Corrigé de l'examen 2 : Introduction à la topologie

Solution 1 16 pts

1. Soit $f : X \to Y$ une application et τ une topologie sur Y. On pose $\tau' = \{f^{-1}(O) \ ; O \in \tau\}$.

   - Montrons d'abord que τ' est une topologie sur X.

0,5 - $\varnothing, Y \in \tau$, donc $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $f^{-1}(Y) = X$ sont des éléments de τ'.

0,75 - Soient $U_1, U_2 \in \tau'$. Alors, il existe $O_1, O_2 \in \tau$ tels que $U_1 = f^{-1}(O_1)$ et $U_2 = f^{-1}(O_2)$. Par conséquent, $U_1 \cap U_2 = f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2) = f^{-1}(O_1 \cap O_2) \in \tau'$ car $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

0,75 - Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de τ'. Alors, il existe une famille $(O_i)_{i\in I}$ d'éléments de τ telle que $U_i = f^{-1}(O_i)$ pour tout $i \in I$. Par conséquent, $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(O_i) = f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i\in I} O_i\right) \in \tau'$ puisque $\bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \tau$.

0,75 • Observons que l'application $f : (X, \tau') \to (Y, \tau)$ est continue puisque, par construction de τ', l'image réciproque par f de tout ouvert de (Y, τ) est un ouvert de (X, τ').

0,75 Vérifions que τ' est la topologie minimale sur X pour laquelle f est continue. Soit τ'' une autre topologie sur X pour laquelle f est continue. Alors, $\forall O \in \tau$, $f^{-1}(O) \in \tau''$ ce qui signifie que tout élément de τ' appartient à τ'', i.e. $\tau' \subset \tau''$.

   <u>*Conclusion*</u>. τ' est la topologie la moins fine sur X pour laquelle f est continue.

2. Soit X un ensemble non vide quelconque. On note $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les applications $f : X \to \mathbb{R}$ bornées. Pour $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, on note $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

   - Soient $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, alors il existe $C_f > 0$ et $C_g > 0$ telles que

$$\forall x \in X : \ |f(x)| \leq C_f \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq C_g.$$

0,75 Par suite

$$\forall x \in X : \ |f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq C_f + C_g.$$

   Ainsi, l'application $f - g$ est bornée et donc $\sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)| < +\infty$, ce qui montre que d_∞ est bien une application de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \times \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$.

0,5

- Séparation : Pour $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} d_\infty(f,g) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in X : \ |f(x) - g(x)| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in X : f(x) = g(x) \\ &\Longleftrightarrow f = g. \end{aligned}$$

0,25

- Symétrie : Pour $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, on a

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in X} |g(x) - f(x)| = d_\infty(g,f).$$

1

- Inégalité triangulaire : Pour $f, g, h \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in X : \ |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x\in X} |h(x) - g(x)| \\ &= d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g). \end{aligned}$$

$d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$ est donc un majorant de l'ensemble $\{|f(x) - g(x)| \ ; \ x \in X\}$, par conséquent $\sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$, i.e.

$$d_\infty(f,g) \leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g).$$

<u>*Conclusion.*</u> d_∞ est bien une distance sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

$\boxed{9,5/15}$

Solution 2 Soient X un ensemble infini, $x_0 \in X$ et

$$\tau = \{O \subset X \ ; \ x_0 \notin O\} \cup \{O \subset X \ ; \ X \setminus O \ \textit{est fini}\}.$$

1. <u>*τ est une topologie sur X*</u> ?

0,5 → • Comme $x_0 \notin \varnothing$ et $X \setminus X = \varnothing$ est fini, alors on a $\varnothing, X \in \tau$.

• Soient $O_1, O_2 \in \tau$.

0,5 → - Si $x_0 \notin O_1$ ou $x_0 \notin O_2$, alors $x_0 \notin O_1 \cap O_2$, et donc $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

1 - Supposons que $x_0 \in O_1$ et $x_0 \in O_2$, alors $X \setminus O_1$ et $X \setminus O_2$ sont nécessairement finis, d'où $X \setminus (O_1 \cap O_2) = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2)$ est fini, et donc $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

• Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de τ.

0,5 → - Si pour tout $i \in I$, $x_0 \notin O_i$, alors $x_0 \notin \bigcup_{i\in I} O_i$ et donc on a $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$.

1 - Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $x_0 \in O_{i_0}$ alors nécessairement $X \setminus O_{i_0}$ est fini. Comme on a $X \setminus \bigcup_{i\in I} O_i \subset X \setminus O_{i_0}$, alors $X \setminus \bigcup_{i\in I} O_i$ est fini, et donc $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$.

Conclusion. τ est bien une topologie sur X.

2. Soit $x \in X \smallsetminus \{x_0\}$.

0,25 → • Comme $x_0 \notin \{x\}$, alors $\{x\}$ est ouvert dans X.

0,25 • D'autre part, $O = X \smallsetminus \{x\}$ est ouvert dans X car $X \smallsetminus O = \{x\}$ est fini. Donc $\{x\}$ est fermé dans X.

0,5 • *Voisinages de x* ? Comme $\{x\}$ est ouvert, alors tout sous-ensemble de X contenant x est un voisinage de x.

3. *Description des fermés de (X, τ)* ? Soit F un sous-ensemble de X. On a

1

$$\begin{aligned} F \text{ est fermé dans } X &\iff X \smallsetminus F \text{ est ouvert dans } X \\ &\iff x_0 \notin X \smallsetminus F \text{ ou } X \smallsetminus (X \smallsetminus F) \text{ est fini} \\ &\iff x_0 \in F \text{ ou } F \text{ est fini.} \end{aligned}$$

Ainsi, les fermés de X sont les sous-ensembles de X contenant x_0 ainsi que les sous-ensembles finis de X.

4. Soit $A \subset X$.

0,5 • D'après ce qui précède, tout sous-ensemble fini de X est fermé, donc si A est fini, on a $\overline{A} = A$.

• Supposons maintenant A infini.

0,5 - Si $x_0 \in A$, alors d'après ce qui précède A est un fermé de X et donc on a $\overline{A} = A = A \cup \{x_0\}$.

1 - Si $x_0 \notin A$, alors toujours d'après ce qui précède, A n'est pas fermé dans X et $A \cup \{x_0\}$ est un fermé de X contenant A. $A \cup \{x_0\}$ est donc le plus petit fermé contenant A. Par conséquent, $\overline{A} = A \cup \{x_0\}$.

5. Soit $A \subset X$.

0,5 → • Si $X \smallsetminus A$ est fini, alors A est ouvert et donc $\mathring{A} = A$.

• Supposons maintenant $X \smallsetminus A$ infini.

0,5 → - Si $x_0 \notin A$, alors A est un ouvert de X et donc on a $\mathring{A} = A = A \smallsetminus \{x_0\}$.

1 - Si $x_0 \in A$, alors par définition de τ, A n'est pas un ouvert de X et $A \smallsetminus \{x_0\}$ est un ouvert de X contenu dans A. $A \smallsetminus \{x_0\}$ est donc le plus grand ouvert contenu dans A. Par conséquent, $\mathring{A} = A \smallsetminus \{x_0\}$.

14,5/15 **Solution 3** Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. Pour tous $a, b \in X$, on pose $d_f(a, b) = d(a, b) + d'\left(f(a), f(b)\right)$.

1. *d_f est une distance sur X* ? Soient $a, b, c \in X$. On a

   - Séparation :

     0,5/1

     $$\begin{aligned} d_f(a,b) = 0 &\iff d(a,b) + d'\left(f(a), f(b)\right) = 0 \\ &\iff d(a,b) = 0 \quad et \quad d'\left(f(a), f(b)\right) = 0 \\ &\iff a = b. \end{aligned}$$

   - Symétrie :

     0,25/1

     $$d_f(a,b) = d(a,b) + d'\left(f(a), f(b)\right) = d(b,a) + d'\left(f(b), f(a)\right) = d_f(b,a).$$

   - Inégalité triangulaire :

     0,5/1

     $$\begin{aligned} d_f(a,b) &= d(a,b) + d'\left(f(a), f(b)\right) \\ &\leq \left[d(a,c) + d(c,b)\right] + \left[d'\left(f(a), f(c)\right) + d'\left(f(c), f(b)\right)\right] \\ &= \left[d(a,c) + d'\left(f(a), f(c)\right)\right] + \left[d(c,b) + d'\left(f(c), f(b)\right)\right] \\ &= d_f(a,c) + d_f(c,b). \end{aligned}$$

   Conclusion. d_f est bien une distance sur X.

0,75/1 Pour tous $a, b \in X$, on a $d'\left(f(a), f(b)\right) \leq d_f(a, b)$. Donc f est lipschitzienne de (X, d_f) dans (Y, d').

2. 1 Pour tous $a, b \in X$, on a $d(a, b) \leq d_f(a, b)$. Par conséquent, d_f est équivalente à d si, et seulement si, il existe une constante réelle $\beta > 0$ telle que

$$\forall a, b \in X : \quad d_f(a, b) \leq \beta \; d(a, b),$$

i.e.

$$\forall a, b \in X : \quad d(a, b) + d'\left(f(a), f(b)\right) \leq \beta \; d(a, b).$$

0,5/1 Ceci qui équivaut à

$$\forall a, b \in X : \quad d'\left(f(a), f(b)\right) \leq (\beta - 1) \; d(a, b),$$

ce qui signifie que l'application f est lipschitzienne de (X, d) dans (Y, d'). Ainsi,

1

$$d_f \text{ est équivalente à } d \iff f : (X, d) \to (Y, d') \text{ est lipschitzienne.}$$