جامعة العربي بن مهيدي - أم البواقي — السنة الجامعية: 2021 – 2022

قسم الرياضيات — مقرر التوزيعات 1

الإمتحان الأول (المدة: ساعة و نصف)

التمرين الأول (7 **نقاط**):

نعتبر التطبيق $VP\frac{1}{x}$ (القيمة الرئيسية لكوشي) المعرف بـ:

$$\forall\varphi \in D(\Omega): \quad \left\langle VP\frac{1}{x},\varphi\right\rangle := \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

(1) أثبت أن هذا التطبيق توزيعا منتهي الرتبة.

(2) أثبت أن رتبته تساوي 1.

(يمكن الإستعانة بمتتالية التوابع الإختبارية $\varphi_j(x)=\varphi_0(x)\arctan(jx)$ حيث $j\in\mathbb{N}^*$ مع φ_0 تابع إختباري زوجي).

(3) بين أن $VP\frac{1}{x}$ المشتق الأول للتابع $\ln|x|$ في $D'(\mathbb{R})$.

التمرين الثاني (3 **نقاط**):

نعتبر التابع $H_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ المعرف بـ $H_3(x,y,z)=H(x)H(y)H(z)$، حيث يرمز H لدالة هيفيسايد،

- أثبت أن $\partial_x\partial_y\partial_z H_3=\delta$ حيث δ تابع ديراك في $\mathbb{R}^3$.

التمرين الثالث (4 **نقاط**):

(1) عين التوزيع مقتصر توزيع ديراك $\delta\,|_{\mathbb{R}^*}$.

(2) نفرض أن هناك $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ بحيث:

$$\forall\varphi\in D(\mathbb{R}),\quad \langle\delta,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi(x)dx.$$

أثبت أن $f=0$ تقريبا حيثما كان في $\mathbb{R}^*$. و استنتج أن $f=0$ تقريبا حيثما كان في $\mathbb{R}$. هل هناك تناقض؟

التمرين الرابع (6 **نقاط**):

(1) أثبت أن التطبيق $T\,:\,D(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{C}$ المعرف بـ $\langle T,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,x)dt$ توزيعا.

(2) عين حامل (سند) T.

بالتوفيق

التصحيح النموذجي

التمرين الأول (7 **نقاط**):

نعتبر التطبيق $VP\frac{1}{x}$ (القيمة الرئيسية لكوشي) المعرف بـ:

$$\forall\varphi\in D(\Omega):\quad \left\langle VP\frac{1}{x},\varphi\right\rangle := \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

(1) لتأكد أن هذا التطبيق توزيعا منتهي الرتبة يكفي التأكد من وجود التكامل الموسع، و من ثم التأكد من وجود النهاية و في النهاية التأكد من شرط الخطية و الاستمرارية (لاحظ الدرس) ...(3 نقاط).

(2) لإثبات أن الرتبة مساوية لـ 1 يمكن استعمال البرهان بالخلف و الاستعانة بالمتتالية المقدمة للوصول إلى تناقض (لاحظ الدرس) ... (2 نقاط).

(3) يمكن استعمال متتالية تقريبية للتابع و هذا لتجنب القيمة 0, و من ثم تطبيق الهيمنة، للوبيغ، و تطبيق تعريف الاشتقاق الضعيف ... (2 نقاط).

التمرين الثاني (3 **نقاط**):

نعتبر التابع $H_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ المعرف بـ $H_3(x,y,z)=H(x)H(y)H(z)$، حيث يرمز H لدالة هيفيساير،

- استعمال تعريف الاشتقاق بمفهوم التوزيعات، (1 نقطة) و تطبيق نظرية فوبيني (1 نقطة) و الملاءمة بالتجزئة (1 نقطة).

التمرين الثالث (4 **نقاط**):

(1) التوزيع مقتصر توزيع ديراك $\delta\mid_{\mathbb{R}^*}=0$ ... (1 نقطة)

(2) نفرض أن هناك $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ بحيث:

$$\forall\varphi\in D(\mathbb{R}),\quad \langle\delta,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi(x)dx.$$

$f=0$ يمكن استنتاج أن تقريبا حيثما كان في $\mathbb{R}^*$. من إنعدام التكامل (1 نقطة). و منه يمكن استنتاج $f=0$ تقريبا حيثما كان في $\mathbb{R}$ و هذا باستعمال اتحاد مجموعة يكون التابع فيها منعدما و المجموعة المهمة (1 نقطة) و هذا يناقض عدم انعدام التابع ... (1 نقطة).

التمرين الرابع (6 **نقاط**):

(1) يمكن اثبات أن التطبيق التالي خطي، و مستمر $T:D(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{C}$ المعرف بـ $\langle T,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,x)dt$ و بالتالي هو توزيع منتهي الرتبة و رتبته مساوية لـ 0... (3 نقطة).

(2) الحامل هو المنصف الأول (لاحظ الدرس)... (3 نقطة) T.

بالتوفيق