Examen - Théorie des graphes -

Exercice n°=1 : (4 pts)

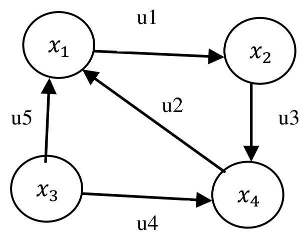
Soit A une matrice associée à un graphe G :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Quelle est le type de la matrice d'adjacence A ? **(1 pt)**
2) Reconstituer le graphe G à partir de la matrice d'incidence A. **(2 pts)**
3) G est-il un graphe *simple* ? Justifier votre réponse. **(1 pt)**

Exercice n°=2 : (3,5 pts)

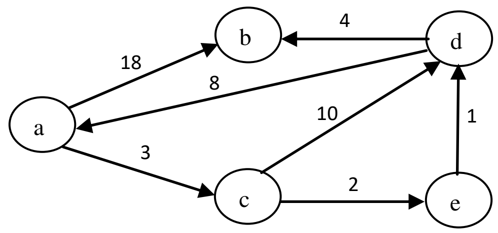
Soit le graphe $G = (X, U)$ suivant :



1. Soit $A = \{x_2, x_3\}$.
   a. Donner le cocycle $w(A)$ engendré par A et son vecteur caractéristique $\vec{w}$. **(0.25 pt + 0.5 pt)**
   b. Le cocycle $w(A)$ est-il élémentaire ? Justifier votre réponse. **(0.25 pt + 0.5 pt)**
2. Calculer une base de cycles en indiquant les différentes étapes. **(2 pts)**

Exercice n°=3 : (Recherche du plus court chemin) (4 pts)

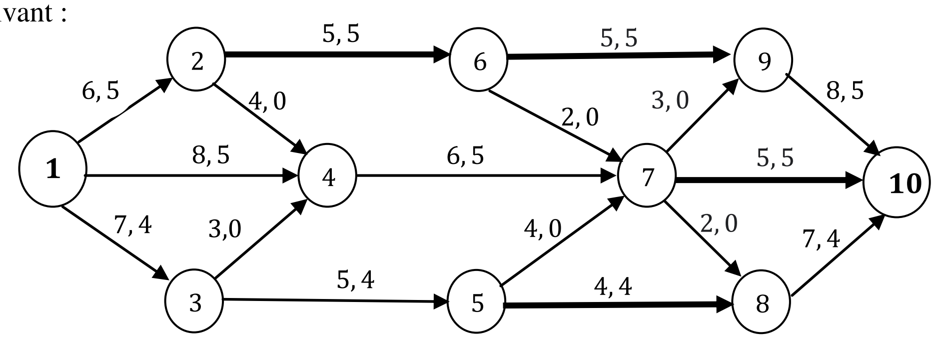
Soit le graphe G suivant :



1. Déterminer un chemin de poids minimal allant du sommet ***a*** à chacun des autres sommets du graphe G en indiquant les différentes étapes. **(2.5 pts)**
2. Déterminer le chemin le plus court μ_{ab} joignant le sommet ***a*** à ***b*** ainsi que sa longueur $l(\mu_{ab})$. **(1 pt + 0.5 pt)**

Exercice n°=4 : (4.5 pts)

Soit le flot f suivant :



1. Le flot f proposé est-il complet ? Justifier votre réponse. **(0.25 pt + 0.25 pt)**
2. Le flot f proposé est-il réalisable ? Justifier votre réponse. **(0.25 pt + 0.25 pt)**
3. Calculer la valeur du flot $\boldsymbol{\varphi}^?$ de cette itération. **(0.25 pt)**
4. Ce flot f est-il maximal, en justifiant votre réponse ? si non l'augmenter et calculer le flot maximal. **(0.25 pt + 0.5 pt + 2.5 pts)**

Tournez la feuille

Nom :………………………………	**Prénom :………………………………**	**Groupe :………**	**Note (QCM) :**	**/ 4**

Questions de compréhension (QCM) : (4 pts)

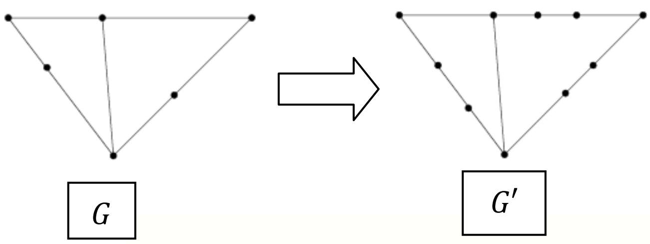
Cochez la (les) bonne (bonnes) réponse(s) dans ce qui suit :

1) Parmi les éléments suivants, quels sont ceux absolument nécessaires pour définir un graphe non orienté ?

	Sommets (ou points ou nœuds)
	Arêtes
	Arcs
	Boucles

2) Dans le graphe ci-dessous, la subdivision G' du graphe G est obtenue par une *succession* de :

	2 subdivisions élémentaires
	3 subdivisions élémentaires
	4 subdivisions élémentaires
	5 subdivisions élémentaires



3) Un graphe est qualifié de complet si :

	Toutes ses arêtes sont colinéaires
	Tous ses sommets sont deux à deux adjacents
	Il est composé de droites
	Il est orienté

4) Un chemin élémentaire peut passer plusieurs fois par le même arc :

	Vrai
	Faux

5) Le degré d'un sommet :

	Le nombre associé au sommet
	Le nombre de sommets minoré de 1
	Le nombre d'arêtes du graphe
	Le nombre d'arêtes connectées à ce sommet

6) La somme des degrés des sommets d'un graphe est :

	Un nombre pair et un nombre impair
	Un nombre pair
	Un nombre entier naturel
	Un nombre impair

7) Une matrice sommets-arcs est composée d'éléments dont les valeurs peuvent être :

	0
	1
	-1
	'Vrai' ou 'Faux'

8) Un graphe partiel est :

	Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacents
	Le graphe initial privé de quelques arêtes
	C'est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacents que l'on prive ensuite de quelques arêtes

9) Le nombre des itérations de l'algorithme de recherche d'une *base de cycles* est égal au nombre :

	de sommets
	d'arcs
	d'arêtes

10) Qu'est-ce qu'un *arbre couvrant* ?

	Un graphe partiel qui est un arbre
	Un sous graphe qui est un arbre
	Un sous graphe partiel qui est un arbre

11) Si le graphe est *sans triangle*, alors on applique la propriété 2 d'Euler :

	$m \leq 6 \times n - 3$
	$m \leq 3 \times n - 6$
	$m \leq 2 \times n - 4$
	$m \leq 4 \times n - 2$

12) Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe par tous les sommets sans répétitions.

	Vrai
	Faux

13) Un graphe contenant un *chemin Hamiltonien* est toujours un graphe *Hamiltonien*

	Vrai
	Faux

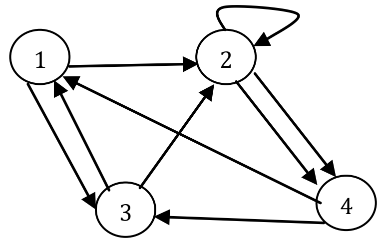
Université d'Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et des SNV
Département des Mathématiques et Informatique (M&I)

Promotion : 2ème année Licence Informatique
Jeudi 11/01/2024
Durée : 1H30

Corrigé Examen - Théorie des graphes -

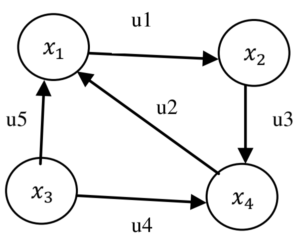
Exercice n°=1 : (4 pts)

1) La matrice d'adjacence A est une matrice ***sommet-sommet*** ***(définition 2)***. **(1 pt)**
2) Le graphe G associé à la matrice d'incidence A. **(2 pts)**
3) G n'est pas *simple*.
   Car G admet une boucle et la multiplicité de l'arc $(1,2)$ *est égale* à $m_{23} = 2$. **(1 pt)**



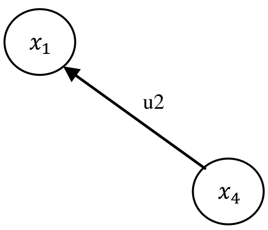
Exercice n°=2 : (3,5 pts)

Soit le graphe $G = (X, U)$ suivant :



1. Soit $A = \{x_2, x_3\}$.
   a. Donner le cocycle $w(A)$ engendré par A et son vecteur caractéristique $\vec{w}$. **(0.25 pt + 0.5 pt)**
   b. Le cocycle $w(A)$ est-il élémentaire ? Justifier votre réponse. **(0.25 pt + 0.5 pt)**
2. Calculer une base de cycles en indiquant les différentes étapes. **(2 pts)**

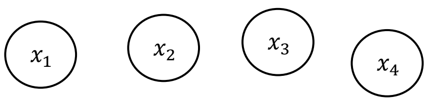
1. Soit $A = \{x_2, x_3\}$.
   a. $w(A) = w^+(A) \cup w^-(A) = \{u3, u4, u5\} \cup \{u1\} = \{u1, u3, u4, u5\}$ **(0.25 pt)**
      $\vec{w}(A) = (-1, 0, +1, +1, +1)$ **(0.5 pt)**
   b. Le cocycle $w(A)$ est élémentaire **(0.25 pt)**
      car la suppression de A engendre une seule composante connexe. **(0.5 pt)**



2. Soit $G = (X, U)$ tel que $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $U = \{u1, u2, u3, u4, u5\}$

1) Initialisation :

$G_0 = (X, \emptyset)$ où : $m_0 = 0$, $p_0 = 4$ et $v(G_0) = 0$



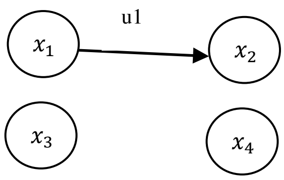
0.25 pt

$(i = 1)$ ***Itération 1 :***

$\mathrm{G}_1 = (\mathrm{X}, \{\mathrm{u1}\})$ et $m_1 = 1$ et $p_1 = 3$

pas de cycle

$\mathrm{v}(\mathrm{G}_1) = \mathrm{v}(\mathrm{G}_0) = 0$



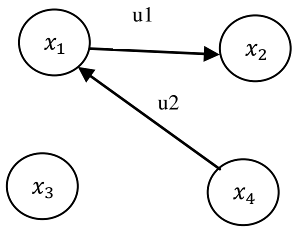
0.25 pt

$(i = i + 1 = 2)$ ***<u>Itération 2 :</u>***

$G_2 = (X, \{u1, u2\})$ et $m_2 = 2$ et $p_2 = 2$

pas de cycle

$v(G_2) = v(G_1) = 0$



0.25 pt

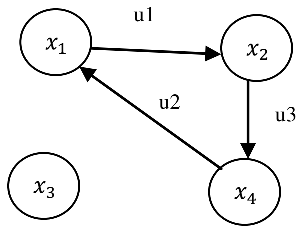
$(i = i + 1 = 3)$ ***<u>Itération 3 :</u>***

$G_3 = (X, \{u1, u2, u3\})$ et $m_3 = 3$ et $p_3 = 2$

le cycle $\mu_1 = (u1, u2, u3)$

$\vec{w}_{\mu_1} = (-1, -1, -1,\ 0,\ 0)$

$v(G_3) = v(G_2) + 1 = 0 + 1 = 1$



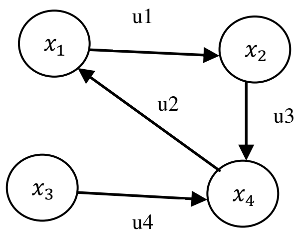
0.5 pt

$(i = i + 1 = 4)$ ***<u>Itération 4 :</u>***

$G_4 = (X, \{u1, u2, u3, u4\})$ et $m_4 = 4$ et $p_4 = 1$

pas de cycle

$v(G_4) = v(G_3) = 1$



0.25 pt

$(i = i + 1 = 5)$ ***<u>Itération 5 :</u>***

$G_5 = (X, \{u1, u2, u3, u4, u5\})$ et $m_5 = 5$

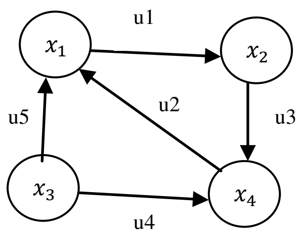
le cycle $\mu_2 = (u4, u5, u2)$

$\vec{w}_{\mu_2} = (0, -1, 0, -1, +1)$

$v(G_5) = v(G_4) + 1 = 2$

$(i = 5) = (m = 5)$ → OUI *alors* **TERMINER**

Alors $\{\vec{w}_{\mu_1}\ ,\ \vec{w}_{\mu_2}\}$ est une base de cycles



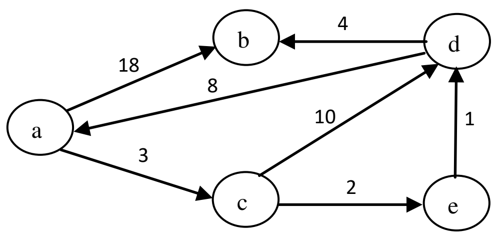
0.5 pt

La dimension de cette base de cycles (d'après le théorème 1) est le nombre cyclomatique de G :

$$v(G) = m - n + p = 5 - 4 + 1 = 2 = v(G_5)$$

Exercice n°=3 : (Recherche du plus court chemin) (4 pts)

Soit le graphe G suivant :



(2.5 pts)

		Sommets				
Etapes (k)	***D***	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
1	$\{a\}$	0	18	**<u>3</u>**	$+\infty$	$+\infty$
2	$\{a, \mathbf{c}\}$	0	18	3	13	**<u>5</u>**
3	$\{a, c, \mathbf{e}\}$	0	18	3	**<u>6</u>**	5
4	$\{a, c, e, \mathbf{d}\}$	0	**<u>10</u>**	3	6	5
5	$\{a, c, e, d, \mathbf{b}\}$	0	10	3	6	5

Le chemin le plus court μ_{ab} joignant le sommet $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ est donné par la suite des sommets :

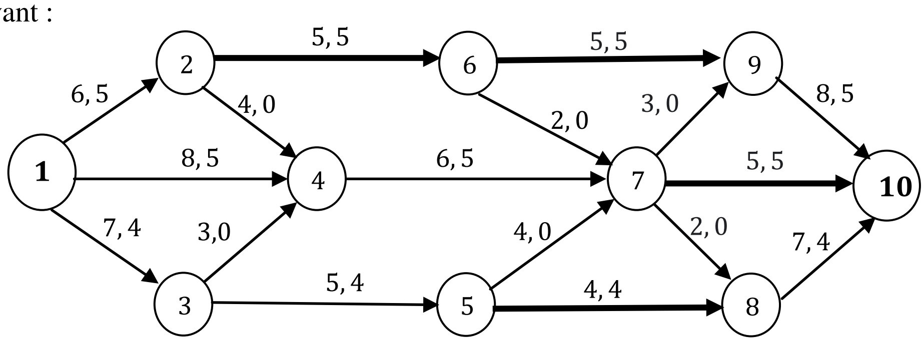
$$\mu_{ab} = (a - c - e - d - b) \text{ (1 pt)}$$

avec une longueur minimale égale à :

$$l(\mu_{ab}) = 3 + 2 + 1 + 4 = \lambda_b = \mathbf{10}. \text{ (0.5 pt)}$$

Exercice n°=4 : (4.5 pts)

Soit le flot f suivant :



1. Le flot f proposé n'est pas complet **(0.25 pt)**

   car il existe un chemin allant de la source 1 au puits 10 qui n'as pas d'arcs saturés $(1 - 4 - 7 - 8 - 10)$. **(0.25 pt)**

2. Le flot f proposé est réalisable **(0.25 pt)**

   car : **(0.25 pt)**

   - $\varphi(u_j) \geq 0 \;\; \forall j \in \{1, \dots, m\} \; \Leftrightarrow \; \varphi \geq 0$
   - $\varphi(u_j) \leq \; c(u_j), \forall \; u_j \in U$

3. $\boldsymbol{\varphi}^? = \sum_{j \in w^+(s)} \varphi_j = \sum_{j \in w^-(p)} \varphi_j = \varphi(1{,}2) + \varphi(1{,}4) + \varphi(1{,}3) = \varphi(9{,}10) + \varphi(7{,}10) + \varphi(8{,}10) = 5 + 5 + 4 = 5 + 5 + 4 = \mathbf{14}$ **(0.25 pt)**

4. Ce flot f n'est pas maximal **(0.25 pt).**

   car il existe une **chaine augmentante** : $A = \{1 - 4 - 7 - 8 - 10\}$ **(0.5 pt)**

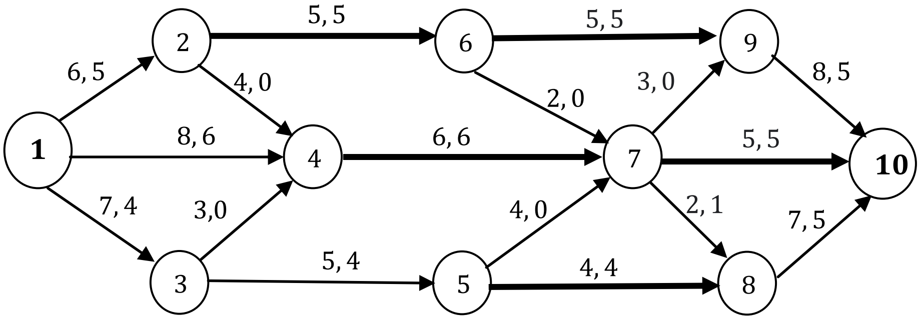
   Calcul du flot maximum **(2.5 pts = 1pt + 1pt + 0.5pt)**

   $\textit{Itération} \quad 1 \quad =((A = \{ \quad \}) + \varepsilon + \varphi + MAJ \; des \; flux \; sur \; le \; graphe) = (0.25pt + 0.25pt + 0.25pt + 0.25pt) = \mathbf{1pt}$

   $\textit{Itération} \quad 2 \quad =((A = \{ \quad \}) + \varepsilon + \varphi + MAJ \; des \; flux \; sur \; le \; graphe) = (0.25pt + 0.25pt + 0.25pt + 0.25pt) = \mathbf{1pt}$

   $\textit{Itération 3} =(A = \{\dots - STOP\} + \varphi_{max}) = (0.25pt + 0.25pt) = \mathbf{0.5pt}$

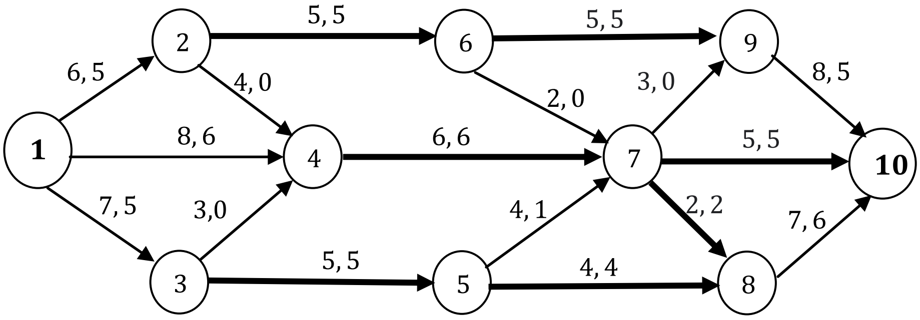
   $A = \{1 - 4 - 7 - 8 - 10\}$
   $\varepsilon = min\{8 - 5, 6 - 5, 2 - 0, 7 - 4\} = min\{3,\; 1,\; 2,\; 3\} = 1$
   $\varphi^{new} = \varphi^? + \varepsilon = 14 + 1 = 15$



$A = \{1 - 3 - 5 - 7 - 8 - 10\}$

$\varepsilon = min\{7 - 4, 5 - 4, 4 - 0, 2 - 1, 7 - 5\} = min\{3, 1, 4, 1, 2\} = 1$

$\varphi^{new'} = \varphi^{new} + \varepsilon = 15 + 1 = 16$



$A = \{1 - 2 - 4 - STOP\}\ ou\ A = \{1 - 4 - STOP\}\ ou\ A = \{1 - 3 - 4 - STOP\}$

Le sommet 10 n'est pas marqué, ALORS **terminé**, **le flot est maximum** : $\varphi_{max} = \varphi^{new'}$

$$\varphi_{max} = \sum \left(\varphi(s, x)/x \in \Gamma_R^+(s)\right) = \varphi(1, 2) + \varphi(1,4) + \varphi(1,3) = 5 + 6 + 5 = 16$$

ou

$$\varphi_{max} = \sum \left(\varphi(x, p)/x \in \Gamma_R^-(p)\right) = \varphi(9,10) + \varphi(7,10) + \varphi(8,10) = 5 + 5 + 6 = 16$$

Alors :

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi_{max} = 16}}$$

Questions de compréhension (QCM) : **(4 pts = 16 * 0.25pt)**

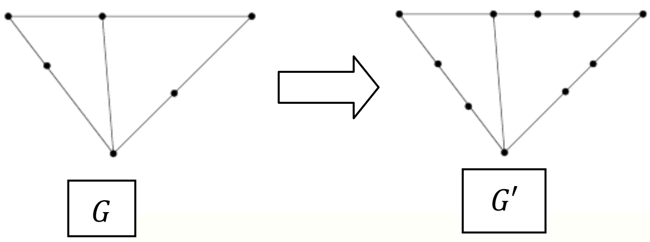
Cochez la (les) bonne (bonnes) réponse(s) dans ce qui suit :

1) Parmi les éléments suivants, quels sont ceux absolument nécessaires pour définir un graphe non orienté ?

X	Sommets (ou points ou nœuds)
X	Arêtes
	Arcs
	Boucles

2) Dans le graphe ci-dessous, la subdivision G' du graphe G est obtenue par une *succession* de :

	2 subdivisions élémentaires
	3 subdivisions élémentaires
X	4 subdivisions élémentaires
	5 subdivisions élémentaires



3) Un graphe est qualifié de complet si :

	Toutes ses arêtes sont colinéaires
X	Tous ses sommets sont deux à deux adjacents
	Il est composé de droites
	Il est orienté

4) Un chemin élémentaire peut passer plusieurs fois par le même arc :

	Vrai
X	Faux

5) Le degré d'un sommet :

	Le nombre associé au sommet
	Le nombre de sommets minoré de 1
	Le nombre d'arêtes du graphe
X	Le nombre d'arêtes connectées à ce sommet

6) La somme des degrés des sommets d'un graphe est :

	Un nombre pair et un nombre impair
X	Un nombre pair
	Un nombre entier naturel
	Un nombre impair

7) Une matrice sommets-arcs est composée d'éléments dont les valeurs peuvent être :

X	0
X	1
X	-1
	'Vrai' ou 'Faux'

8) Un graphe partiel est :

	Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacents
X	Le graphe initial privé de quelques arêtes
	C'est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacents que l'on prive ensuite de quelques arêtes

9) Le nombre des itérations de l'algorithme de recherche d'une *base de cycles* est égal au nombre :

	de sommets
X	d'arcs
	d'arêtes

10) Qu'est-ce qu'un *arbre couvrant* ?

X	Un graphe partiel qui est un arbre
	Un sous graphe qui est un arbre
	Un sous graphe partiel qui est un arbre

11) Si le graphe est *sans triangle*, alors on applique la propriété 2 d'Euler :

	$m \leq 6 \times n - 3$
	$m \leq 3 \times n - 6$
X	$m \leq 2 \times n - 4$
	$m \leq 4 \times n - 2$

12) Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe par tous les sommets sans répétitions.

X	Vrai
	Faux

13) Un graphe contenant un *chemin Hamiltonien* est toujours un graphe *Hamiltonien*

	Vrai
X	Faux