Ex03 (06pts) ; 1) H Hilbert complexe, $r(TS) = r(ST)$?

on a ; $(TS)^n = T(ST)^{n-1}S$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$\sqrt[n]{\|(TS)^n\|} = \sqrt[n]{\|T(ST)^{n-1}S\|} \leq \sqrt[n]{\|T\|}\sqrt[n]{\|(ST)^{n-1}\|}\sqrt[n]{\|S\|}$$

3

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|(TS)^n\|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T\|}\sqrt[n]{\|(ST)^{n-1}\|}\sqrt[n]{\|S\|}$$

$$\Rightarrow r(TS) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n-1]{\|(ST)^{n-1}\|}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n-1]{\|(ST)^{n-1}\|}\right) = r(ST)$$

on prouve l'autre inégalité en échangeant T par S.

2) $T \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)$ normal c.à.d $TT^* = T^*T$. on a :

3

par définition et montrons :

$\|T^2\| \leq \|T\|^2$

$\|T\|^2 \leq \|T^2\|$?,

si T auto-adjoint $(T = T^*)$ donc

$\forall x$; $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^2x, x\rangle \leq \|T^2\|$.