Université L'arbi Ben M'hidi

Faculté: Sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département: MI
Année universitaire: 2022/2023
Module: Algèbre 2

Correction d'examen n^0 2

<u>Exercice 1:</u>(4 pts)
1.

$$F_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - y = 0\right\}$$

i. On a $F_1 \neq \varnothing$ car $(0,0) \in F_1$. ....(0.5 **pts**)
ii. Soient $(x,y), \left(x^{'}, y^{'}\right)$ deux éléments de F_1. Alors,

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x^{'} - y^{'} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\left(x + x^{'}\right) - \left(y + y^{'}\right) = 0$$

donc $(x,y) + \left(x^{'}, y^{'}\right) = \left(x + x^{'}, y + y^{'}\right) \in F_1$ ....(1 **pts**)
iii. De même, $\forall (x,y) \in F_1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \in F_1$ ....(1 **pts**)
car

$$2\lambda x - \lambda y = \lambda (2x - y) = 0$$

alors, l'ensemble F_1 est un sous-espace vectoriel.
2.

$$F_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\right\}$$

L'ensembleF_2 n'est pas un sous-espace vectoriel car si on prend $(x,y) \in F_2$ avec $y \succ 0$ et $\lambda \prec 0$, on a $\lambda y \prec 0$, ce qui implique que $\lambda(x,y) \notin F_2$...............................(1.5 **pts**)

<u>Exercice 2:</u>(7 pts)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire avec

$$f(e_1) = (1,1,a), f(e_2) = (1,a,1), f(e_3) = (a,1,1),$$

$a \in \mathbb{R}$ et $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1. Calculons $f(x,y,z)$.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x(1,1,a) + y(1,a,1) + z(a,1,1) \\ &= (x + y + az, x + ay + z, ax + y + z) \, ... \, (1.5 \textbf{ pts}) \end{aligned}$$

2. Déterminons une base de $\ker f$

Pour $a=-2$, on a

$$f(x,y,z)=(x+y-2z,x-2y+z,-2x+y+z)$$

$$\ker f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/f(x,y,z)=(0,0,0)\right\}\text{..... (0.5 }\textbf{pts}\text{)}$$

donc,

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x=y=z$$

$$\Rightarrow \quad \ker f=\{(x,x,x)/x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,1,1)/x\in\mathbb{R}\}\text{.......... (1 }\textbf{pts}\text{)}$$

alors, $\{(1,1,1)\}$ est une base de $\ker f$ .et $dim(\ker f)=1$............ (1 **pts**)
3. L'application f n'est pas injective car $\ker f\neq\{(0,0,0)\}$............. (1 **pts**)
4. Calculons le rang de f.
D'après le th du rang , on a

$$\begin{aligned} \dim\mathbb{R}^3 &= rgf+dim(\ker f) \\ &\Rightarrow rgf=3-1=2\text{.......... (1 }\textbf{pts}\text{)} \end{aligned}$$

L'application f n'est pas surjective car son image,qui est de dimension 2, est strictement incluse dans l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. ....(**1 pts**)

<u>Exercice 3:</u>(**9 pts**)
Soient les matrices :
$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 15 & 9 & 1 \end{pmatrix}$............ (1 **pts**)

2) La matrice B est-elle inversible ?
$detB=3\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=2\neq 0$
donc B est inversible...........(1 **pts**)

3) Déterminons B^{-1}.
$B^{-1}=\dfrac{1}{\det B}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & -8 & -10 \end{pmatrix}^t\Rightarrow\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 5 & 1 & -8 \\ 6 & 2 & -10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 3 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -4 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$................ (2 **pts**)

4) Supposons que A est la matrice assciée à une application linéaire f selon les deux bases canoniques

$$E=\{e_1(1,0,0),e_2(0,1,0),e_3(0,0,1)\},L=\{l_1(1,0),l_2(0,1)\},$$

donc, la matrice assciée à f selon les deux bases $E' = \{e'_1(1,1,1), e'_2(1,1,0), e'_3(1,0,0)\}$ et $L' = \{l'_1(1,3), l'_2(1,4)\}$ est

$$B = Mat_{E',L'}(f) = Q^{-1}AP................ (1 \textbf{ pts})$$

avec P la matrice de passage de E à E', Q^{-1} la matrice de passage de L' à L.

1) Calculons Q^{-1}: la matrice de passage de L' à L.

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} l_1 = (1,0) = a_{11}(1,3) + a_{21}(1,4) \\ l_2 = (0,1) = a_{12}(1,3) + a_{22}(1,4) \end{array} \right. \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} (1,0) = (a_{11} + a_{21}, 3a_{11} + 4a_{21}) \\ (0,1) = (a_{12} + a_{22}, 3a_{12} + 4a_{22}) \end{array} \right. \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{c} a_{11} = 4 \\ a_{21} = -3 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{c} a_{12} = -1 \\ a_{22} = 1 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Donc

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} .... (2 \textbf{ pts}).$$

2) De même, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .... (1 \textbf{ pts})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & B = Mat_{E',L'}(f) = Q^{-1}AP \\ = \quad & \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = \quad & \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{pmatrix} .... (1 \textbf{ pts}) \end{aligned}$$

PR. Rezzag.S