Université L'ardi Ben Mhidi, Oum-El-Bouaghi
Faculté des SESNV
Département de MI

Niveau : L2 mathématiques **Le:** 17/05/2023
Contrôle d'algèbre 4 **Durée:** 1h 30min

Exercice 1: (6 pts)
Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer la forme bilinéaire b associée à la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer* $\ker b$.
3. *Soit $\beta' = \{v_1(1,2,1), v_2(0,-1,1), v_3(2,1,1)\}$ une base de$\mathbb{R}^3$..*

Trouver la matrice A' associée à la forme bilinéaire b dans la base β' à l'aide de la matrice de passage $P_{\beta_c \to \beta'}$.

Exercice 2: (6 pts)
Soit $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique telle que:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : b(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

1. *Déterminer la forme quadratique associée à b.*
2. *Donner une réduction en carrée de Gauss pour la forme quadratique q et déterminer $sign(q)$ et $rg(q)$.*
3. *Est-ce-que q est définie positive? Justifier votre réponse.*
4. *Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes $I(q)$.*

Exercice 3: (6 pts)

1. *Soit la forme bilinéaire $b : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$(P,Q) \longrightarrow b(P,Q) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} P(t)Q(t)\sin(t)\,dt$$

   Est-ce-que b est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[x]$?

2. $\mathbb{R}^3$ *est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère:*

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 2z = 0 \text{ et } y + z = 0\right\}$$

Déterminer une base de $F^{\perp}$.

Exercice 4: (2 pts)

Soient E *un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel,* F *un s.e.v de* E *et* $\beta = \{v_1, .., v_p\}$ *une base de* F*, et soit* $b : E \times E \longmapsto \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire.*

Montrer que si $w \in E$ *est orthogonal à tout élément de* β *alors* w *est orthogonal à tout vecteur* x *de* F*.*

La correction

Exercice 1: (6 pts)
On a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. *La forme bilinéaire b associée à la matrice A (2pts)*

   On a $b(x,y) = x^t Ay$

   $$= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + 3x_3y_2 + x_3y_2 + 5x_3y_3$$

2. *Déterminer* $\ker b$. (2*pts*)

   On a $\ker b = \{x \in \mathbb{R}^3; b(x,y) = 0\}$,il suffit de r&soudre le système $Ax = 0$

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0....(1) \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0...(2) \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0...(3) \end{cases}$$

   De (1) $\underbrace{x_1 = -2x_2 - 3x_3}_{(*)} \xrightarrow{(2)} \underbrace{x_2 = -\frac{5}{2}x_3}_{(**)}$, remplaçons $(*)$ et $(**)$ dans (3) on trouve $x = y = z = 0$.

   Donc $\ker b = \{(0,0,0)\}$.

   Vous pouvez trouver le même résultat d'aprés le calcul de déterminant, on trouve $\det A = -17 \neq 0$ donc $rg(A) = rg(b) = 3$ et ona

   $$\dim E = \dim \ker b + rg(b) = 3$$

   alors $\dim \ker b = 0$ d'où $\ker b = \{(0,0,0)\}$.

3. $\beta' = \{v_1(1,2,1), v_2(0,-1,1), v_3(2,1,1)\}$ *une base de*$\mathbb{R}^3$.. (2*pts*)

On a $A' = P^t.A.P$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A' = \begin{pmatrix} 32 & 3 & 33 \\ 3 & 5 & 5 \\ 33 & 5 & 33 \end{pmatrix}$$

Exercice 2: (6 pts)
On a:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : b(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

1. *La forme quadratique associée à* b. (1*pt*)

   On a $q(x) = b(x,x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + -2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

2. *Donnons une réduction en carrée de Gauss pour la forme quadratique q (2pts)*

$$\begin{aligned}
q(x) &= 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + -2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \\
&= 2x_1^2 + 2(-x_2 - x_3)x_1 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_3 \\
&= 2\left[x_1^2 + 2\left(\frac{-x_2 - x_3}{2}\right)x_1\right] + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_3 \\
&= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right)^2 - 2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_3 \\
&= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{9}{2}x_3^2 - 3x_2x_3 \\
&= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2\left(-\frac{3}{2}x_3\right)x_2 + \frac{9}{2}x_3^2 \\
&= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x_2^2 + 2(-3x_3)x_2\right) + \frac{9}{2}x_3^2 \\
&= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 3x_3)^2 - \frac{1}{2}(-3x_3)^2 + \frac{9}{2}x_3^2 \\
&= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 3x_3)^2
\end{aligned}$$

$sign\,(q) = (p, n) = (2, 0)\,..\,(0.5)$ *et* $rg\,(q) = p + n = 2..\,(0.5)\,.$

3. *q est définie SSI $q(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ et positive SSI $q(x) \geq 0$*

   D'aprés la réduction en carrée de Gauss $q(x)$ est une somme de deux sommes carrées donc $q(x) \geq 0$ (0.5)

   Maintenant pour $x = (2, 3, 1)$ on trouve $q(x) = 0$ donc q n'*est pas définie.* (0.5)

4. *L'ensemble des vecteurs isotropes $I(q)\,.$ (1pt)*

   On a $I(q) = \{x \in \mathbb{R}^3, q(x) = 0\}$

$$\begin{aligned}
q(x) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

   $I(q) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 2x_3 \text{ et } x_2 = 3x_3\}$

Exercice 3: (6 pts)

1. *Soit la forme bilinéaire $b : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$(P, Q) \longrightarrow b(P, Q) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} P(t)\,Q(t)\sin(t)\,dt$$

b est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[x]$ SSI b une forme bilinéaire symétrique définie positive $(1pt)$

D'après la question b est une forme bilinéaire, et on a $b(Q,P) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} Q(t)\,P(t)\sin(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} P(t)\,Q(t)\sin(t)\,dt = b(P,Q)$, donc b est symétrique.$(1pt)$

D'autre part $q(P) = b(P,P) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (P(t))^2 \sin(t)\,dt$ mais on sait que la fonction $\sin(t) \leq 0$ pour $t \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin(t) \geq 0$ pour $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, donc dans $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ la fonction $\sin(t)$ n'est pas toujours positive d'où b n'est pas positive. Donc b n'*est pas un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_3[x]$ $(1pt)$.

Ou bien si vous ne remarquer pas que la forme bilinéaire n'est pas positive, si on doit vérifier la dérnière condition (b est définie) on trouve pour $P(t) = Q(t) = 1$ que $q(P) = b(P,P) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(t)\,dt = -\cos(t)\big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 0$ c-à-d on trouve $q(P) = 0$ mais $p(t) \neq 0$. Donc b n'est pas définie alors b n'est pas un produit scalaire.

2. *Déterminer une base de* $F^{\perp}$ *(3pts)*

   $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 2z = 0 \text{ et } y + z = 0\}$

   $y = -z$ et $x = -3z - 2z = -5z$ donc $F = \{(-5z, -z, z)\,/\,z \in \mathbb{R}\} = vect\{(-5,-1,1)\}$.

   $F^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^3, \forall y \in F < x, y >= 0\}$

   $< (x_1, x_2, x_3), (-5,-1,1) >= 0 \Leftrightarrow -5x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Longrightarrow x_2 = -5x_1 + x_3$

   $F^{\perp} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = -5x_1 + x_3\} = vect\{(1,-5,0), (0,1,1)\}$

Exercice 4: (2 pts)

On a $\beta = \{v_1, .., v_p\}$ *une base de* F; soit $x \in F$ alors $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{R} : x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i$.. (0.5)

Donc $b(w,x) = b\left(w, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i b(w, v_i)$ car b est une forme bilinéaire (0.75). Mais w est orthogonal à tout élément de F donc $\forall i = \overline{1;p} : b(w, v_i) = 0$ ce qui donne que $b(w,x) = 0$ alors w est orthogonal à tout vecteur x de F. (0.75)