Correction d'examen : Systèmes dynamiques et introduction au chaos
Mastre 2. Option : Mathématiques Appliquées.

Exercice 1

Théorème de Devaney

On dit que l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de comportement chaotique si

i) *L'application f est sensible aux conditions initiales, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et au voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$, il existe un $\delta > 0$ tel que:*

$$|f^m(x) - f^m(y)| > \delta, \tag{4}$$

pour $y \in \mathbb{R}^n$ et pour $m \geq 0$. (1 pts)

ii) *L'application f est topologiquement transitive, c'est-à-dire pour toute paire de sous-ensembles ouverts $U, V \subset \mathbb{R}^n$, il existe un nombre entier $m > 0$ tel que: (1 pts)*

$$f^m(U) \cap V \neq \emptyset. \tag{5}$$

iii) *Les points périodiques de l'application f sont denses dans $\mathbb{R}^n$. (1 pts)*

Exercice 2

1) $x\dot{x} + y\dot{y} = x^2 + y^2$ pour le point fixe $\dot{x} = \dot{y} = 0$ alors $(x^*, y^*) = (0, 0)$.

2) Matrice Jacobienne est

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = a \pm i$. (1.5 pts)

3) si $a > 0$ le point fixe est instable et si $a = 0$ le point fixe est indéffirent $a < 0$ le point fixe est stable. (1 pts)

4) Soit la fonction Lyapunov $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ alors $\dot{V}(x,y) = x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2)(a\sqrt{x^2 + y^2}) < 0$ pour $a < 0$. De la fonction Lyapunov, cela signifie $(x,y) = (0,0)$ est asymptotiquement stable. (1 pts)

5) Soit $x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2)(a\sqrt{x^2 + y^2}) = r\dot{r} = r^2(a - r)$
alors $\dot{r} = r(a - r)$
et $\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = -\dot{\theta}r = r$ alors $\dot{\theta} = -1$. (1.5 pts)

Exercice 3

1) Existe cinq points fixes dans l'intervalle : $(x,y) = (0,0), (0,\pi), (\pi,\pi), (\pi,0), (x,y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (1.5 pts)

2) Matrice Jacobienne est

$$\begin{pmatrix} -a\cos^2 x + a\sin^2 x - \cos x\cos y & \sin x \sin y \\ -\sin x \sin y & -a\cos^2 y + a\sin^2 y - \cos x \cos y \end{pmatrix}$$

(1.5 pts)