2) $T^*$ ? Soient $f, g \in E$ on a :

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^{\pi/2} (Tf)(t)\, g(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos(t)\, g(t)}_{u'} \underbrace{\left(\int_0^t \sin(s)\, f(s)\, ds\right)}_{v} dt$$

par intégration par partie on trouve :

$$\langle Tf, g\rangle = \left(-\int_t^{\pi/2} \cos(s)\, g(s)\, ds\right)\left(\int_0^t \sin(s)\, f(s)\, ds\right)\Big|_0^{\pi/2} + \quad 3$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t) f(t) \left(\int_t^{\pi/2} \cos(s)\, g(s)\right) ds = \int_0^{\pi/2} f(t) \left(\sin(t) \int_t^{\pi/2} \cos(s)\, g(s)\right) ds$$

$= \langle f, T^* g\rangle$ où

$$(T^* f)(t) = \sin(t) \int_t^{\pi/2} \cos(s)\, f(s)\, ds, \quad \forall t \in (0, \tfrac{\pi}{2}).$$

3) T compact ? Il suffit de montrer que : $(f_n) \in B(0,1)$ converge faiblement vers 0, les image convergent vers 0 en norme.

2

Si $(f_n)$ converge faiblement vers 0 $\Rightarrow$

$$|(Tf_n)(t)| \leq \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, \|f\| \leq \tfrac{\pi}{2}, \quad \forall t \in (0, \tfrac{\pi}{2}].$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi/2} |(Tf_n)(t)|^2 dt = 0$$