Université Larbi Ben M'Hidi - Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et la Vie
Département mathématique et informatique

Contrôle d'Analyse Numérique

Exercice 1. Résoudre le système d'équations linéaires suivant par *la méthode d'élimination de Gauss avec* ***pivotement partiel mis à l'échelle*** en utilisant l'arithmétique d'arrondi à trois chiffres significatifs.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 200x_3 &= 102 \qquad E_1 \\ 2x_1 - x_2 + 100x_3 &= 53 \qquad E_2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -3 \qquad E_3 \end{aligned}$$

Exercice 2. 1. Résoudre le système d'équations linéaires suivant à l'aide de **la forme matricielle** de la méthode de Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

2. Montrer que le schéma d'itération de Gauss-Seidel converge.
3. En commençant par $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, itérer trois fois.

Exercice 3. Pour le problème de la valeur initiale

$$\frac{dy}{dx} = \log_{10}(x+y), \qquad y(0) = 1,$$

trouver la valeur de $y(0.2)$ corriger jusqu'aux quatre décimales en utilisant la méthode d'Euler modifiée.

Exercice 4. Appliquer la méthode Runge-Kutta du quatrième ordre pour trouver $y(0.1)$, $y(0.2)$ et $y(0.3)$, étant donné que

$$\frac{dy}{dx} = xy + y^2, \qquad y(0) = 1.$$

Bon Courage

Prof. Abdelfatah Bouziani

Solution du Contrôle d'Analyse Numérique

Solution 1 (Ex 01)

La matrice augmentée correspondant au système donné est donnée par

$$[A:b]=\left[\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 200 & 102 \\ 2 & -1 & 100 & 53 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

Considérez la matrice augmentée avec les éléments absolument les plus grands attachés pour chaque ligne.

$$[A:b]=\left[\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 200 & 102 \\ 2 & -1 & 100 & 53 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{r} \rightarrow 200 \\ \rightarrow 100 \\ \rightarrow 5 \end{array}$$

Le vecteur pivot mis à l'échelle $S=[S_1,S_2,S_3]$ est le suivant

$$S=[S_1,S_2,S_3]=[200,100,5]\,.$$ 0.5pt

Nous définissons un vecteur pivot mis à l'échelle comme suit

$$E=\left[\left|\frac{a_{11}}{S_1}\right|,\left|\frac{a_{21}}{S_2}\right|,\left|\frac{a_{31}}{S_3}\right|\right]=\left[\frac{3}{200},\frac{2}{100},\frac{1}{5}\right].$$ 0.5pt

Étant donné que le troisième élément de ce vecteur est le plus grand, donc après avoir interverti les première et troisième lignes, nous avons

$$[A:b]=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 100 & 53 \\ 3 & 1 & 200 & 102 \end{array}\right] \begin{array}{r} \rightarrow 5 \\ \rightarrow 100 \\ \rightarrow 200 \end{array}.$$ 0.5pt

En appliquant

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \rightarrow & E_2-(2)\,E_1 \\ E_3 & \rightarrow & E_3-(3)\,E_1 \end{array}$$ 0.5pt

nous avons

$$[A:b]=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -11 & 96 & 59 \\ 0 & -14 & 194 & 111 \end{array}\right] \begin{array}{r} \rightarrow 5 \\ \rightarrow 100 \\ \rightarrow 200 \end{array}.$$ 0.5pt

Le vecteur pivot mis à l'échelle est donné par

$$E=\left[\left|\frac{a_{22}}{S_2}\right|,\left|\frac{a_{32}}{S_3}\right|\right]=\left[\frac{11}{100},\frac{14}{200}\right]$$ 0.5pt

Ainsi, l'échange de lignes n'est pas nécessaire. En appliquant $E_3 \rightarrow E_3 - \left(\frac{14}{11} = 1.27\right) E_2$, on a 0.5pt

$$[A : b] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -11 & 96 & 59 \\ 0 & 0 & 72 & 36.1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow 5 \\ \rightarrow 100 \\ \rightarrow 200 \end{array}.$$ 0.5pt

En résolvant ce système, on obtient

$$\begin{aligned} x_3 &= 0.501 \\ x_2 &= -0.991 \\ x_1 &= 0.960 \end{aligned}$$ 1pt

Solution 2 (Ex 2)

1. Considérons le système

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_4 = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \tag{2.1}$$

La méthode de Gauss-Seidel est une modification de la méthode de Jacobi. Elle consiste à tenir compte, lors du calcul de la $(k+1) - ième$ approximation de l'inconnue x_i, des $(k+1) - ièmes$ approximations des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ déjà établies.

Comme on a supposé $a_{ii} \neq 0$ pour $i = \overline{1,n}$, alors la matrice est inversible. L'algorithme de Gauss-Seidel s'écrit

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} \right]$$ 0.5pt

Ce qui implique

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{(k)}$$

soit,

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{(k)}$$

Sous forme matricielle, nous avons

$$(D - L)\, x^{(k+1)} = b - U x^{(k)},$$

Cela donne la formule de Gauss-Seidel suivante

$$x^{(k+1)} = -(D-L)^{-1} U x^{(k)} + (D-L)^{-1} b, \tag{3.10}$$ 0.5pt

La matrice $S = (D-L)^{-1} U$ est appelée **matrice de Gauss-Seidel** associée à A.

2. Nous réorganisons d'abord le système d'équations donné de sorte que A soit a diagonal strictemmnt dominante système résultant soit le suivant : 0.5pt

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 7 \end{aligned}$$ 0.5pt

La matrice $A = -L + D - U$ peut s'écrire comme suit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{-L} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{-U}$$ 0.5pt

En utilisant la méthode de Gauss–Seidel (3.10), on a

$$x^{(k+1)} = -(D-L)^{-1} U x^{(k)} + (D-L)^{-1} b,$$ 0.5pt

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = -\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix}$$ 0.5pt

$$+ \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$ 0.5pt

En utilisant $k = 0$, et le vecteur initial,

$$x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

dans le système ci-dessus, la première itération $x^{(0)}$ est donnée par

$$x^{(1)} = [1 \quad 0.25 \quad 1.1]^T$$ 0.75pt

De la même manière, les autres itérations sont données par:

Itération 2

0.850000   0.487500   1.035000 0.75pt

Itération 3

0.985000   0.505000   1.001000

Après trois itérations, la solution est la suivante

$$x_1 = 0.985000,\ x_2 = 0.505000,\ x_3 = 1.001000$$ 0.5pt

Solution 3 (Ex 3)

Soit $x_0 = 0$, $h = 0.2$, puis $x_1 = 0.2$ et $y_0 = 1$. y_1 restent à calculer. Ici 0.5pt

$$f(x, y) = \log_{10}(x + y), \quad 0.5\text{pt}$$

alors

$$f(x_0, y_0) = \log_{10}(1) = 0,$$

et

$$0.5\text{pt} \quad y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1, \quad 0.5\text{pt}$$

$$f\left(x_1, y_1^{(0)}\right) = \log_{10}\left(x_1 + y_1^{(0)}\right) = \log_{10}(0.2 + 1) = \log_{10}(1.2),$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(0)}\right)\right] \quad 0.5\text{pt} \\ &= 1 + \tfrac{0.2}{2}\left[0 + \log_{10}(1.2)\right] = 1.007918 \quad 0.5\text{pt} \end{aligned}$$

$$y_1^{(2)} = 1 + \frac{0.2}{2}\left[0 + \log_{10}(1.2 + 1.007918)\right] = 1.008204, \quad 0.5\text{pt}$$

$$y_1^{(3)} = 1 + \frac{0.2}{2}\left[0 + \log_{10}(1.2 + 1.008204)\right] = 1.008214. \quad 0.5\text{pt}$$

Par conséquent, la valeur correcte à quatre décimales est

$$y(0.2) = y_1 = 1.00821.$$

Solution 4 (Ex 4)

Soit $x_0 = 0$, $h = 0.1$, puis $x_1 = 0.1$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.3$ et $y_0 = 1$. y_1, y_2 et y_3 restent à calculer. Ici

$$f(x, y) = xy + y^2.$$

En utilisant la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre, on obtient

$$1.5\text{ pt} \quad \begin{aligned} K_1 &= f(x_0, y_0) = x_0 y_0 + y_0^2 = 1, \\ K_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_1 h\right) = 1.155, \\ K_3 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_2 h\right) = 1.17172, \\ K_4 &= f(x_0 + h, y_0 + K_3 h) = 1.35979, \end{aligned} \quad 1\text{pt}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 1.116887. \quad 0.5\text{pt}$$

Donc, $y(0.1) = 1.116887$.

Pour connaître la valeur de $y\,(0.2)$, nous avons

$$\begin{aligned} K_1 &= f\,(x_1, y_1) = x_1 y_1 + y_1^2 = 1.35913, \\ K_2 &= f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}K_1 h\right) = 1.58158, \\ K_3 &= f\left(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1 + \frac{1}{2}K_2 h\right) = 1.60973, \\ K_4 &= f\,(x_1 + h, y_1 + K_3 h) = 1.88850, \end{aligned}$$

1 pt

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 1.277391.$$

0.5pt

Donc, $y\,(0.2) = 1.277391$

Pour $y\,(0.3)$, on obtient

$$\begin{aligned} K_1 &= f\,(x_2, y_2) = x_2 y_2 + y_2^2 = 1.88721 \\ K_2 &= f\left(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + \frac{1}{2}K_1 h\right) = 2.22464, \\ K_3 &= f\left(x_2 + \frac{1}{2}h, y_2 + \frac{1}{2}K_2 h\right) = 2.27543, \\ K_4 &= f\,(x_2 + h, y_2 + K_3 h) = 2.71631, \end{aligned}$$

1pt

$$y_1 = y_2 + \frac{h}{6}\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 1.504119.$$

0.5 pt

Donc, $y\,(0.3) = 1.504119$.

Exercice 01: 2eme version

$\max(a_{1j})=3$ 0.5 pt

donc $E_2^1=-(2/3)E_1^0+E_2^0$ 0.5 pt

et $E_3^1=-(1/3)E_1^0+E_3^0$ 0.5 pt

3	-1	200	102
0	-1/3	-100/3	-15
0	16/3	-194/3	-37

0.5 pt

max(1/3; 16/3)= 16/3 0.5 pt

donc il faut invertir la 3eme et 2eme ligne 0.5 pt

$E_3^2=(1/16)E_2^1+E_3^1$ 0.5 pt

x3= 277/598= 0.4632 0.5 pt

x2= -395/299= -1.321 0.5 pt

x1= 801/299=2.67 0.5 pt