Corrigé type de l'examen final

Matière : Analyse Fonctionnelle 2

Master1 - Maths Appliquées

2022/2023

Exo1 (06pts) :

H espace de Hilbert ; $S, T \in \mathcal{L}_C(H)$

1). $\forall T \in \mathcal{L}_C(H)$, $\exists T^*$ adjoint de T tel que :

$\langle Tx, y\rangle_H = \langle x, T^*y\rangle_H$, $\forall x, y \in H$. 1

2) $T \in \mathcal{L}_C(H)$ et $(x_n) \in H$: $x_n \longrightarrow x \overset{?}{\Rightarrow} T(x_n) \longrightarrow T(x)$

soit $y \in H$

on a, $\langle T(x_n), y\rangle = \langle x_n, T^*(y)\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x, T^*(y)\rangle =$

$\langle T(x), y\rangle$ 2

3) Soient $S, T \in \mathcal{L}_C(H)$, on a, $\langle (T+S)^*(x), y\rangle =$

$\langle x, (T+S)y\rangle = \langle x, Ty\rangle + \langle x, Sy\rangle$

$= \langle T^*x, y\rangle + \langle S^*x, y\rangle = \langle (T^*+S^*)x, y\rangle$

$\Rightarrow (T+S)^* = T^* + S^*$. 3

Exo2 (08pts) ; $E = L^2([0, \pi/2])$; $T : E \longrightarrow E$ par :

$$(Tf)(t) = \cos(t)\int_0^t \sin(s) f(s)\, ds, \quad \forall t \in [0, \pi/2)$$

(1)