Université Larbi Ben M'hidi
Faculté SESNV
Dept. MI
Géométrie Différentielle - L3

15 mai 2023
Durée : 1h15

Examen

Tous les documents, autres que ceux fournis dans le sujet, sont interdits.

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. On pose $S_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = \alpha\}$.

— Déterminer les paramètres $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'ensemble S_α est une sous-variété et préciser sa dimension.

Exercice 2 :

Considerons une fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $f(\sqrt{x^2+z^2}) = y$, et l'ensemble $S_f \subset \mathbb{R}^3$ est défini par :

$$S_f = \{(r\cos(\alpha), f(r), r\sin(\alpha)) : r \in]0,1[\text{ et } \alpha \in \mathbb{R}\}$$

1. Trouver un ouvert $O \subset \mathbb{R}^3$ et une fonction $F : O \to \mathbb{R}$ tels qu'on a $S_f = F^{-1}(0)$.
2. Montrer que S_f est une sous-variété et préciser sa dimension.
3. Montrer que l'application $\psi :]0,1[\times]0,2\pi[\to S_f$ définie par $\psi(r,\theta) = (r\cos(\theta), f(r), r\sin(\theta))$ est un plongement régulier.

Exercice 3 :

Soient $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^k, $M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, x \in I\}$. Le champ de vecteurs X défini sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$X_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x} + f'(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

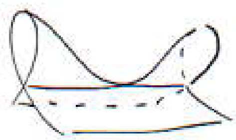
1. Montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que X est un champ de vecteurs sur M.

Exercice 4 :

— Déterminer si les figures suivantes sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$:

(a) Figure 1

(b) Figure 2



(c) Figure 3

بالتَّوفيق

Barème : 6-6-6-2 pts.

corrigé type

Ex1 Considérons $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - \alpha \,, \quad (1)$$

Alors $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, $d_mF = (2x, 2y, -2z)$ (1) pour $m = (x,y,z)$

et $S_\alpha = F^{-1}(\{(0,0,0)\})$ (0,5). $rg_m(F) = 1$ ssi $m \neq (0,0,0)$ (0,5).

Si $\alpha = 0$: S_0 = cône (0,5) $\Longrightarrow$ elle n'est pas une sous-variété (0,5)

Si $\alpha \neq 0$: $(0,0,0) \notin S_\alpha \Rightarrow rg_m(F) = 1$, $\forall m \in S_\alpha$ (1) et $S_\alpha = F^{-1}(\{(0,0,0)\})$.

$\Longrightarrow$ S_α est une sous-variété de dim $= 3 - 1 = 2$ de $\mathbb{R}^3$ (1)

Ex2 ① On a l'égalité $f(\sqrt{x^2+z^2}) = y$, ceci suggère de définir l'ouvert $O \subset \mathbb{R}^3$ comme

$$O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 < x^2+z^2 < 1\} \quad (0,5)$$

et la fn. $F : O \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $F(x,y,z) = f(\sqrt{x^2+z^2}) - y$. (0,5)

On vient de montrer qu'on a $S_f \subset F^{-1}(\{0\})$. (0,5)

Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens, on prend donc $m = (x,y,z) \in F^{-1}(\{0\})$. Si on note $r = \sqrt{x^2+z^2}$, par définition de O il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel qu'on a : $\frac{x}{r} = \cos\alpha$ et $\frac{z}{r} = \sin\alpha$, il s'ensuit qu'on a $m = (r\cos\alpha, f(r), r\sin\alpha) \in S_f$, et donc $S_f = F^{-1}(\{0\})$ (0,5)

② La fn. f étant de classe $\mathcal{C}^1$, F l'est aussi et on trouve

$d_mF = \left(\frac{x f'(r)}{r}, -1, \frac{z f'(r)}{r}\right)$ (0,5). Il s'ensuit que $rg_m(F) = 1$ (0,5)

$\Longrightarrow$ S_f est une sous-variété (0,5) de dim $= 3 - 1 = 2$ de $\mathbb{R}^3$ (0,5)

1 ③ Pour l'injectivité de ψ : si on a :

$$(r_1\cos\theta_1, f(r_1), r_1\sin\theta_1) = (r_2\cos\theta_2, f(r_2), r_2\sin\theta_2)$$

Alors en prenant les normes au carré, on trouve : $r_1^2 = r_2^2$ et donc $r_1 = r_2$, en substituant ceci dans l'égalité, on trouve : $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ et $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$, ce qui implique qu'on a : $\theta_1 = \theta_2$ (parceque $\theta_1 ; \theta_2 \in]0, 2\pi[$)

1 Pour l'immersion de ψ : On ~~calc~~ calcul $d_m\psi$ / $m = (r, \theta)$

$$d_m\psi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ f'(r) & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

, les normes au carrés des deux colonnes sont $1 + f'^2(r)$ et $r^2 > 0$, ces deux colonnes ne sont pas nulles, leur produit scalaire étant nul, elle sont donc indépendantes. $\Rightarrow$ $rg(\psi) = 2 \Rightarrow \psi$ est une immersion.

EX3.

① On a pour tout $m = (x, y) \in M = \{(x, f(x)) / x \in I\}$, il existe un voisinage $U_m \subset \mathbb{R}^2$, un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $U_m \cap M = M = \mathrm{graph}(f)$. 2

$\Rightarrow$ M est une Sous-variété de dim = 1 de $\mathbb{R}^2$.

② Nous allons montrer que $X_m \in T_mM$; $\forall m \in M$. 1

1

on ait $T_mM = \mathrm{Im}\{h \longmapsto (h, f'(x)h)\} = \{(h, f'(x)h) / h \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(1, f'(x))\}$

Maintenant, nous pouvons faire l'identification :

$$\partial_x + f'(x)\partial_y \longleftrightarrow (1, f'(x))^T \in T_mM \ ; \ \forall m \in M. \ 1$$

$\Rightarrow$ X est un champ de vecteurs sur M.

1

2ème Méthode

On prend $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $F(x,y) = y - f(x)$.

Donc, on a $M = F^{-1}(\{0\})$ et $d_m F = (-f'(x), 1)$; $\forall m = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow rg_m(F) = 1$; $\forall m \in M \Rightarrow F$ est une submersion sur M (2)

$\Rightarrow M$ est une sous-variété de $\dim = 2 - 1 = 1$ de $\mathbb{R}^2$.

Maintenant, on va montrer que $d_m F(X_m) = 0$; $\forall m \in M$ (1)

on ait : $d_m F = (-f'(x), 1)$ et $X_m = (1, f'(x))^T$. (1)

$$\Rightarrow d_m F(X_m) = (-f'(x), 1) \cdot (1, f'(x))^T$$

$$= -f'(x) + f'(x) = 0.$$ (1)

d'où X est un champ de vecteurs sur M. (1)

EX 4

Figure 1 $\longrightarrow$ Sous-variété de $\dim = 1$ (0,5) (0,5)

Figure 2 $\longrightarrow$ n'est pas une sous-variété en raison de pts. doubles (0,5)

Figure 3 $\longrightarrow$ // (0,5)