2éme année Master maths

Corrigé type-contrôle (Processus aléatoires et Fiabilité)

Exercice 1. *On considère une chaîne de Markov* $(X_n)_{n\geq 0}$ *d'espace d'états* $E = \{1,2,3,4,5\}$ *de matrice de transition* P *donnée par*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1- Graphe de cette chaine ***(Voir Figure Graphe de la chaine)..................(0.5 points)***

2- Déterminer les classes d'équivalences : *On a*

$C_1 = \{1\}$ *car* 1 *conduit à tous les autres états* $\left(P_{1,2} = P_{1,3} = P_{1,4} = P_{1,5} = \frac{1}{4} \neq 0\right)$ *mais aucun état conduit à* 1 $\left(P_{2,1}^{(n)} = P_{3,1}^{(n)} = P_{4,1}^{(n)} = P_{5,1}^{(n)} = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\right)$ *donc* 1 ***ne communique pas*** *avec les autres états*.................. ***(0.5 points)***

$C_2 = \{2\}$ *car* 2 *conduit à* 3, 4 *et* 5 $\left(P_{2,3} = \frac{1}{2} \neq 0, P_{2,4} = \frac{1}{2} \neq 0, P_{2,5}^{(2)} = \frac{1}{2} \neq 0\right)$ *mais aucun état conduit à* 2 $\left(P_{3,2}^{(n)} = P_{4,2}^{(n)} = P_{5,2}^{(n)} = 0 \forall n \in \mathbb{N}\right)$ *donc* 2 ***ne communique pas*** *avec les autres états*.................. ***(0.5 points)***

$C_3 = \{3\}$ *car* 3 *conduit* 4 *et* 5 $\left(P_{3,4} = \frac{3}{4} \neq 0, P_{3,5} = \frac{1}{4} \neq 0\right)$ *mais aucun état conduit à* 3 $\left(P_{4,3}^{(n)} = P_{5,3}^{(n)} = 0 \forall n \in \mathbb{N}\right)$ *donc* 3 ***ne communique pas*** *avec les autres états*.................. ***(0.5 points)***

$C_4 = \{4\}$ *car* 4 *conduit* 5 $\left(P_{4,5} = \frac{3}{4} \neq 0\right)$ *mais* 5 *ne conduit pas à* 4 $\left(P_{5,4}^{(n)} = 0 \forall n \in \mathbb{N}\right)$ *donc* 4 ***ne communique pas*** *avec les autres états*.................. ***(0.5 points)***

$C_5 = \{5\}$ *car* 5 *ne conduit à aucun autre état et* 5, $P_{5,5} = 1$ *donc* 5 ***ne communique pas*** *avec les autres états*.................. ***(0.5 points)***

3- La chaine est-elle irréductible *: Comme la chaine possède* 5 *classes d'équivalence alors elle n'est pas irréductible*.................. ***(0.5 points)***

4- déterminer les périodes de chaque états