Correction d'examen Math 2.

**Exercice 01:** 5pts

(1) $A.B = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -11 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ (définie car $A \in \mathcal{M}_{2.2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2.3}(\mathbb{R})$)

(0,5) $B.A$ = indéfinie car le nbre de colonnes de $B \neq$ le nbre de ligne de $A$.

(0,5) $B^2 = B.B$ = " " " " " " $\neq$ " " " $B$.

$A + 2I_2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (1)

$tr(A) = -4 + 1 = -3$ (0,5) , $C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (0,5)

$det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ (1)

**Exercice 02:** 3pts $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \neq 1 \\ x - 1 & si\ x = 1. \end{cases}$

on a: $f(x) = x^2 - 1$ si $x \in ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ : alors $f(x)$ est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$. (0,5)

si $x = 1$ on a: $f(x) = x - 1$. alors $f(1) = 0$ (0,5)

donc il reste à démontrer la dérivabilité en $x = 1$ à gauche et à droite :

(0,5) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} (x+1) = 2$ (0,5)

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} (x+1) = 2.$ (0,5)

On a : $f'_d(1) = f'_g(1)$ alors $f$ est dérivable en $x = 1$. (0,5)

d'où $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 03 : 6pts

$I_1 = \int_{-1}^{0} (-2x+1) e^{x} dx$ (intégration par partie). 2pts

on prend $\begin{cases} f(x) = -2x+1 \Rightarrow f'(x) = -2 dx. \\ g'(x) = e^{2x} \Rightarrow g(x) = e^{2x}/2 . \end{cases}$ 0.5

$I_1 = f \cdot g - \int f' g \, dx = \frac{1}{2}(-2x+1) e^{2x} \Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{-2}{2} e^{2x} dx$ 0.5

$I_1 = 1 - 2e^{-2}$ 1

2). Déterminant A, B, C 2pts

on a : $\frac{2x-1}{x(x-1)^2} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$.

alors : $A = -1, \ B = 1, \ C = 1$.

3). Calculer $I_2$ ; 2pts

$I_2 = \int \frac{2x-1}{x(x-1)^2} dx = \int \left( \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$ 0.5

$= \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx$ 0.5

$= -\ln|x| + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$ 1

$I_2 = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| - \frac{1}{x-1} + C.$

Exercice 04. 6pts

* le type de l'équation differentielles : 1

c'est une équation differentielle lineaire du premier ordre.

* Résolution du problème :

1) On résoudre l'equation: $y'(x) - 2y(x) = 0$.

alors : $y'(x) = 2y(x) \Rightarrow \dfrac{y'(x)}{y(x)} = 2$.

d'où $y(x) = c\,e^{2x}$. 1,5

2). La méthode de variation de la constante :

on a : $y(x) = c(x)\,e^{2x}$ d'où $y'(x) = c'(x)\,e^{2x} + 2c(x)\,e^{2x}$.

d'où $y' - 2y = 4 \Leftrightarrow c'(x)\,e^{2x} = 4$ donc $c'(x) = 4e^{-2x}$.

d'où $c(x) = -2e^{2x} + k$. 1,5

3) La solution est $y(x) = c(x)\,e^{2x}$ alors.

$$y(x) = (-2e^{2x} + k)\,e^{2x} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = k\,e^{2x} - 2}$$ 1

- on a : $y(0) = 0 \Rightarrow k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$.

d'où $$\boxed{y(x) = 2(e^{2x} - 1)}$$ 1

#