UNIVERSITE L'ARBI BEN M'HIDI OUM eL BOUAGHI
Département de Mathématiques et Informatiques
Première année Maths **Module Algèbre1,**
Enseignante: Soula **2023/2024**

Solution d'examen

Exercice1(7.5 pts)

1) Montrons que :

(a) $(A \cap B) \cup \complement_E B \overset{?}{=} A \cup \complement_E B$.

Soit $x \in (A \cap B) \cup \complement_E B \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in \complement_E B$,

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin B)$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \notin B) \wedge (x \in B \vee x \notin B)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup \complement_E B) \wedge x \in (B \cup \complement_E B)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup \complement_E B) \cap E$

$\Leftrightarrow x \in A \cup \complement_E B$..(1.5 pts)

Car $E = \complement_E B. \cup B$ et $A \cup \complement_E B.$ est un sous ensemble se E.

(b) $(A \setminus B) \setminus C \overset{?}{=} A \setminus (B \cup C)$.

$x \in (A \setminus B) \setminus C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \notin C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (\complement_E B \cap \complement_E C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$ (Lois Morgan)

$\Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$..(1.5 pts)

(c) $A \setminus (B \cap C) \overset{?}{=} (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

$x \in A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (\in A \wedge x \notin C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \in (A \setminus C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$..(1.5 pts)

2) Simplifions

(a) $\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(C \cup \overline{A})}$

$\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(C \cup \overline{A})} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{C} \cap \overline{\overline{A}})$

$= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{C} \cap A)$

$= (\overline{A} \cap A) \cap (\overline{C} \cap \overline{B})$

$= (\phi) \cap (\overline{C} \cap \overline{B})$

$= \phi$ ....(1.5 pts)

(b) $\overline{(A \cap B)} \cup \overline{(C \cap \overline{A})}$

$\overline{(A \cap B)} \cup \overline{(C \cap \overline{A})} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{C} \cup \overline{\overline{A}})$

$= (\overline{A} \cup A) \cup (\overline{C} \cup \overline{B})$

$= E \cup (\overline{C} \cup \overline{B})$

$= E$ ....(1.5 pts)

Exercice2(**7.5 pts**)

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réfléxive et symétrique et transitive..........(0.5)

1)

a) $\mathcal{R}$ est réfléxive si et seulement si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\mathcal{R}(x,y)$

$(x,y)\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow \ x+y=x+y$

D'où $\mathcal{R}$ est réfléxive..........................(1.5)

b) $\mathcal{R}$ est symétrique si et seulement si $\forall (x,y),\ (x^{'},y^{'}) \in \mathbb{R}^2$:

$(x,y)\mathcal{R}(x^{'},y^{'}) \Rightarrow (x^{'},y^{'})R(x,y)$

$(x,y)\mathcal{R}(x^{'},y^{'}) \Leftrightarrow x+y=x^{'}+y^{'} \Rightarrow x^{'}+y^{'}=x+y \Leftrightarrow (x^{'},y^{'})R(x,y)$

D'où $\mathcal{R}$ est symétique...........................(1.5)

c) $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si $\forall (x,y),\ (x^{'},y^{'}),\ (x^{''},y^{''}) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\mathcal{R}(x^{'},y^{'}) \wedge (x^{'},y^{'})R(x^{''},y^{''}) \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x^{''},y^{''})$

$$(x,y)\mathcal{R}(x^{'},y^{'}) \wedge (x^{'},y^{'})R(x^{''},y^{''}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y=x^{'}+y^{'} \\ \wedge \\ x^{'}+y^{'}=x^{''}+y^{''} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x+y=x^{''}+y^{''}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)\mathcal{R}(x^{''},y^{''})$$

D'où $\mathcal{R}$ est transitive..........................(1.5)

Ainsi $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2)

Trouvons la classe d'équivalence du couple $(0,0)$.

$$\begin{aligned} \widehat{\dot{(0,0)}} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \diagup\ (x,y)\mathcal{R}(0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \diagup\ x+y{=}0+0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \diagup\ x+y{=}0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \diagup\ y{=}-x\} \\ &= \{(x,-x)/x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$ ....(2.5)

Exercice 3 (**5 pts**)

1)

a) H est un sous-groupe de G. En effet, $0 \in H$, si $x,y \in H$, alors $-x$ et $x+y$ sont deux entiers pairs et donc $-x \in H$, $x+y \in H$. Le théorème de caractérisation des sous-groupes nous dit que H est un sous-groupe de G..................(1.5)

.

b)

$0 \notin H$, et donc H n'est pas un sous-groupe de G.................(1.5)

2) $|z|=1$ donc $1 \in U \Rightarrow U \neq \phi$

soient $z_1,\ z_2 \ \in U$ et donc $|z_1|=1$ et $|z_2|=1$ |

$|z_1 z_2^{-1}\ | {=} |\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{1} = 1$donc$z_1 z_2^{-1} \in U$

alors $(U,\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times\ )$..................(2.0)