3) Pour $(x,y) = (0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi), \lambda_1 = -a-1, \lambda_2 = -a+1$ *(c'est-à-dire sont en réels, les points-cols si* $\lambda_1\lambda_2 < 0$, *c'est-à-dire* $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty$ *) et sont points noeuds instables si a* $\in$*]-1, 1[.*

Pour $(x,y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \lambda = a \pm i$ *(c'est-à-dire complexe instable si* $a > 0$ *et stable si* $a < 0$*) (1.5 pts)*

4) Pour $a = 0, \lambda = \pm i$, *c'est-à-dire que c'est un centre. (1.5 pts)*

Exercice 4

1) Points fixes sont $x^* = 0, \pm\sqrt{\frac{-\beta}{1+\beta}}$. *(1.5 pts)*

2) $f'(x_n) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - \beta$ *et* $f'(\pm\sqrt{\frac{-\beta}{1+\beta}}) = 2\beta + 2\beta^2 + 1$ *et* $0 < 2\beta + 2\beta^2 + 1 < 1$ *si* $1 < \beta < 0$, *donc stable. (2 pts)*

3) Supposons que $x_n \approx \epsilon$ *et* $\beta = 2$ *où* ϵ *est petit. Alors* $f(\epsilon) = \frac{\epsilon}{1+\epsilon^2} - 2\epsilon = -\epsilon$ *et* $f(-\epsilon) = -\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2} + 2\epsilon = \epsilon$ *donc un deux cycles. (2 pts)*