} \langle \overbrace{D^\alpha u}^{\in L^2}, \overbrace{D^\alpha v}^{\in L^2}\rangle_{H^{-m},H^m}\right|}{\|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}}$$

$$= \sup_{v\neq 0} \frac{\left|\sum_{|\alpha|\le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right|}{\|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}}$$

1,0

$$= \sup_{v\neq 0} \frac{|(u,v)_{H^m}|}{\|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}} \le \sup_{v\neq 0} \frac{\cancel{\|v\|_{H^m}}\|u\|_{H^m}}{\cancel{\|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}}}$$

$$= \|u\|_{H^m}.$$

ومنه

$$\forall u \in H^m(\mathbb{R}^n):\ \|Au\|_{H^{-m}} \le \|u\|_{H^m}$$

ولإثبات الإيزومتري ،

② ومن خواص sup أن

$$\|Au\|_{H^{-m}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{v\neq 0} \frac{|(u,v)_{H^m}|}{\|v\|_{H^m}} \ge \frac{|(u,u)_{H^m}|}{\|u\|_{H^m}} = \frac{\|u\|^2_{H^m}}{\|u\|_{H^m}} = \|u\|_{H^m}.$$

ومنه

$$\|Au\|_{H^{-m}} = \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \quad (1)$$

ومنه العلاقة بين أن التطبيق A متباين.

A غامر ؟ ليكن $T \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$

حسب ريس

$$\exists!\, u_0 \in H^m(\mathbb{R}^n) : \langle T, v\rangle = (u_0, v)_{H^m}, \ \forall v \in H^m(\mathbb{R}^n)$$

من ما سبق

$$= \langle Au_0, v\rangle \quad (2)$$

$$\Leftarrow \quad T = Au_0$$

---

4) المعادلة $Au = f$ تقبل حلا وحيدا لأن A غامر ومتباين

اذن هو تقابل ـ (1)

التمرين 03: (7 نقاط)

لنبدأ بالكتابة

$$T * \varphi = ?$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} T(y)\,\varphi(x-y)\,dy$$

كما رأينا في الدرس لا معنى لها لأن T ليس تابعا عموما.

فكرة: $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$

نضع: $\varphi(-x) = \check{\varphi}(x)$

$\tau_a \varphi(x) = \varphi(x-a)$

$$f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\,\varphi(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\,\tau_x \check{\varphi}(y)\,dy$$

تابع اختياري
من أجل x ومثبت.

$$= \langle f, \tau_x \check{\varphi} \rangle_{D', D}$$

وبالتالي وضعنا التعريف التالي (مقدم في الدرس).

تعريف (*): ليكن $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^N)$ نضع:

$$T * \varphi(x) = \langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle_{D', D}$$

1

* ← 1 الآن نفسر البرهنة المقدمة في ذمن الامتحان.

$A = D'(\mathbb{R}^N)$ ، $B = \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ و $f(u,v) = u * v$ مع ملاحظة

$$A \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$$

$$B \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) = D(\mathbb{R}^N)$$

2

وهكذا نمكن تمديد التطبيق

$$f : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \times D(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$$
$$(T, \varphi) \longmapsto T * \varphi$$

(المقدم في التعريف (*))

إلى

$$\tilde{f} : \mathcal{C} \longrightarrow D'(\mathbb{R}^N)$$
$$(u,v) \longrightarrow \tilde{f}(u,v) = u * v$$

$\mathcal{E} = \{(\varphi, u) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), (\operatorname{supp}\varphi, \operatorname{supp} u)$ متراجحان $\}$:مع

② ناخذ في نفس النظرية المقدمة في الامتحان
بكون $A = B = \mathcal{D}'$

$A \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ و $B \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

$f : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ التمديد

يمدد الى ②

$\tilde{f} : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$(\varphi, u) \longmapsto \tilde{f}(\varphi, u) = \varphi * u$

ملاحظة: انطلاقا من النظرية (*) الذي يعطي معنى لجداء زوج تابوتين مع توزيع من الحامل.
استطعنا بتوظيف النظرية المقدمة في نص الامتحان الى اعطاء معنى لجداء توزيعين.

①