Université Oum El Bouaghi

Master 1-Mathématiques Appliquées

Examen Final **Analyse Fonctionnelle2 (S2)**

15/05/2021(Durée : 01h30)

Exercice 1. (06 pts) .

Soit H un espace de Hilbert et soit $S, T \in L_C(H)$ (Espace des opérateurs linéaires bornés)

1- Comment définir l'opérateur adjoint de T. 1pt

1- Vérifier que pour $T \in L_C(H)$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H on a:

$$\{x_n \rightharpoonup x\} \Longrightarrow \{T(x_n) \rightharpoonup T(x)\}$$

2pts

3- Montrer que

$$(T+S)^* = T^* + S^*$$

3pts

Exercice 2. (08pts)

Soit $E = L^2\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ un espace de Hilbert complexe, on définit l'opérateur $T : E \to E$ par

$$(Tf)(t) = \cos(t) \int_0^t \sin(s) f(s)\, ds, \quad \text{pour tout } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

1-Montrer que T est un opérateur linéaire et borné. 1pt + 2pts

2- Déterminer l'adjoint T^*de l'opérateur T.. 3pts

3 Montrer que T est un opérateur compact de E dans E. 2pts

Exercice 3. (06pts)

Soit H un espace de Hilbert complexe et T, S deux opérateurs sur H.

1-Montrer que les opérateurs TS et ST ont meme rayon spectral 3pts

2- Montrer que si $T \in L_C(H)$ est normal, alors $\|T^2\|_{L_C(H)} = \|T\|^2_{L_C(H)}$ 3pts

Bon courage