Université Larbi Ben M'hidi Om El-Bouaghi
Département MI Correction de l'examen de Géométrie L2 Mathématiques appliquées
2022/2023

Exercice 01 : [06 pts]

1) Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de d'un espace affine $\mathcal{E}$. Soit A, B et C trois points de $\mathcal{F}$ et D le point de E verifiant $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BD}$. Montrer que $D \in \mathcal{F}$.

Réponse :$\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BD} \Rightarrow 3\overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$, donc D est le barycentre de points pondérés $(A, 3), (B, -5)$ et $(C, -1)$, alors $D \in \mathcal{F}$ puisque $\mathcal{F}$ est stable par barycentres.

2) Soit $A(1, -1, 0), B(2, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ Calculer les cordonnées du point G où G est le barycentre de points pondérés $(A, 1), (B, 2)$.

Réponse : $x_G = \dfrac{1 \times 1 + 2 \times 2}{1+2} = \dfrac{5}{3}, \quad y_G = \dfrac{1 \times (-1) + 2 \times 2}{1+2} = 1 \quad et \quad z_G = \dfrac{1 \times 0 + 2 \times (-1)}{1+2} = -\dfrac{2}{3}$.

3) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Complet les définitions suivantes :
Une droite affine est un sous-espace affine de E de dimension 1.
Un plan affine estun sous-espace affine de E de dimension 2.
Un sous-espace affine de dimension 0 est un singleton.

4) Soient (d_1) et (d_2) deux droites dans un espace affine de dimension 3. Rappeler les différents cas possibles de l'intersection de (d_1) et (d_2).

Réponse :On a trois cas
$(d_1) \cap (d_2) = (d_1) = (d_2)$;
$(d_1) \cap (d_2)=$ un singleton ;
$(d_1) \cap (d_2) = \Phi$ et dans ce cas, ils sont parallèles ou ne sont pas du même plan.

Exercice 02 : [10 pts]

On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Soient :

- les points $A(1, 2, 3), B(2, -1, 2), C(0, 1, -2)$.
- les droites $(d_1) : \begin{cases} x &= 3 - t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= -1 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \quad (d_2) : \begin{cases} x &= 1 + 3s \\ y &= -2s \\ z &= 3 + 5s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}.$
- les plans $(P_1) : \begin{cases} x &= 1 - t + 2s \\ y &= -2 + t - s \\ z &= 4 - t - 2s \end{cases}, \ t, s \in \mathbb{R}, \quad (P_2) : \ 2x - y + 3z - 1 = 0.$

1) Déterminer $(d_1) \cap (d_2)$.

Réponse : $\begin{cases} 3 - t = 1 + 3s \\ 1 + 2t = -2s \\ -1 + t = 3 + 5s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{7}{4} \\ s = \frac{5}{4} \\ -1 + t = 3 + 5s \end{cases}$, donc $(d_1) \cap (d_2) = \Phi$.

2) Donner une équation cartésienne de (P_1).

$\begin{cases} x &= 1 - t + 2s \\ y &= -2 + t - s \\ z &= 4 - t - 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t &= x + 2y + 3 \\ s &= x + y + 1 \\ z &= 4 - t - 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t &= x + 2y + 3 \\ s &= x + y + 1 \\ z &= 4 - (x + 2y + 3) - 2(x + y + 1) \end{cases}$, alors,

$$(P_1) : 3x + 4y + z + 1 = 0$$

3) Déterminer $(P_1) \cap (P_2)$.

Réponse : $N_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $N_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs normals sur (P_1) et (P_2) respectivement. Comme N_1

est N_2 sont linéairement indépendants, alors, $(P_1)\cap(P_2)$ est une droite définies par le système d'équation

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+4y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-1=0. \end{array}\right.$$

4) Déterminer l'intersection $(d_1)\cap(P_2)$.

Réponse : $\begin{cases} x & =3-t \\ y & =1+2t \\ z & =-1+t \\ 2x-y+3z-1 & =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & =3-t \\ y & =1+2t \\ z & =-1+t \\ 2(3-t)-(1+2t)+3(-1+t)-1 & =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & =2 \\ y & =3 \\ z & =0 \\ t & =1, \end{cases}$,

donc

$$(d_1)\cap(p_2)=\{(2,3,0)\}.$$

5) Calculer la distance entre A et (d_1).

Réponse : Soit $A'(3-t,1+2t,1-t)$. On a $\overrightarrow{AA'}.\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-t \\ -1+2t \\ -2-t \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow t=\frac{2}{3}$.

$d(A,(d_1))=AA'=\frac{\sqrt{16+1+64}}{3}=3.$

Exercice 03 : [04 pts]

Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$v_1(1,1,0,0), v_2(0,0,1,1) \text{ et } v_3(0,0,0,1).$$

Réponse : On a $v_1.v_2=0$ donc, on prend $u_1=v_1$ et $u_2=v_2$.
On pose $u_3=v_3+au_1+bu_2$.
$u_1.u_3=0 \Rightarrow a=-\frac{v_1.v_3}{v_1.v_1}=0.$
$u_2.u_3=0 \Rightarrow b=-\frac{v_2.v_3}{v_2.v_2}=-\frac{1}{2},$
donc $u_3=(0,0,-1/2,1/2)$
La base orthonormée est $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1), \sqrt{2}(0,0,-1/2,1/2)\right\}$.